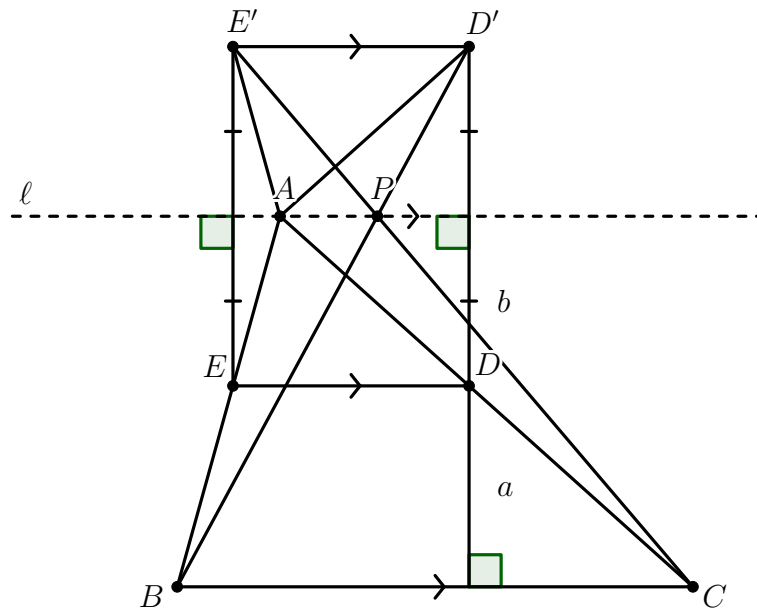


۱. مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه‌ای که $DE \parallel BC$. حال خطی به نام ℓ از A و موازی با BC رسم می‌کنیم و قرینه D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می‌نامیم. ثابت کنید $D'B$ ، $E'C$ و ℓ هم‌رسند.

راه حل اول.

فاصله نقطه D از BC و ℓ را به ترتیب a و b در نظر می‌گیریم. فرض کنید X نقطه‌ای دلخواه بین خطوط BC و $D'E'$ باشد. اگر X روی ℓ قرار داشته باشد آنگاه نسبت فاصله‌اش از BC و $D'E'$ برابر است با $\frac{a+b}{b}$. برای نقاط بالاتر از ℓ این نسبت بیش‌تر و برای نقاط پایین‌تر از ℓ این نسبت کم‌تر است.



حال اگر محل برخورد خطوط $D'B$ و $E'C$ را P بنامیم آنگاه طبق قضیه تالس نسبت فاصله‌ی P از خطوط BC و $D'E'$ برابر است با

$$\frac{BC}{D'E'} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{a+b}{b}.$$

طبق استدلالی که در ابتدای اثبات انجام دادیم P باید روی ℓ باشد و حکم ثابت می‌شود.

راه حل سوم.

لم. در چهارضلعی $XYZT$ می توان نوشت

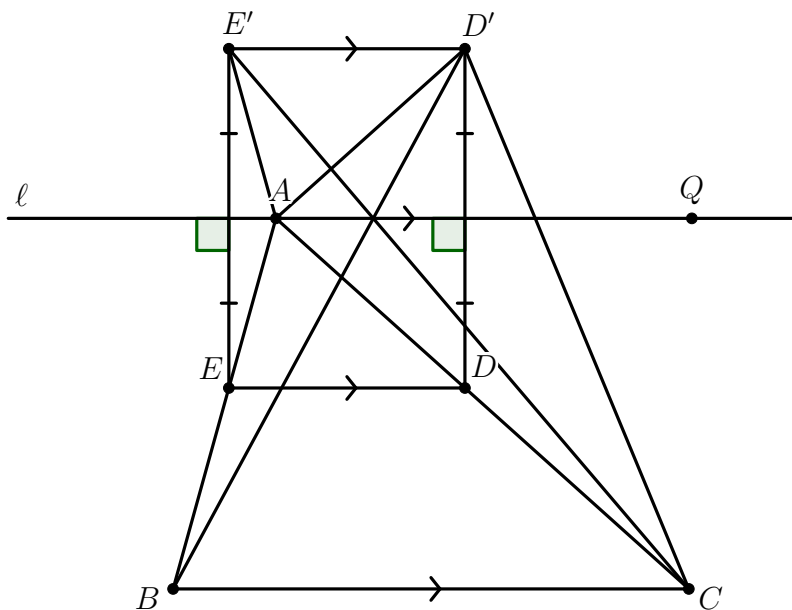
$$\frac{\sin \angle YXZ}{\sin \angle TXZ} = \frac{YZ}{TZ} \cdot \frac{\sin \angle XYZ}{\sin \angle XTZ}$$

