جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله دوم
هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۸

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
-	۶	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۸

۱- الف) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n، نامساوی زیر برقرار است.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ب) یک عدد طبیعی n پیدا کنید به‌طوری‌که

$$\left\lfloor 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\rfloor=12$$

($\lfloor x\rfloor$ نمایش جزء صحیح عدد حقیقی x است.)

۲- کره‌ی S به مرکز O و شعاع R، و نقطه‌ی ثابت P روی آن داده‌شده است. سه‌نقطه‌ی A، B و C روی کره به‌گونه‌ای حرکت می‌کنند که کنج $P\text{-}ABC$ همواره کنج سه قائمه است. ثابت کنید صفحه‌ی مثلث ABC از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۳- اگر $\{a_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله باشد که $a_1=1$ و $a_2=2$ $(n\geq 2)$ ، $a_{n+1}=1+a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}+(a_1a_2a_3\ldots a_{n-1})^2$
ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=2$$

۴- در یک مسابقه‌ی ورزشی m تیم شرکت کرده‌اند. می‌دانیم هر دو تیم یک‌بار باهم مسابقه داده‌اند و نتیجه‌ی هر مسابقه برد یک تیم و باخت تیم دیگر بوده است (یعنی نتیجه مساوی نبوده است). ثابت کنید نتایج هر چه باشد یک تیم ورزشی مانند x وجود دارد به‌طوری‌که برای هر تیم مانند y، یا x از y برده است و یا اینکه یک تیم z وجود دارد که x از z برده و z از y برده است.

۵- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n>1$، معادله‌ی زیر دارای جواب صحیح نیست.

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1}+1=0$$

۶- خط D را نسبت به مثلث ABC وفادار گوییم هرگاه در صفحه‌ی آن مثلث بوده و قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع مثلث مزبور، همرس باشند.
ثابت کنید برای هر دو مثلث واقع در یک صفحه که کلیه‌ی زاویه‌های آن‌ها حاده باشند، یا تنها یک خط وفادار نسبت به آن دو وجود دارد و یا به تعداد نامتناهی.

حل مسأله های مرحله‌ی دوم هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۸

۱- الف)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

چون $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

ب) لم.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

حال ثابت می‌کنیم اگر $N=\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{48}}$ ، آنگاه $\lfloor N\rfloor=12$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N&=\frac{1}{2\sqrt{48}}+\frac{1}{2\sqrt{47}}+\ldots+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\\&>\sqrt{49}-\sqrt{48}+\sqrt{48}-\sqrt{47}+\ldots+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1\\&=\sqrt{49}-1\\&=6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N&=\frac{1}{2\sqrt{48}}+\frac{1}{2\sqrt{47}}+\ldots+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\\&<\sqrt{48}-\sqrt{47}+\sqrt{47}-\sqrt{46}+\ldots+\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}\\&<\sqrt{48}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}N>6\Rightarrow N>12\\ \frac{1}{2}<\sqrt{48}-\frac{1}{2}\Rightarrow N<13\end{array}\right\}\Rightarrow\lfloor N\rfloor=12$$

۲- ادعا می‌کنیم مرکز میانه‌ای مثلث نقطه‌ی ثابتی است که روی OP قرار دارد و $PM=\frac{2}{3}PO$. می‌گیریم .
$\vec{r}=\overrightarrow{PO},\vec{z}=\overrightarrow{PZ},\vec{y}=\overrightarrow{PY},\vec{x}=\overrightarrow{PX}$ به‌وضوح

$$\overrightarrow{PM}=\frac{\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}}{3}$$

کافی است ثابت کنیم $\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\vec{r}$. برای این کار ثابت می‌کنیم بردار

$$\vec{a} = 3(\overrightarrow{PM} - \frac{2}{3}\vec{r}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} - 2\vec{r}$$

مساوی صفر است. حاصل‌ضرب این بردار در بردار $\vec{x}$ صفر است زیرا

$$\begin{aligned}
\vec{a}\vec{x} &= (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} - 2\vec{r})\vec{x} \\
&= \vec{x}.\vec{x} + \vec{y}.\vec{x} + \vec{z}.\vec{x} - 2\vec{r}.\vec{x} \\
&= \vec{x}.\vec{x} - 2\vec{r}.\vec{x} \\
&= \left|\vec{x}\right|^2 - 2\left|r\right|.\left|x\right|.\cos\angle OPX \\
&= PX^2 - 2PX.PO.\cos\angle OPX
\end{aligned}$$

اما مثلث OPX متساوی‌الساقین به رأس O است پس $PX = 2PO.\cos\angle OPX$ که ازاینجا برابر صفر بودن $\vec{a}.\vec{x}$ معلوم می‌شود. به همین ترتیب $\vec{a}.\vec{x} = \vec{a}.\vec{z} = 0$ حال که حاصل‌ضرب $\vec{a}$ در سه بردار متعامد صفر است، این بردار خود برابر صفر است که درستی حکم را نتیجه می‌دهد.

