جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله اول
ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۷

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۷

۱- اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^۳+x^۲+۲x-۱=۰$ باشد آنگاه دو ریشه‌ی دیگر معادله را به‌صورت کثیرالجمله‌ای [چندجمله‌ای] با ضرایب گویا برحسب α به دست آورید.

۲- در مثلث غیر مشخص ABC که هر سه زاویه‌ی آن حاده هستند ارتفاعات AD، BE و CF را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را به ترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگ‌ترین ارتفاع و s طول کوچک‌ترین پاره‌خط از بین پاره‌خط‌های AP، BQ و CR باشد ثابت کنید

$$\frac{h}{s} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳- دو تابع حقیقی f و g بر [روی] $\mathbb{R}$ را وابسته گوییم هرگاه تابع حقیقی دو سویی h (یک‌به‌یک و پوشا) [روی $\mathbb{R}$] وجود داشته باشد به‌طوری‌که $h\,o\,f = g\,o\,h$ ($f\,o\,g$ ترکیب توابع f و g است).

الف) نشان دهید اگر f و g وابسته و g و φ نیز وابسته باشند آنگاه f و φ نیز وابسته‌اند.

ب) مطلوب است شرط لازم و کافی برحسب a و b برای اینکه دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۲-ax+b$ وابسته باشند.

۴- معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید (m، n، p و q ارقام هستند):

$$(m-۹)^۲\times m! + (n-۸)^۲\times n! + ۵۰\times p! + ۴۹\times q! = \sqrt{mnpq}$$

۵- فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ $(۰<a<b)$ تعریف‌شده و در رابطه‌ی

$$\forall x,y\in[a,b],\qquad x\neq y \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \left|x-y\right|$$

صدق کند؛ و داریم $f(a)=f(b)=۰$. ثابت کنید

$$\forall x,y\in[a,b],\qquad \left|f(x)-f(y)\right| < \frac{a+b}{۲}$$

۶- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AC>BD$، از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید

$$AB.AE + AD.AF = AC^۲$$

حل مسأله‌های مرحله‌ی اول ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۷

۱- می‌دانیم $P(x)=x^{۳}+x^{۲}-۲x-۱=۰$ ریشه‌ی گویا ندارد (چرا؟) پس $P(x)$ روی اعداد گویا تجزیه نمی‌شود. یعنی α نمی‌تواند ریشه‌ی چندجمله‌ای دیگری از درجه‌ی کمتر از ۳ باشد و $P(x)$ تنها چندجمله‌ای درجه‌ی سوم تحویل‌ناپذیر روی اعداد گویاست که $P(\alpha)=۰$. حال چندجمله‌ای $P(x-۱)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۱$ را در نظر می‌گیریم. ریشه‌های $P(x-۱)=۰$ عبارت‌اند از $\alpha+۱$، $\beta+۱$ و $\gamma+۱$، که α، β و γ ریشه‌های $P(x)=۰$ هستند. اما،

$$\beta.\gamma=\frac{۱}{a},\qquad (\beta+۱)(\gamma+۱)=-\frac{۱}{\alpha+۱}$$

پس

$$\beta+\gamma=(\beta+۱)(\gamma+۱)-\beta\gamma-۱=\frac{۱}{\alpha+۱}-\frac{۱}{\alpha}-۱$$

یعنی

$$\begin{cases}\beta+\gamma=\dfrac{-\alpha^{۲}-۳\alpha-۱}{\alpha(\alpha+۱)}\\[2mm] \beta.\gamma=\dfrac{۱}{\alpha}\end{cases}$$

درنتیجه

$$\gamma=-\frac{\alpha+۱}{\alpha},\qquad \beta=-\frac{۱}{\alpha+۱}$$

حال قرار می‌دهیم

$$\beta=-\frac{۱}{\alpha+۱}=A\alpha^{۲}+B\alpha+C$$

ضرایب A، B و C را تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A\alpha^{۳}+(A+B)\alpha^{۲}+(B+C)\alpha+C+۱=۰$$

داریم $\alpha^{۳}=۱+۲\alpha-\alpha^{۲}$ که با قراردادن آن در رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم

$$B\alpha^{۲}+(B+C+۲A)\alpha+(A+C+۱)=۰$$

$$\left.\begin{aligned}B&=۰\\ B+C+۲A&=۰\\ A+C+۱&=۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=۱ \text{ و } C=-۲$$