برهان. دقت کنید که از قضیه سینوس ها در مثلث های XYZ و XTZ به دست می آید

$$\frac{YZ \sin \angle XYZ}{TZ \sin \angle XTZ} = \frac{XZ \sin \angle YXZ}{XZ \sin \angle TXZ} = \frac{\sin \angle YXZ}{\sin \angle TXZ}$$

□

که همان رابطه داده شده است.



فرض کنید Q نقطه ای دلخواه روی خط l باشد. طبق قضیه سوا سینوسی در مثلث $CD'A$ برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم

$$1 = \frac{\sin \angle D'AQ}{\sin \angle QAC} \cdot \frac{\sin \angle ACE'}{\sin \angle E'CD'} \cdot \frac{\sin \angle CD'B}{\sin \angle BD'A}$$

طبق فرض های سوال واضح است که $\angle D'AQ = \angle QAC$. پس باید نشان دهیم

$$\frac{\sin \angle ACE'}{\sin \angle E'CD'} = \frac{\sin \angle BD'A}{\sin \angle CD'B} \quad (1)$$

حال طبق لم می توانیم این دو نسبت را محاسبه کنیم:

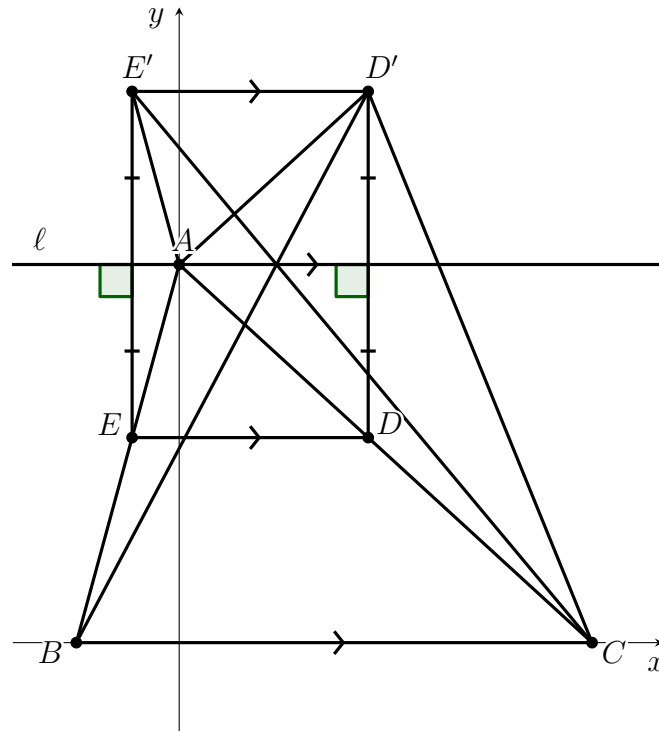
$$\frac{\sin \angle ACE'}{\sin \angle E'CD'} = \frac{AE'}{E'D'} \cdot \frac{\sin \angle E'AC}{\sin \angle E'D'C} \quad , \quad \frac{\sin \angle BD'A}{\sin \angle CD'B} = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{\sin \angle BAD'}{\sin \angle BCD'}$$

توجه کنید که دو مثلث ABC و $AE'D'$ با یکدیگر متشابه اند (زیرا AED و $AE'D'$ همنهشت هستند) پس $\frac{AE'}{E'D'} = \frac{AB}{CB}$ و $\angle E'AC = \angle D'AB$. همچنین طبق توازی $E'D'$ و BC داریم $\angle E'D'C + \angle E'AC = \angle D'AB + \angle BCD'$

سوالات و راه حل‌های مرحله دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۴۰۱

$\angle BCD' = 18^\circ$ پس سینوس این دو زاویه نیز برابر است. این نتایج تساوی (۱) را نتیجه می‌دهند و حکم ثابت می‌شود.

