جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله دوم
هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۹

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
-	۶	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

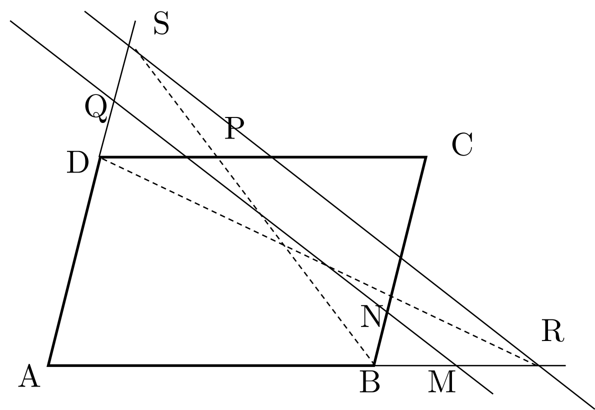
ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۹

۱- متوازی‌الاضلاع ABCD داده‌شده است، خط Δ خطوط AB، BC، CD و DA را به ترتیب در نقاط M، N، P و Q قطع می‌کند. اگر محل برخورد AB و DN را R و محل برخورد AD و BP را S بنامیم، ثابت کنید که

$$RS \parallel \Delta$$



۲- جواب‌های صحیح معادله‌ی سیاله‌ی زیر را به دست آورید.

$$(x^۲ - x)(x^۲ - ۲x + ۲) = y^۲ - ۱$$

۳- الف) ثابت کنید به ازای هر $n \geq ۱$ داریم

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \ldots + \frac{۱}{n^۲} < ۲$$

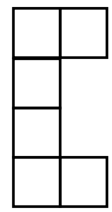
ب) برای مجموعه‌ی $X = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ که در آن $n \geq ۱$، زیرمجموعه‌های ناتهی X را A_k، $(k = ۱, ۲, ۳, \ldots, m)$ می‌نامیم. (بدیهی است که $m = ۲^n - ۱$). اگر حاصل‌ضرب تمام عضوهای مجموعه‌ی A_k را با a_k نشان دهیم ثابت کنید که

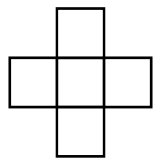
$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m} \frac{۱}{a_i \times j^۲} < ۲n + ۱$$

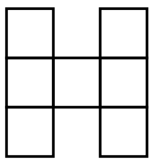
۴- مجموعه مثلث‌های ABC را در نظر می‌گیریم که در دایره‌ای به شعاع R محاط‌اند، در چه صورت $AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$ ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را حساب کنید. همچنین مجموعه‌ی چهاروجهی‌های ABCD را در کره‌ای به شعاع R محاط باشند در نظر می‌گیریم؛ در چه صورت مجموع مربعات ۶ یال آن‌ها ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید در این حالت وجوه باهم برابرند.

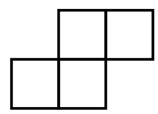
۵- اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^{3} - 5x + 3 = 0$ و $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد، نشان دهید که هرگاه [اگر] $f(\alpha)$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی سوم بالا باشد، آنگاه $f(f(\alpha))$ نیز ریشه‌ی معادله خواهد بود.

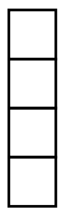
۶- می‌خواهیم زمینی مستطیل به ابعاد 137×5 را با موزاییک‌هایی به اشکال زیر فرش کنیم. نشان دهید این عمل امکان‌پذیر نیست.


شکل


شکل


شکل


شکل ۴


شکل ۵

«در پنج شکل فوق هر یک از مربع‌ها به ضلع واحد است.»

حل مسأله های مرحله‌ی دوم هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۹

۱- مثلث AMQ را با مورب‌های DNR و BPS قطع می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=1,\qquad \frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA}=1$$

و از مساوی قرار دادن آن‌ها نتیجه می‌شود

$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=\frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA} \qquad (1)$$

چون $BN \parallel AQ$ و $DP \parallel AB$، پس

$$\begin{cases}\dfrac{NM}{NQ}=\dfrac{BM}{BA}\\[2mm] \dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{PQ}{PM}\end{cases} \qquad (2)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت $\frac{RA}{RM}=\frac{SA}{SQ}$ یعنی $RS \parallel \Delta$.

