جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله دوم
نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۰

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
-	۶	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۷۰

۱- ثابت کنید معادله‌ی $x+x^۲=y+y^۲+y^۳$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

۲- چهاروجهی ABCD داده‌شده است.

الف) اگر صفحه‌ای مانند (P) این چهاروجهی را قطع کند، شرط لازم و کافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع گردد چیست؟ نشان دهید در این صورت مسأله دارای سه جواب است.

ب) اکنون یکی از این سه دسته جواب را در نظر می‌گیریم. وضع صفحه‌ی (P) را چگونه باید انتخاب کرد تا مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل ماکزیمم گردد.

ج) صفحه‌ی (P) را به‌گونه‌ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت اندازه‌ی ضلع لوزی را برحسب اندازه‌های یال‌های چهاروجهی به دست آورید.

۳- فرض می‌کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف‌شده است، $f(۱)=۱$،

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

و برای $x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ داریم $f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{f(x)}$. همه‌ی توابع f(x) را به دست آورید.

۴- نشان دهید حداقل شش نقطه با مختصات گویا روی منحنی

$$y^۲=x^۳+x+۱۳۷۰^{۱۳۷۰}$$

وجود دارد.

۵- مثلث ABC در دایره (C) محاط است. نیمسازهای درونی زوایای مثلث مزبور دایره‌ی (C) را مجدداً در A'، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I نقطه‌ی برخورد نیمسازها باشد ثابت کنید که

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geq ۳$$
$$IA'+IB'+IC'\geq IA+IB+IC$$

۶- سه گروه A، B و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در [یک] کنفرانس گردآمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه‌نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به‌طوری‌که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقاً در یک جلسه [باهم] شرکت کرده باشند.

الف) اگر این عمل امکان‌پذیر باشد نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساوی‌اند.

ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه سه باشد نشان دهید این عمل امکان‌پذیر است.

ج) ثابت کنید در حالت کلیِ تساویِ تعداد اعضای سه گروه، این عمل امکان‌پذیر است.

حل مسأله های مرحله‌ی دوم نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۷۰

۱- فرض می‌کنیم $(y, x-y)=a$ ؛ بنابراین،

$$y=ba, \qquad x-y=ca, \qquad (b,c)=۱$$

درنتیجه،

$$ab+ac+a^{۲}b^{۲}+a^{۲}c^{۲}+۲a^{۲}bc=ab+a^{۲}b^{۲}+a^{۳}b^{۳}$$

اگر $a=۰$ ، آنگاه $x=y=۰$ که خلاف فرض مثبت بودن x و y است. اگر $a\neq ۰$ ، آنگاه $c+ac^{۲}+۲abc=a^{۲}b^{۳}$.
پس $c \mid a^{۲}b^{۲}$ ، یعنی $c \mid a^{۲}$. پس $a^{۲}=dc$ و بنابراین،

$$۱+ac+۲ab=db^{۳}$$

درنتیجه $(d,a)=۱$. اما $a^{۲}=dc$ و اگر $d\neq ۱$ باشد آنگاه $(d,a)\neq ۱$. پس $d=۱$ و $a^{۲}=c$.

$$\begin{cases} ۱+a^{۳}+۲ab=b^{۳} \\ c=a^{۲} \Rightarrow (b,a^{۲})=۱ \end{cases}$$

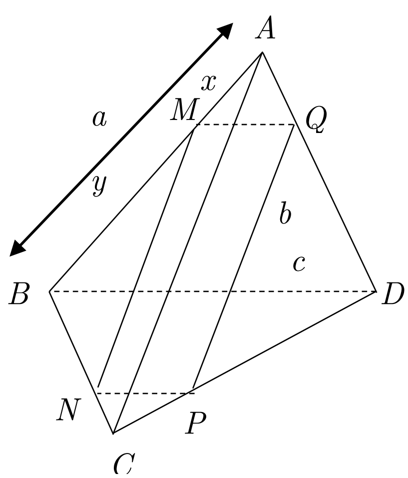
پس $(a,b)=۱$. از $b^{۳}=a+a^{۳}+۲ab$ نتیجه می‌شود $b>a$ و

$$(b-a)((b-a)^{۲}+۳abb)=۱+۲ab$$

$$\left.\begin{array}{l} b-a=s \\ ab=p \end{array}\right\} \Rightarrow s(s^{۳}+۳p)=۱+۲$$

اما $a,b\neq ۱$ و درنتیجه $p>۱$ و بنابراین، $۱+۲p<۳p$ ؛ درنتیجه، تساوی فوق نمی‌تواند به‌قرار باشد.