راه حل چهارم.



محور مختصات را به گونه ای در نظر می گیریم که رأس A روی محور y ها و رئوس B و C روی محور x ها باشند. پس می توانیم مختصات آن ها را به ترتیب به شکل $(0, a)$ ، $(b, 0)$ و $(c, 0)$ نمایش دهیم. فرض کنید عرض نقاط D و E ، p باشد. به وضوح معادله خط AC برابر است با $y = -\frac{a}{c}x + a$ پس طول نقطه D برابر است $\frac{c(a-p)}{a}$. از آنجا که نقطه D' قرینه D نسبت به خط $y = a$ است مختصات آن برابر است با $(\frac{c(a-p)}{a}, 2a - p)$. حال مختصات محل تقاطع خطوط BD' و l را پیدا می کنیم. شیب خط BD' برابر است با

$$\frac{2a - p}{\frac{c(a-p)}{a} - b} = \frac{a(2a - p)}{c(a - p) - ab} \implies y = \frac{a(2a - p)}{c(a - p) - ab}x - \frac{ab(2a - p)}{c(a - p) - ab} : BD'$$

اگر قرار دهیم $y = a$ به دست می آید

$$\frac{a(2a - p)}{c(a - p) - ab}x = a + \frac{ab(2a - p)}{c(a - p) - ab} = \frac{a(b + c)(a - p)}{c(a - p) - ab} \implies x = \frac{(b + c)(a - p)}{2a - p}$$

پس مختصات نقطه تقاطع BD' و l نسبت به b و c متقارن است و طبق تقارن خط CE' نیز از همان نقطه می گذرد که حکم را نتیجه می دهد.

۲. همه تابع های $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y ,

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y) \quad (۱)$$

راه حل اول.

نشان می دهیم تنها جواب مسئله $f(x) = x$ است. در تمام راه حل منظور از "قرار دادن" جایگزینی x و y با مقادیر گفته شده در تساوی (۱) است.

مرحله اول. یافتن مقدار $f(0)$.

قرار دهید $x = 0$ و $y = -f(0)$ در این صورت به دست می آوریم $f(-f(0)) = 0$. پس عدد حقیقی c وجود دارد که $f(c) = 0$. با قرار دادن $x = c$, $y = c$ نتیجه می گیریم $c^2 = 0$. بنابراین $f(0) = 0$ و صفر تنها عدد با این خاصیت است.

مرحله دوم. نشان دادن $f(y)^2 = y^2$

با قرار دادن $y = 0$ به دست می آید $f(f(x)) = f(x)$. با استفاده از این تساوی و قرار دادن $x = -\frac{y}{f(y)}$ به دست می آید (اگر $y \neq 0$ این کار مجاز است زیرا $f(y) \neq 0$)

$$f\left(-\frac{y}{f(y)}\right) = -\frac{y^2}{f(y)} + f\left(-\frac{y}{f(y)}\right) + f(y)$$

که بعد از ساده کردن نتیجه می دهد $f(y)^2 = y^2$.

مرحله سوم. نشان دادن $f(x) = x$

در قسمت قبل دیدیم که برای هر x , $f(x) = x$ یا $f(x) = -x$. با جای گذاری به راحتی می توان دید که اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) = x$ در تساوی (۱) صدق می کند ولی در صورتی که برای هر $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ در تساوی مسئله صدق نمی کند. تنها حالتی باقی می ماند که برای برخی x ها $f(x) = x$ و برای برخی $f(x) = -x$ باشد. فرض کنید برای $a, b \neq 0$ داشته باشیم $f(a) = a$ و $f(b) = -b$. با قرار دادن $x = a$ و $y = b$ به دست می آید $f(-ab + a + b) = ab + a - b$. حال دو حالت داریم. حالت اول این است که

$$-(-ab + a + b) = ab + a - b \implies a = 0$$

که با فرض $a \neq 0$ در تناقض است. در حالت دوم داریم

$$ab + a + b = -ab + a - b \implies a = -1$$

پس به ازای هر $x \neq -1$ داریم $f(x) = -x$ که با جای گذاری در تساوی (۱) می توان دید صدق نمی کند.