بنابراین،

$$\beta=\alpha^{۲}+۰\times\alpha-۲=\alpha^{۲}-۲$$

و چون $\alpha+\beta+\gamma=-۱$، به دست می‌آید

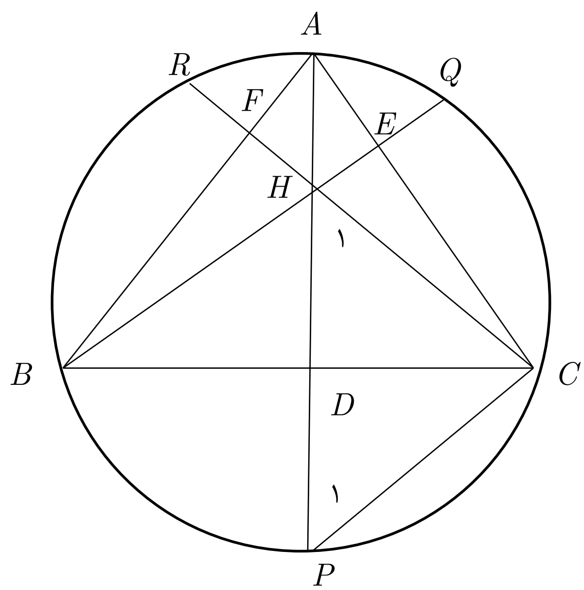
$$\gamma=-۱-\alpha-\alpha^{۲}+۲=-\alpha^{۲}-\alpha+۱$$

۲- می‌دانیم که قرینه‌ی محل تلاقی سه ارتفاع، H، نسبت به هر یک از اضلاع، روی دایره‌ی محیطی است. پس

$$\frac{AP}{AD}=۱+\frac{DP}{AD}=۱+\frac{HD}{AD}$$

درنتیجه،

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}=۳+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{FC}$$



اما،

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{FC}=\frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}=۱$$

پس

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}=۴$$

و با توجه به نامساوی $\frac{x+y+z}{۳}\geq\sqrt[۳]{xyz}$ $(x,y,z\geq ۰)$ داریم

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}\leq\frac{۶۴}{۲۷}$$

پس

$$\frac{s^۳}{h^۳}\leq\frac{۶۴}{۲۷}\Rightarrow\frac{h}{s}\geq\frac{۳}{۴}>\frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳- الف) توجه می‌کنیم که f و g وابسته‌اند هرگاه $f=h^{-۱}ogoh$ پس اگر $g=\psi^{-۱}o\varphi o\psi$ (h و ψ یک‌به‌یک و پوشا هستند)،

آنگاه

$$f = h^{-1}\ \psi^{-1}\varphi\psi\ h = \ \psi h^{\ -1}\varphi\ \psi h$$

و ψh نیز یک‌به‌یک و پوشاست. پس φ و f نیز وابسته‌اند.

ب) از تساوی $h(f(x))=g(h(x))$ داریم

(۱) $$h(x)^2 = h(x)^2 - ah(x) + b$$

اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم خواهیم داشت

(۲) $$h(x^2) = h(-x)^2 - ah(-x) + b$$

حال اگر دو تساوی (۱) و (۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$(h(x)-h(-x))(h(x)+h(-x)-a)=0$$

چون h یک‌به‌یک است پس برای هر $x \neq 0$ ، $h(x)-h(-x) \neq 0$؛ بنابراین، برای هر x غیر صفر، $h(x)+h(-x)-a=0$.

چون h تابعی پوشاست پس x_0 موجود است به‌طوری‌که $h(x_0)=\frac{a}{2}$ و درنتیجه، $h(-x_0)=\frac{a}{2}$ ($x_0=0$ مشکلی برای ما ایجاد نمی‌کند). و چون h تابعی یک‌به‌یک است پس $x_0=0$ یعنی $h(0)=\frac{a}{2}$. حال در تساوی

$$h(x^2) = h(x)^2 - ah(x) + b$$

به‌جای x صفر می‌گذاریم، خواهیم داشت

$$\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + b$$

یعنی

$$a^2 + 2a = 4b$$

این شرط کافی است زیرا توجه می‌کنیم که برای تابع یک‌به‌یک و پوشای

$$h(x) = x + \frac{a}{2}$$

خواهیم داشت $hof=goh$

۴- می‌دانیم $99 \le \left|\sqrt{mnpq}\right|$ ؛ بنابراین،

$$(m-9)^2 \times m! + (n-8)^2 \times n! + 50 \times p! + 49 \times q! \le 99$$

حداقل مقدار $p!$ و $q!$ یک است پس کمترین مقدار $50 \times p! + 49 \times q!$، ۹۹ است. پس

$$(m-9)^2 \times m! + (n-8)^2 \times n! = 0$$

$$(m-9)^2 \times m! = 0 \Rightarrow m = 9$$

$$(m-8)^2 \times n! = 0 \Rightarrow n = 8$$

و

(۱) $$50 \times p! + 49 \times q! \le 99$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که $p!=۱$ و $q!=۱$. پس

$$\begin{cases} p=۰ \\ p=۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} q=۰ \\ q=۱ \end{cases}$$