۲- بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود $y\geq 0$ می‌گیریم.
حال اگر قرار دهیم $x=X+1$ خواهیم داشت

$$(X^2+X)(X^2+1)=y^2-1$$
$$\Rightarrow\left(X^2+\frac{X}{2}+\frac{X}{2}\right)\left(X^2+\frac{X}{2}+1-\frac{X}{2}\right)=y^2-1$$
$$\Rightarrow\left(X^2+\frac{X}{2}\right)^2=y^2-\left(\frac{3}{4}X^2+X+1\right)$$

با توجه به اینکه $\frac{3}{4}X^2+X+1>0$ پس $X^2+\frac{X}{2}<y \Rightarrow$ و نتیجه می‌گیریم که $y\geq X^2+\frac{X}{2}+\frac{1}{2}>0$ (y عدد صحیح است). بنابراین،

$$y^2\geq X^4+\frac{X^2}{2}+\frac{1}{4}+X^3+X^2+\frac{x}{2}$$
$$y^2+(X^2-2X-3)$$

درنتیجه $X^2-2X-3\leq 0$ پس $-1\leq X\leq 3$ و بنابراین فقط ۳ , ۱- , ۰ =X در معادله‌ی سیاله‌ی فوق صدق می‌کند. پس

x= ۰ ،۱ ،۴

$$y=\pm1,\pm1,\pm11$$

۳- ماخ الف) داریم

$$\frac{۱}{k^{۲}}<\frac{۱}{k(k-۱)} \qquad (k>۱)$$

$$\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^{۲}}<\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k(k-۱)}$$

$$۱+\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^{۲}}<۱+\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k(k-۱)}$$

پس

$$\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^{۲}}<۱+\sum_{k=۲}^{n}\left(\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k}\right)$$

پس

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k^{۲}}<۲-\frac{۱}{n}$$

بنابراین

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k^{۲}}<۲$$

ب) ازآنجاکه $\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i}$ مجموع همه‌ی $۱/\left(\prod_{x\in A_i}x\right)$ هاست، پس همه‌ی کسرهایی به شکل $۱/\left(b_i\times b_۲\times\ldots\times b_k\right)$ که در آن‌ها b_iها اعضای مختلف مجموعه‌ی X هستند، در آن ظاهر می‌شوند. می‌توان این اعداد را این‌گونه شمرد که بگوییم هر $۱\le i\le n$ $۱\le i\le n$ یا ظاهر می‌شود که باعث ضرب شدن هر i، مجموع قبلی را $۱+\frac{۱}{i}$ برابر می‌کند؛ البته با این روش ما حالتی را که هیچ iای در مخرج نباشد یعنی ۱ را نیز می‌شماریم که باید از مجموع کل کم شود. پس داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i}&=\left(۱+\frac{۱}{۱}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\ldots\left(۱+\frac{۱}{n}\right)-۱\\&=\frac{۲}{۱}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times\ldots\times\frac{n+۱}{n}-۱\\&=\frac{n+۱}{n}-۱=n\end{aligned}$$

چون $\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{j^{۲}}<۲$ و $\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{a_i}=n$ پس

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i\times j^{۲}}<۲n+۱$$

۴- اگر P نقطه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی مثلث باشد، آنگاه

$$PA^۲ + PB^۲ + PC^۲ = \frac{AB^۲ + AC^۲ + BC^۲}{۳} + ۳PG^۲$$

که G محل تلاقی میانه‌هاست. حال اگر مرکز دایره را O بگیریم،

$$OA^۲ + OB^۲ + OC^۲ - ۳OG^۲ = \frac{۱}{۳}\ AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$$

بدیهی است که $AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$ وقتی ماکزیمم است که OG=۰ یعنی مرکز دایره بر محل تلاقی میانه‌ها منطبق باشد. پس

$$OA^۲ + OB^۲ + OC^۲ = ۳R^۲ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ + BC^۲ = ۹R^۲$$

همچنین اگر P نقطه‌ای دلخواه در فضا و ABCD یک چهاروجهی دلخواه باشد، آنگاه

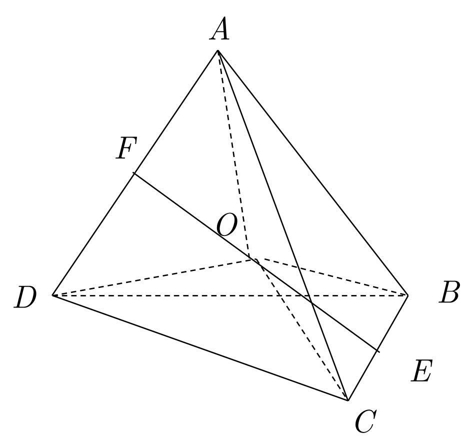
$$PA^۲ + PB^۲ + PC^۲ + PD^۲ =$$
$$۴PG^۲ + \frac{۱}{۴}(AB^۲ + AC^۲ + AD^۲ + BD^۲ + BC^۲ + CD^۲)$$