راه حل دوم.

در این راه حل مرحله اول مانند راه حل قبل است و به همین دلیل تنها به بیان مراحل بعدی می پردازیم.

مرحله دوم. پیدا کردن f روی برد

توجه کنید با قرار دادن $y = 0$ به دست می آوریم $f(f(x)) = f(x)$. پس f روی برد خود همانی است و اگر نشان دهیم f پوشا است آنگاه نتیجه می شود f روی کل دامنه همانی است.

مرحله سوم. اثبات همانی بودن تابع

فرض کنید جوابی غیر از تابع همانی داشته باشیم یعنی عدد c یافت شود که $f(c) \neq c$. در این صورت با قرار دادن $x = -1$ و $y = c + f(x) + xf(c)$ به دست می آید

$$f(A) = -c - f(x) - xf(c) + f(-1) + f(c + f(x) + xf(c)) \quad (2)$$

که $A = -f(c + f(x) + xf(c)) + f(-1) + c + f(x) + xf(c)$. بعد از توجه به اینکه

$$f(c + f(x) + xf(c)) = cx + f(c) + f(x)$$

و جای گذاری در (۲) نتیجه می شود

$$f(A) = x(c - f(c)) - c + f(c) + f(-1)$$

حال توجه کنید که با تغییر x طرف راست عبارت بالا تمام اعداد حقیقی را تولید می کند بنابراین f پوشاست. پس f روی کل دامنه همانی است که در تناقض با وجود c است. در نتیجه تنها جواب مسئله تابع همانی است.

۳. خانه های یک جدول $n \times n$ به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده اند. به ازای چه n هایی می توان خانه های جدول را با اعداد ۱، ۲، ...، n به گونه ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد:

- در هر سطر تمامی اعداد ۱، ۲، ...، n آمده باشند و مجموع اعداد خانه های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه های سفیدش برابر باشد.

- در هر ستون تمامی اعداد ۱، ۲، ...، n آمده باشند و مجموع اعداد خانه های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه های سفیدش برابر باشد.

راه حل.

ادعا می کنیم فقط برای اعداد n که مضرب چهار هستند چنین جدولی وجود دارد. خانه تقاطع سطر i ام و ستون j ام جدول را با A_{ij} نمایش می دهیم که $1 \leq i, j \leq n$. طبق فرض سوال جمع خانه های هر سطر و هر ستون برابر با $1 + 2 + \dots + n$ است که باید عددی زوج باشد. پس باید داشته باشیم $4 \mid n(n+1)$ که این نتیجه می دهد یا $4 \mid n+1$ یا $4 \mid n$.

اگر $4 \mid n$ جدول را به این صورت می سازیم که ابتدا جایگشت a_1, \dots, a_n از $1, 2, \dots, n$ را در نظر می گیریم که جایگاه های زوج با اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقی مانده ۰ و ۱ دارند و جایگاه های فرد با اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقی مانده ۲ و ۳ دارند پر شده باشد. سپس برای ساختن جدول عدد A_{ij} را برابر a_k می گیریم که $k \equiv i + j - 1 \pmod{n}$ می توان به سادگی چک کرد که هر ستون این جدول نیز یک جایگشت است و به علاوه شرط برابری جمع اعداد خانه های سفید و سیاه در هر سطر و ستون برقرار است. حال اگر $4 \mid n+1$ ، زیرمجموعه ای از خانه های جدول متشکل از A_{ij} هایی را بگیریم که i فرد و j زوج است. طبق فرض سوال جمع خانه های هر سطر و هر ستون از این زیرجدول برابر $\frac{1+2+\dots+n}{4}$ است. اما چون تعداد سطرها و خانه های این زیرجدول برابر نیستند جمع کل خانه های آن از دو محاسبه مختلف بر حسب سطرها و ستون ها به دو جواب مختلف می رسد که تناقض است. به طور دقیق تر

$$\sum_{\text{زوج } j} \sum_{\text{فرد } i} A_{ij} = \sum_{\text{فرد } i} \left(\sum_{\text{زوج } j} A_{ij} \right) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1+2+\dots+n}{2},$$

$$\sum_{\text{زوج } j} \sum_{\text{فرد } i} A_{ij} = \sum_{\text{زوج } j} \left(\sum_{\text{فرد } i} A_{ij} \right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1+2+\dots+n}{2}.$$

