جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله دوم
ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، فروردین‌ماه ۱۳۶۸

۱- الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی،

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1) = \frac{n(n+1)\dots(n+m)}{m+1}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} P(k)}{n^{m+1}}$$

دارای حد است.

۲- اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایره‌ی محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I، J و O بر یک استقامت‌اند.

۳- ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشا مانند f از $\mathbb{N}$ (مجموعه‌ی اعداد طبیعی) به $\mathbb{N}$ است که در شرط

$$f(f(n)+f(m)) = n+m \qquad (n,m \in \mathbb{N})$$

صدق می‌کند.

۴- دنباله‌ی $\{a_n\}$ چنین تعریف‌شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=1 \quad \text{اگر} \\ \left(\frac{2n-3}{2n}\right)a_{n-1} & n \geq 2 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$، $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1, n \geq 1$.

۵- اگر در چهاروجهی $ABCD$ ارتفاع‌های وارد از هر رأس بر وجه مقابل را با h_a، h_b، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

۶- تعداد 1369^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروض‌اند که با کنار گذاشتن هر یک از این اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دسته‌ی مساو (ازنظر تعداد) تقسیم کرد که حاصل‌ضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساوی‌اند.

حل مسأله های مرحله‌ی دوم ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، فروردین‌ماه ۱۳۶۸

۱- الف) داریم

$$\begin{aligned} &k(k+1)\ldots(k+m-1)\\ &= k(k+1)\ldots(k+m-1)\times\frac{k+m-k+1}{m+1}\\ &=\frac{1}{m+1}\left(k(k+1)\ldots(k+m)-(k-1)k\ldots(k+m-1)\right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)=\frac{1}{m+1}\left(n(n+1)\ldots(n+m)-0\right)=\frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{m+1}$$

ب) ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگ‌ترین توان n در $\sum_{k=1}^{n}P(k)$ برابر $m+1$ است. اثبات با استقرا به m است. واضح است که هر چندجمله‌ای از درجه‌ی m را می‌توان به‌صورت

$$ax(x+1)\ldots(x+m-1)+P_{m-1}(x)$$

نوشت که در آن a عددی است ثابت و P_{m-1} چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر ۱- m است.

حال اگر $m=1$، آنگاه $P(x)$ به‌صورت $ax+b$ $(a\neq 0)$ است و درنتیجه،

$$P(1)+P(2)+\ldots+P(n)=a(1+2+\ldots+n)+nb=a\frac{n(n+1)}{2}+nb$$

واضح است که درجه‌ی آن نسبت به n، $m+1=2$ است و درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}P(k)}{n^2}=\frac{a}{2}$$

اگر حکم فوق در مورد چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی کمتر از m برقرار باشد آنگاه

$$P_m(x)=ax(x+1)\ldots(x+m-1)+P_{m-1}(x)$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n}P(k)=a\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\ldots(k+m-1)+\sum_{k=1}^{n}P_{m-1}(k)$$

جمله‌ی دوم بنابر فرض استقرا از درجه‌ی حداکثر m است و جمله‌ی اول بنابر (الف) برابر

$$\frac{a}{m+1}n(n+1)\ldots(n+m-1)\quad \frac{a}{m+1}n(n+1)\ldots(n+m-1)$$

است که توان n در آن $m+1$ است و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=۱}^{n} P(k)}{n^{m+۱}} = \frac{a}{m+۱}$$

موجود است.

۲- مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به S و مساحت هر مثلث مانند IAB را به‌صورت S_{IAB} نمایش می‌دهیم. واضح است که

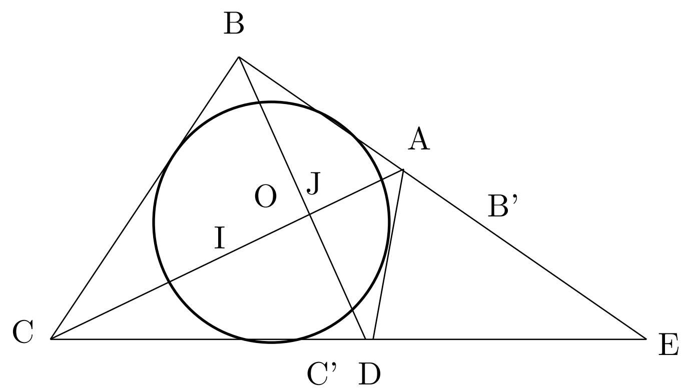
$$S_{IDC} + S_{IBA} = \frac{۱}{۲} S \quad (۱)$$