۲- الف) فرض می‌کنیم MNPQ متوازی‌الاضلاع باشد در این صورت $MQ \parallel NP$ و چون $NP\subset BCD$ پس $MQ \parallel BD$
(چرا؟) و به دلیل مشابه $MN \parallel AC$ یعنی صفحه‌ی (p) با دو یال AC و BD موازی است. به‌عکس اگر (p) با دو یال AC و BD موازی باشد به سهولت ثابت می‌شود که MNPQ متوازی‌الاضلاع است.



ب) اکنون می‌نویسیم $S_{MNPQ} = \frac{۱}{۲} MN.MQ \sin\alpha$. بدیهی است که چون α ثابت است (زاویه‌ی بین دو یال متنافر AC و BD) پس $\frac{۱}{۲}\sin\alpha$ مقداری است ثابت و درنتیجه باید MN.MQ ماکزیمم گردد. داریم

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BD} \qquad \frac{x}{a} = \frac{MQ}{c} \qquad MQ = \frac{cx}{a}$$
$$\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC} \qquad \frac{y}{a} = \frac{MN}{b} \qquad MN = \frac{by}{a}$$

درنتیجه

چون $x + y = a$ ، پس ماکزیمم xy در صورتی پیش می‌آید که x = y باشد یعنی M باید وسط AB باشد. درنهایت رأس‌های متوازی‌الاضلاع با مساحت ماکزیمم وسط‌های AB، BC، CD و DA است.

ج) اگر MNPQ لوزی باشد داریم

$$MN = MQ, \qquad \frac{cx}{a} = \frac{by}{a}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

یعنی باید نقطه‌ی M یال AB را به نسبت $\frac{b}{c}$ تقسیم کند. در این صورت

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}, \frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c}, \frac{a}{y} = \frac{b+c}{c}, y = \frac{ac}{b+c}$$

پس

$$MN = \frac{by}{a} = \frac{b \times \frac{ac}{b+c}}{a} = \frac{bc}{b+c}$$

۳- واضح است که $f(۰) = ۰$ و $f(n) = n$ (استقرا) و همچنین $f(\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{f(n)} = \frac{۱}{n}$ و درنتیجه، به ازای هر $r \in \mathbb{Q}$، $f(r) = r$.

از طرفی f یک‌به‌یک است زیرا اگر $f(x) = f(y)$ آنگاه،

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x)$$

و درنتیجه، $f(y - x) = ۰$. حال اگر $y - x = \alpha \neq ۰$ آنگاه

$$f(\alpha) f\left(\frac{۱}{\alpha}\right) = ۱$$

و درنتیجه، ۱=۰ که تناقض است. بنابراین $y = x$. و همچنین واضح است که $f(-x) = -f(x)$. حال نشان می‌دهیم که $f(x^۲) = f(x)^۲$. واضح است که اگر $f(x) = f(x)^۲$ آنگاه این رابطه با توجه به یک‌به‌یک بودن f ($x = \{۰$ یا $۱\}$) برقرار است و اگر $f(x) \neq f(x)^۲$ ، آنگاه داریم

$$\frac{۱}{f(x) - f(x^۲)} = \frac{۱}{f(x - x^۲)} = \frac{۱}{f(x(۱ - x))}$$

$$= f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{1-f(x)}$$

$$= \frac{1}{f(x) - f(x)^2} \Rightarrow f(x^2) = f(x)^2$$

بنابراین، اگر $x > 0$ آنگاه $f(x) > 0$ و درنتیجه f صعودی است (چرا؟). حال با توجه به اینکه برای هر x دو دنباله از اعداد گویا مانند r_n و s_n وجود دارد که به ازای هر n، $r_n < x < s_n$ تنها عددی است که در آن نامساوی صدق می‌کند، داریم

$$r_n = f(r_n) < f(x) < f(s_n) = s_n$$

درنتیجه $f(x) = x$.