پس برای چنین اعداد n هم جدول وجود ندارد (در واقع این استدلال وجود جدولی با خواص مساله برای n های فرد را رد می کند) و تنها برای n های مضرب ۴ وجود چنین جدولی ممکن است که برای آن مثالی ارائه کردیم.

۴. در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه‌ها سیاه شده‌اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق‌های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همه خانه‌های جدول خود هستند.

روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانه سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.

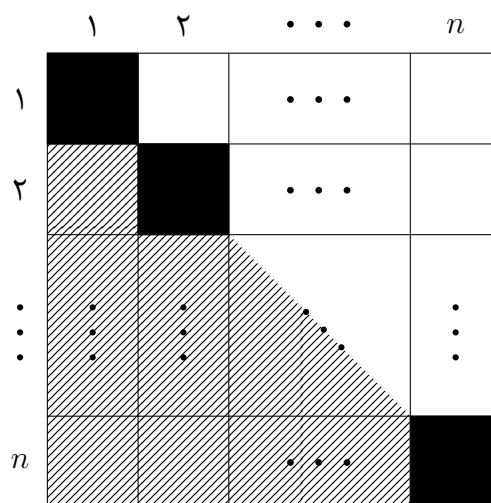
روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانه سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.

ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همه خانه‌های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همه خانه‌های جدولش را قرمز کند.

راه حل.

خانه‌هایی که امین پیدا می‌کند، که در سطر خود تنها خانه سیاه هستند و سپس ستون آن‌ها را کاملاً قرمز می‌کند، را خانه‌های ویژه بنامید. وقتی یک خانه ویژه انتخاب می‌شود، از آنجا که بعد از آن نیز ستونش قرمز می‌شود، دیگر خانه ویژه‌ای از آن ستون انتخاب نمی‌شود. از طرف دیگر وقتی یک خانه ویژه در یک سطر انتخاب می‌شود، یعنی تنها خانه سیاه آن سطر است و در آن سطر در مراحل بعدی خانه ویژه‌ای انتخاب نمی‌شود. پس می‌توان گفت در پایان، هیچ دو خانه ویژه‌ای هم‌سطر و هم‌ستون نیستند و تنها زمانی همه خانه‌های جدول قرمز می‌شود که این خانه‌های ویژه تشکیل یک قطر پراکنده بدهند.

توجه کنید که اگر سطرها با هم جابجا شوند و ستون‌ها نیز با هم جابجا شوند، حکم مسئله تغییری نمی‌کند و روش رنگ‌آمیزی علی و امین مستقل از چینش سطرها و ستون‌هاست. حال فرض کنید امین توانسته همه خانه‌ها را قرمز کند. پس خانه‌های ویژه تشکیل یک قطر پراکنده می‌دهند. طوری سطرها و ستون‌ها را جابجا کنید که اولین خانه ویژه‌ای که انتخاب می‌شود در مکان $(1, 1)$ ، دومین خانه ویژه در مکان $(2, 2)$ و ... تا آخرین خانه ویژه در (n, n) باشد.



اکنون خانه‌های ویژه قطر اصلی جدول هستند و با توجه به تعریف خانه‌های ویژه، خانه‌های بالای قطر اصلی در ابتدا همگی سفید بوده‌اند. پس به صورت یکتا علی باید ابتدا خانه (n, n) را انتخاب کند، سپس $(n-1, n-1)$ ، و ... تا در نهایت $(1, 1)$ را انتخاب کند و همه جدول در روش علی نیز قرمز می‌شود.

پس اگر امین همه خانه‌ها را قرمز کند، در روش علی نیز همه خانه‌ها قرمز می‌شوند و از آنجا که مسئله نسبت به روش علی و امین متقارن است، اگر علی همه خانه‌ها را قرمز کند، در روش امین نیز همه خانه‌ها قرمز می‌شوند و در نتیجه حکم مسئله برقرار است.