تنها جواب $p=۰$ و $q=۱$ در رابطه‌ی (۱) صدق می‌کند. بنابراین،

$$\overline{mnpq}=۹۹^۲=۹۸۰۱\ mnpa$$

۵- گر $x=y$ باشد حکم واضح است. اگر x دلخواه و $y=a$ یا $y=b$ ، داریم

$$\begin{cases} \left|f(x)-f(a)\right|<\left|x-a\right|=x-a<x \\ \left|f(x)-f(b)\right|<\left|x-b\right|=b-x \end{cases}$$

پس

$$\left|f(x)\right|<\frac{b}{a}<\frac{a+b}{۲}\left|f(x)-f(b)\right|<\frac{a+b}{۲}\left|f(x)-f(a)\right|<\frac{a+b}{۲}$$

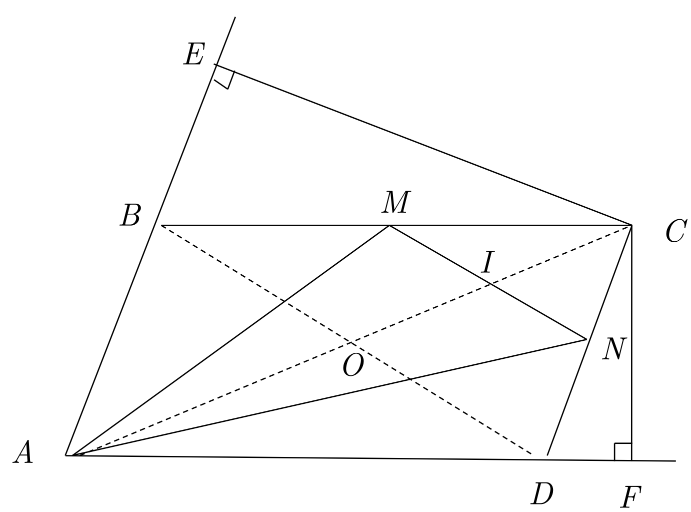
و اگر $x,y\in(a,b)$، کافی است فرض کنیم $\left|x-y\right|>\frac{a+b}{۲}$ (در غیر این صورت حکم ثابت می‌شود)، داریم

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(y)\right| &\le \left|f(x)\right|+\left|f(y)\right| \\ &< x+(b-y) \\ &= b-(y-x)\end{aligned}$$

می‌توان فرض کرد $x<y$، پس

$$\left|f(x)-f(y)\right|<b-\frac{a+b}{۲}=\frac{b-a}{۲}<\frac{b+a}{۲}$$

۶-



در دایره‌ای به قطر BC (که مرکزش M است) داریم (P_M^A یعنی قوت نقطه‌ی A نسبت به دایره‌ی با مرکز M)

$$P_M^A = AB.AE = AM^۲ - \frac{BC^۲}{۴}$$

در دایره‌ای به قطر CD (که مرکزش N است) داریم

$$P_N^A = AD.AF = AN^۲ - \frac{CD^۲}{۴}$$

I را محل تقاطع MN و AC و O را محل تقاطع BD و AC می‌گیریم. طرفین رابطه‌های بالا را جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} AB.AE+AD.AF &= (AM^۲ + AN^۲) - \frac{۱}{۴}(BC^۲ + CD^۲) \\ &= \frac{۱}{۲}MN^۲ + ۲AI^۲ - \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}BD^۲ + ۲CO^۲) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}BD\right)^۲ + ۲\left(\frac{۳}{۴}AC\right)^۲ - \frac{۱}{۸}BD^۲ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}AC\right)^۲ \\ &= \frac{۱}{۸}BD^۲ + \frac{۱۸}{۱۶}AC^۲ - \frac{۱}{۸}BD^۲ - \frac{۱}{۸}AC^۲ \\ &= \frac{۹}{۸}AC^۲ - \frac{۱}{۸}AC^۲ \end{aligned}$$

پس

$$AB.AE + AD.AF = AC^۲$$