۴- می‌گیریم $a = 1370^{685}$. اگر $x = 0$ آنگاه

$$a(0, a), \qquad B(0, -a)$$

ضریب زاویه‌ی مماس در A برابر است با $y' = \frac{1}{2a}$ پس معادله‌ی مماس در A می‌شود $y = \frac{x}{2a} + a$. محل تقاطعِ مماس با منحنی را می‌یابیم.

$$\left(\frac{x}{2a} + a\right)^2 = x^3 + x + 1370^{1370}$$

پس $x = \frac{1}{4a^2}$ و درنتیجه،

$$C\left(\frac{1}{4a^2}, \frac{1+8a^4}{8a^3}\right), \qquad D\left(\frac{1}{4a^2}, \frac{1+8a^4}{8a^3}\right)$$

حال خط BC را با منحنی قطع می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که این خط در C بر منحنی مماس نیست پس در یک نقطه E $(E \neq B)$ با مختصات گویا منحنی را قطع می‌کنند.

زیرا

$$\text{BC ضریب زاویه‌ی} = \frac{\dfrac{1+8a^4}{8a^3} + a}{\dfrac{1}{4a^2}} = \frac{1+16a^2}{2a}$$

$$2yy' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = \frac{\dfrac{3}{16a^4} + 1}{2\left(\dfrac{1+8a^4}{8a^3}\right)} = \frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

که شیب مماس در C است. حال واضح است که

$$\frac{۱+۱۶a^۴}{۲a} \neq \frac{۳+۱۶a^۴}{۴a(۱+۸a^۴)}$$

$$۲(۱+۱۶a^۴)(۱+۸a^۴) > ۳+۱۶a^۴$$

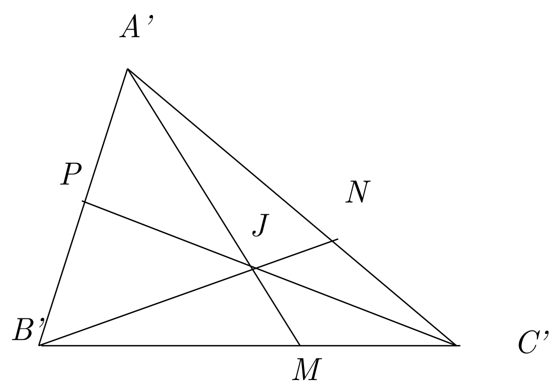
همچنین خط DA به همین دلیل منحنی را در نقطه‌ی دیگری مانند F با مختصات گویا قطع می‌کند.

۵- ماخ برای هر سه خط همرس داریم

$$\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geq ۶ \qquad (۱)$$

زیرا با در نظر گرفتن مساحت‌ها داریم

$$\frac{IM}{MA'}+\frac{IN}{NB'}+\frac{IP}{PC'} = ۱$$



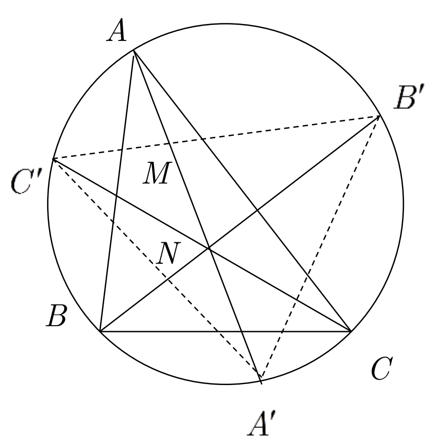
پس بنابر نامساوی کوشی،

$$\frac{A'M}{IM}+\frac{B'N}{IN}+\frac{C'P}{IP} \geq ۹$$

و یا

$$\frac{A'I+IM}{IM}+\frac{B'I+IN}{IN}+\frac{C'I+IP}{IP} = ۳+\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geq ۹$$