۳- ماخ ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم

$$a_n = 1 + \prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

واضح است که $a_2 = 1 + a_1$ حال فرض می‌کنیم $a_n = 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1}$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1} + \ a_1 a_2 \dots a_{n-1}{}^{2} \\
&= 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1} + \ a_1 a_2 \dots a_{n-1}{}^{2} \\
&= 1 + a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n
\end{aligned}$$

درنتیجه، $a_{n+1} = 1 + \ a_n - 1 \ a_n$ یا $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.

حالا به استقرا ثابت می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 2 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

واضح است که $\frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{a_2 - 1}$. فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 2 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{n+1}} \\
&= 2 - \frac{1}{a_{n+1}^2 - a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_{n+2} - 1} \\
&= 2 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}}
\end{aligned}$$

چون دنباله‌ی $S_i = \sum_{j=1}^{j} a_j$ صعودی است و ۲ کران بالای آن است، پس حد دارد.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = k \leq 2$$

اگر $k < 2$ باشد، ازآنجاکه $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ پس $\exists n, a_n > 1 + \frac{1}{2-k}$.

$$a_n > 1 + \frac{1}{2-k} \Rightarrow a_n - 1 > \frac{1}{2-k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n - 1} < 2 - k$$

$$\Rightarrow k < 2 - \frac{1}{a_n - 1} = S_{n-1}$$

که تناقض است. پس $k = 2$.

۴- فرض کنیم x تیمی باشد که بیشترین تعداد «بُرد» را داشته است. ثابت می‌کنیم برای هر تیم y، یا x از y برده است، یا تیم z وجود دارد که x از z برده است و z از y. اگر x این‌طور نباشد، یک تیم y وجود دارد که اولاً x از y نبرده است و ثانیاً برای هر تیم z که به x باخته است، y از z برده است. پس y کلیه‌ی تیم‌هایی را که x از آن‌ها برده است، برده و خود x را نیز برده و درنتیجه، تعداد بردهای y از x بیشتر است که تناقض است.

۵- ابتدا ثابت می‌کنیم حداکثر توان عدد اول $p \geq 2$ در $k!$ برابر $k-1$ است.

$$k! \text{ توان } p \text{ در } = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

$$< \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + \frac{k}{p^3} + \dots = \frac{k}{p-1} \leq k$$

پس توان p در $k!$ حداکثر $k-1$ است.

حالا اگر $\frac{x^n}{n!} + \dots + \frac{x^n}{1!} + 1 = 0$

$$x^n + \frac{n!}{n-1\,!} x^{n-1} + \dots + \frac{n!}{2!} x^2 + \frac{n!}{1!} + n! = 0$$

اگر $x_\circ$ جواب معادله باشد و $p \mid x_\circ$، آنگاه توان p در $\frac{n!}{i!} x^i$ از توان p در $n!$ حداقل یکی بیشتر است یعنی در $\frac{x^i}{i!}$ حداقل یک عامل p وجود دارد. پس در هر یک از x^n ، $\frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1}, \dots$ و $\frac{n!}{1!} x$ حداقل توان p برابر توان p در $n!$ به‌اضافه‌ی یک است.

یعنی اگر $p^t \mid n!$ ، هریک از جملات دیگر بر p^{t+1} بخش‌پذیر است. پس مجموع آن‌ها نیز بر p^{t+1} بخش‌پذیر است. ولی $n!$ بر p^{t+1} بخش‌پذیر نیست. تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض اولیه ما اشتباه بوده است.

۶- آشکار است که هر ارتفاع خطی وفادار است. حال اگر d یک خط وفادار باشد، d_1، d_2 و d_3 قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع باشند، P نقطه‌ی تقاطع d_1، d_2 و d_3 قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع باشند، P نقطه‌ی تقاطع d_1، d_2 و d_3 باشد و M، N و O پاهای عمود از P به سه ضلع مثلث باشند آشکار است که قرینه‌های P نسبت به سه ضلع روی خط d قرار می‌گیرند پس M، N و O روی خطی موازی خط D قرار می‌گیرند.

درنتیجه طبق قضیه‌ی سِمسون، P روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. از طرفی طبق خاصیت خط سِمسون، مجانس خط ONM به مرکز P و نسبت تجانس ۲، از محل تلاقی ارتفاعات می‌گذرد. پس خط وفادار باید از محل تلاقی ارتفاعات مثلث بگذرد خطی است وفادار. حال اگر محل تلاقی ارتفاعات دو مثلث یکسان باشد، هر خط که از این نقطه بگذرد برای هر دو مثلث وفادار است و درنتیجه تعداد آن‌ها نامتناهی است. و اگر محل تلاقی ارتفاع‌های دو مثلث دونقطه متمایز باشند، فقط خطی که از این دونقطه می‌گذرد، می‌تواند برای هر دو وفادار باشد.