$$S_{JDC} + S_{JBA} = \frac{۱}{۲} S \quad (۲)$$

$$S_{ODC} + S_{OBA} = \frac{۱}{۲} S \quad (۳)$$

می‌دانیم که در چهارضلعی محیطی $ABCD$،

$$AB + DC = AD + BC$$



AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند. آنگاه روی خط AB نقطه‌ی B' و روی خط CD نقطه‌ی C' را طوری انتخاب می‌کنیم که $EB' = AB$ و $EC' = DC$ باشد داریم

$$S_{IEC'} + S_{IEB'} = \frac{۱}{۲} S$$

و

$$S_{IC'EB'} = S_{IC'B'} + S_{EC'B'}$$

درنتیجه،

$$S_{IC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \quad (۴)$$

اگر نظیر عملیات فوق را نسبت به J و O انجام دهیم تساوی‌های زیر به دست می‌آیند.

$$S_{JC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \quad (۵)$$

و

$$S_{OC'B'} = \frac{۱}{۲}S - S_{EC'B'} \qquad (۶)$$

از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

$$S_{IC'B'} = S_{JC'B'} = S_{OC'B'} \qquad (۷)$$

ازاین‌رو سه‌نقطه‌ی J، O و I بر یک استقامت‌اند.

۳- ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq ۲$ باشد، آنگاه $f(n) \geq ۲$. اگر $n \geq ۲$، آنگاه $n = (n-۱)+۱$، چون $۱, N-۱ \in$ و f پوشاست پس اعدادی طبیعی مانند α و β وجود دارند که $f(\alpha) = n-۱$ و $f(\beta) = ۱$ بنابراین،

$$f(n) + f(n-۱+۱) = f(f(\alpha)+f(\beta)) = \alpha + \beta$$

واضح است که $\alpha + \beta \geq ۲$. پس $f(۱) = ۱$. حال به استقرا، بدیهی است که $f(n) = n$.

۴- ز رابطه‌ی

$$a_n = \left(\frac{۲n-۳}{۲n}\right)a_{n-۱}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$۲ka_k = (۲k-۳)a_{k-۱} \;, \qquad (k \geq ۲)$$

ازاین‌رو داریم

$$a_{k-۱} = (۲k-۲)a_{k-۱} - ۲ka_k$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n} a_k &= \sum_{k=۲}^{n+۱} a_{k-۱} \\ &= \sum_{k=۲}^{n+۱}((۲k-۲)a_{k-۱} - ۲ka_k) \\ &= ۲a_۱ - ۲(n+۱)a_{n+۱}\end{aligned}$$

به استقرا روشن است که به ازای هر n، $a_n > ۰$. پس

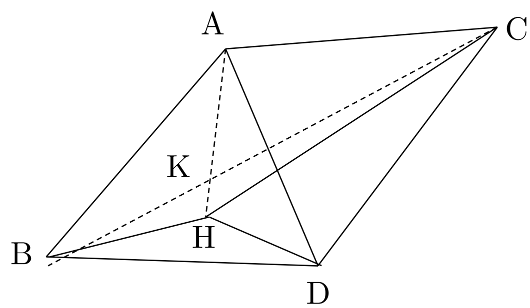
$$\sum_{k=۱}^{n} a_k < ۲a_۱ = ۱$$

۵- در چهاروجهی $ABCD$ مساحت هر یک از وجه‌ها را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم

$$S_{ABC} = S_d, \quad S_{ABD} = S_c, \quad S_{ACD} = S_b, \quad S_{BCD} = S_a$$

حال اگر حجم هرم را با V نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۳}S_a h_a = \frac{۱}{۳}S_b h_b = \frac{۱}{۳}S_c h_c = \frac{۱}{۳}S_d h_d = V$$



ازاین‌رو داریم

$$S_d = \frac{۳V}{h_d},\quad S_c = \frac{۳V}{h_c},\quad S_b = \frac{۳V}{h_b},\quad S_a = \frac{۳V}{h_a}.$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