و درنتیجه



M، N و P را وسط‌های پاره‌خط‌های AI، BI و CI می‌گیریم. با توجه به شکل بدیهی است که $A'C'$ عمودمنصف IB و $A'B'$ عمودمنصف IC و $B'C'$ عمودمنصف IA است. پس

$$\frac{IA'}{IM}+\frac{IB'}{IN}+\frac{IC'}{IP}\geq ۶$$

و ازآنجا

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geq ۳$$

اکنون طبق نامساوی «اردیش-مردل» داریم

$$IA'+IB'+IC'\geq ۲(IM+IN+IP)$$

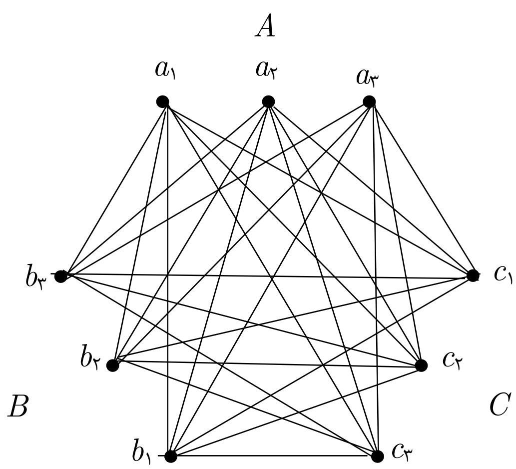
یا

$$IA'+IB'+IC'\geq IA+IB+IC$$

۶- ماخ فرض کنید دانشمندان مجموعه‌های

$$A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_m\},\quad B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_n\},\quad C=\{c_۱,c_۲,\dots,c_p\}$$

باشد. برای هر یک از اعضای مجموعه‌ها نقطه‌ای روی صفحه متناظر می‌کنیم (شکل برای $m=n=p=۳$ نشان داده‌شده است). اگر یک دانشمند مثلاً a_i با یک دانشمند دیگر مثلاً b_j در یک جلسه شرکت داشته باشد یک خط بین a_i و b_j رسم می‌کنیم. تمام نقاط A را به هر یک از نقاط B و C وصل می‌کنیم و همین‌طور هر یک از نقاط B را به هر یک از نقاط C متصل می‌نماییم. منظور مسأله، افراز خطوط حاصل به مثلث‌هایی مانند $a_ib_jc_k$ است.



الف) هر مثلث $a_ib_jc_k$ از هر قسمت {A,B}، {B,C} و {A,C} دقیقاً یک خط در بردارد. پس باید تعداد خطوط بین این قسمت‌ها باهم مساوی باشند. پس

$$\text{Mn}=\text{mp},\qquad\qquad \text{mn}=\text{np}$$

یعنی

$$m=n=p$$

ب) مثلث‌ها می‌توانند به‌صورت زیر باشند

$$a_۱b_۱c_۱,a_۱b_۲c_۲,a_۱b_۳c_۳,\dots,a_۳b_۳c_۳,$$

جدول زیر بیانگر حل این حالت از مسأله است (a_i و b_j با c_k که از جدول به دست می‌آید یک جلسه تشکیل خواهند داد، c_k در ستون a_i و سطر b_j قرار دارد.)

	a_1	a_2	a_3
b_1	c_1	c_2	c_3
b_2	c_2	c_3	c_1
b_3	c_3	c_1	c_2

ج) در حالت کلی نیز کافی است از جدول زیر استفاده کنیم.

	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
b_1	c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_{n-1}	c_n
b_2	c_2	c_3	c_4	$\dots$	c_n	c_1
b_3	c_3	c_4	c_5	$\dots$	c_1	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-2}	c_{n-1}

در داخل این جدول در هر سطر هیچ c_i تکرار نشده است و همین‌طور در هر ستون.

برای هر دو نفر a_i و b_j ، c_k را از جدول پیداکرده و جلسه $a_i b_j c_k$ را تشکیل می‌دهیم.