درنتیجه اگر P مرکز کره اختیار شود،

$$\sum_{X\in\{A,B,C,D\}} OX^۲OG^۲ + \frac{۱}{۴}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^۲$$

یا

$۴R^۲ - ۴OG^۲ = \frac{۱}{۴}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^۲$ وقتی مقدار $\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^۲$ ماکزیمم است که $OG^۲$ مینیمم باشد یعنی G بر O



منطبق باشد. پس باید مرکز ثقل چهاروجهی بر مرکز کره منطبق گردد. در این صورت ماکزیمم $\sum XY^۲$ برابر $۱۶R^۲$ خواهد بود.

E و F را وسط‌های BC و AD می‌گیریم. می‌دانیم که O وسط EF است. چون مثلث‌های BOC و AOD متساوی‌الساقین‌اند پس OE و OF ارتفاع‌های نظیر قاعده‌های آن‌ها هستند نیز برابرند؛ درنتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OEC و OFD برابرند. پس $CE = DF$ یعنی $BC = DA$. پس یال‌های روبه‌رو برابرند و به‌عبارت‌دیگر وجوه باهم برابرند.

۵- معادله‌ی $x^3 - 5x + 3 = 0$ ریشـه‌ی گویا ندارد پس قابل‌تجزیه نیست. درنتیجه، α در هیچ معادله‌ای با ضرایب گویا و درجه‌ی کمتر از ۳ صادق نخواهد بود. حال اگر معادله‌ی

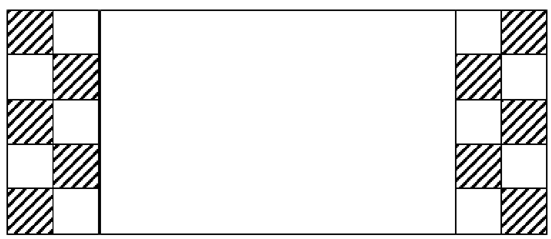
$$f(x)^3 - 5f(x) + 3 = 0$$

را در نظر بگیریم، طبق فرض α ریشه این معادله نیز هست. درنتیجه،

$$f(x)^3 - 5f(x) + 3$$

بر $x^3 - 5x + 3$ بخش‌پذیر است. یعنی تمام ریشه‌های معادله‌ی $x^3 - 5x + 3 = 0$ ریشه‌های معادله‌ی $f(x)^3 - 5f(x) + 3 = 0$ نیز خواهد بود. پس $f(\alpha)$ نیز ریشه‌ی معادله‌ی اخیر است یعنی $f(f(\alpha))^3 - 5f(f(\alpha)) + 3 = 0$. درنتیجه $f(f(\alpha))$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 - 5x + 3 = 0$ خواهد بود.

۶- فـرض مـی‌کـنـیـم که مستطیل موردنظر با شکل‌های ۱ تا ۵ پوشانده شده باشد. خانه‌های مستطیل را یک‌درمیان سیاه‌وسفید می‌کنیم.



ازآنجاکه تعداد مربع‌ها فرد است پس تفاضل سیاه‌ها با سفیدها برابر ۱ خواهد بود. شکل‌های ۱، ۴ و ۵ دارای رنگ‌های سیاه‌وسفید مساوی هستند. در مورد شکل ۲، یا چهار سفید و یک سیاه داریم یا برعکس، در مورد شکل ۳، یا پنج سیاه و دو سفید داریم یا برعکس. حال فرض کنیم که

$x_1 =$ تعداد شکل ۲ با چهارخانه‌ی سفید و یک‌خانه‌ی سیاه

$x_2 =$ تعداد شکل ۲ با چهارخانه‌ی سیاه و یک‌خانه‌ی سفید

$x_3 =$ تعداد شکل ۳ با پنج‌خانه‌ی سفید و دوخانه‌ی سیاه

$x_4 =$ تعداد شکل ۳ با پنج‌خانه‌ی سیاه و دوخانه‌ی سفید

با توجه به اینکه

۱ = تعداد مربع‌های سفید − تعداد مربع‌های سیاه

و اینکه شکل‌های ۱، ۴ و ۵ در طرف دوم حذف می‌شوند، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} 1 &= (4x_2 + x_1 + (2x_3 + 5x_4) - (4x_1 + x_2) - (5x_3 + 2x_4) \\ &= -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه طرف دوم بر ۳ بخش‌پذیر است، به تناقض رسیده‌ایم.