برای اثبات از A ارتفاع AH را بر وجه BCD رسم می‌کنیم، H را به رئوس B، C و D وصل کرده و از H عمود HK را بر یال BC رسم می‌کنیم. از K به A وصل می‌کنیم. AK بر BC عمود است زیرا $AH \perp BCD$ ، پس $AH \perp BC$ و $AK \perp BC$ پس $AHK \perp BC$. به‌بیان‌دیگر، در صفحه‌ی AHK دو خط AH و HK بر BC عمودند پس BC بر صفحه‌ی AHK عمود است و درنتیجه بر کلیه‌ی خطوط آن و به‌خصوص بر AK عمود است. از طرفی داریم

$$S_{ABC} = S_d = \frac{AK.BC}{۲}$$

$$S_{HBC} = \frac{KH.BC}{۲}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه AHK، AK وتر است، پس $AK>KH$ و درنتیجه $S_d > S_{HBC}$. به دلیلی مشابه ثابت می‌شود که $S_c > S_{HBD}$ و $S_b > S_{HCD}$. از جمع این سه نامساوی داریم

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

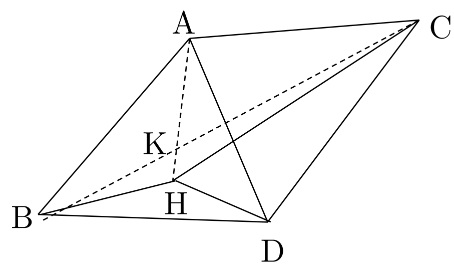
$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

این حالتی بود که H در داخل مثلث BCD باشد. در حالتی که H خارج مثلث BCD باشد، فرض می‌کنیم H در طرف BC باشد و L را محل تقاطع BC و HD می‌گیریم.
خواهیم داشت

$$S_b > S_{HCD} > S_{LCD}$$
$$S_c > S_{HBD} > S_{LBD}$$



پس

$$S_b + S_d > S_{LCD} + S_{LBC}$$

و ازاین‌رو داریم

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی،

$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

پس حکم برقرار است.

۶- بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود تمام اعداد را می‌توان طبیعی در نظر گرفت (کافی است تمام اعداد را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب کنیم). آشکار است که هر یک از اعداد را که برداریم، بقیه‌ی اعداد را می‌توان به دودسته‌ی مساوی تقسیم کرد که حاصل‌ضرب هر دودسته یکسان گردد.
تمام اعداد اولی که در تجزیه این اعداد به‌کاررفته است به $p_k,\dots,p_1,p_2$ نشان می‌دهیم. با ضرب تمام اعداد در $p_1p_2\dots p_k$ می‌توان فرض کرد که در تجزیه‌ی تمام اعداد، اعداد اول یکسان به‌کاررفته است. حال کافی است نشان دهیم که توان هر یک از این اعداد اول در هر یک از این اعداد یکسان است. اگر توان‌های عدد اول p_1 را به ترتیب با $\alpha_m,\dots,\alpha_2,\alpha_1$ نشان دهیم که $m = ۱۳۶۹^n$ است که $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$ و برای p_i ها نیز چنین است. حال توجه می‌کنیم که اگر هر α_i را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب و یا با یک عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می‌ماند.
آشکار است که همه α_iها باهم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می‌گذاشتیم مجموع بقیه بر ۲ بخش‌پذیر می‌شد. حال فرض کنیم که α_k کوچک‌ترین این اعدا باشد پس اعداد $\alpha_n-\alpha_k,\dots,\alpha_2-\alpha_k,\alpha_1-\alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_iها هستند.
حال فرض می‌کنیم که $\alpha_i - \alpha_k = ۲^{mi}\gamma_i$ که γ_iها فرد هستند آنگاه همه‌ی $\alpha_i - \alpha_k$ها را به ۲^p تقسیم می‌کنیم (p

کوچک‌ترین m_i هاست). بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_۱ - \alpha_k}{۲^p}, \dots, \frac{\alpha_n - \alpha_k}{۲^p}$ یک عددِ فرد و یک عدد زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیرممکن است مگر اینکه به ازای هر i، $\alpha_i = \alpha_k$.