به نام خدا

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۴۰۲

---

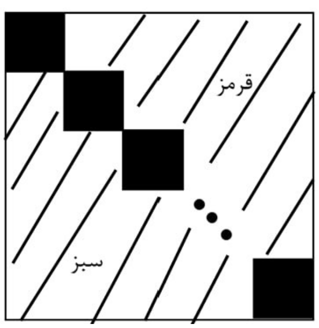
۱) در مثلث ABC می دانیم، $\angle A = 90^\circ$. Pنقطه ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می‌نامیم. PD، خطوط AC, AB را به ترتیب در F, E قطع می‌کند. همچنین دایره های APE و APF به ترتیب BP را در X و CP را در Y قطع می‌کنند. ثابت کنید CX, BY, PD همرس هستند.

۲) ثابت کنید به ازای هر $2 \le n \in \mathbb{N}$، یک n-تایی مرتب $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یک‌دیگر اول وجود دارد که همگی از ۱۴۰۲ بزرگ‌تر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$[\frac{a_1}{a_2}] + [\frac{a_2}{a_3}] + \cdots + [\frac{a_n}{a_1}] = [\frac{a_2}{a_1}] + [\frac{a_3}{a_2}] + \cdots + [\frac{a_1}{a_n}]$$

(منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که کوچک‌تر یا مساوی x باشد)

۳) یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \le i, j \le n$، خانه‌ی سطر i-ام و ستون j-ام را با قاعده‌ی زیر رنگ می‌کنیم:



۱. اگر $i = j$، سیاه
۲. اگر $i < j$، قرمز
۳. اگر $j < i$، سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n-تایی مرتب $(a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n})$ را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n-تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n-تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

۴) عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \cdots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

۵) یک دنباله $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هر گاه برای هر n، $P_{n+1} = P_n + Q$.

فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله‌ی اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه‌ی مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه‌ی صحیح دارد. ثابت کنید

آ- $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

۶) دو دایره W_1, W_2 با شعاع های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره های W_2 و W_1 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که $\angle BPQ = \angle BYQ$ و $\angle CPQ = \angle CXQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث های XPC و YPB را S می نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS همرس هستند.