۵. دنباله $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می شود که $a_1 = 2$ و برای هر $n \geq 1$ داریم

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n$$

ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n+1} a_n a_{n-1} \dots a_1$ عددی طبیعی و مربع کامل است.

راه حل اول.

با استقرا روی n نشان می دهیم، $a_n = 2 \cdot \frac{n^n}{n!}$ برای پایه استقرا که حکم واضح است. اگر برای n درست باشد آنگاه

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n = 2 \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n^n}{n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{a_n \dots a_2 a_1}{n+1} &= \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n^n (n-1)^{n-1} \dots 2^2 1^1}{(n!) ((n-1)!) \dots 2! 1!} \\ &= \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n}{1!} \cdot \frac{n(n-1)}{2!} \dots \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \dots \frac{n!}{n!} \\ &= \frac{2^n}{n+1} \binom{n}{0} \binom{n}{1} \dots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n} \end{aligned}$$

توجه کنید اگر n فرد باشد،

$$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \dots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n} = \left(\binom{n}{0} \binom{n}{1} \dots \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right)^2$$

مربع کامل است. در ادامه ثابت می کنیم برای بی نهایت n عبارت $\frac{1}{n+1} a_n \dots a_1$ صحیح و مربع کامل است. برای رسیدن به این هدف کافی است n را به گونه ای انتخاب کنیم که اولاً فرد باشد و ضمناً $\frac{2^n}{n+1}$ صحیح و مربع کامل باشد.

اگر عدد n را به فرم $n = 2^k - 1$ انتخاب کنیم که k فرد باشد به وضوح

$$\frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{2^k-1}}{2^k} = 2^{2^k-k-1}$$

صحیح و مربع کامل است. پس اثبات حکم مساله به پایان می رسد.

به طور خلاصه برای هر $n = 2^k - 1$ که k فرد باشد

$$\frac{1}{n+1} a_n a_{n-1} \dots a_1 = \left(2^{2^k-1-\frac{k+1}{2}} \binom{n}{0} \binom{n}{1} \dots \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right)^2$$

صحیح و مربع کامل است.

راه حل دوم.

مانند راه حل اول می توان نشان داد

$$\frac{a_n \cdots a_2 a_1}{n+1} = \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n^n (n-1)^{n-1} \cdots 2^2 1^1}{(n!)((n-1)!) \cdots 2! 1!} = \frac{2^n}{n+1} A$$

دقت کنید که برای هر عدد طبیعی $1 \leq i \leq n$ ، عدد i در مخرج کسر A ، $n-i+1$ بار ظاهر می شود، زیرا i در حاصل ضرب های $n!$ ، $(i+1)!$ ، \dots وجود دارد. همچنین در صورت کسر A نیز به وضوح توان i برابر با i است. در نتیجه A را به شکل زیر نیز می توان نمایش داد

$$A = \prod_{i=1}^n i^{2i-n-1}$$

برای n های فرد A مربع کامل است زیرا $2i - n - 1$ زوج می شود. در ادامه نشان می دهیم A عددی صحیح نیز است. فرض کنید $p \leq n$ عددی اول باشد و k بزرگ ترین عدد طبیعی باشد که $p^k \leq n$ آنگاه به سادگی می توان مشاهده کرد که توان p در تجزیه A به عوامل اول برابر است با

$$\sum_{j=1}^k 2p^j \left(1 + 2 + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right) - (n+1) \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \quad (1)$$

که منظور از $[x]$ جزء صحیح x است. حال برای هر $1 \leq j \leq k$ نشان می دهیم

$$\begin{aligned} 2p^j \left(1 + 2 + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right) &\geq (n+1) \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \\ \Leftrightarrow p^j \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor + 1 \right) &\geq (n+1) \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \\ \Leftrightarrow p^j \left(\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor + 1 \right) &\geq n+1 \end{aligned}$$

طبق قضیه تقسیم عدد طبیعی q و عدد صحیح $0 \leq r < p^j$ وجود دارد که $n = p^j q + r$. پس باید نشان دهیم

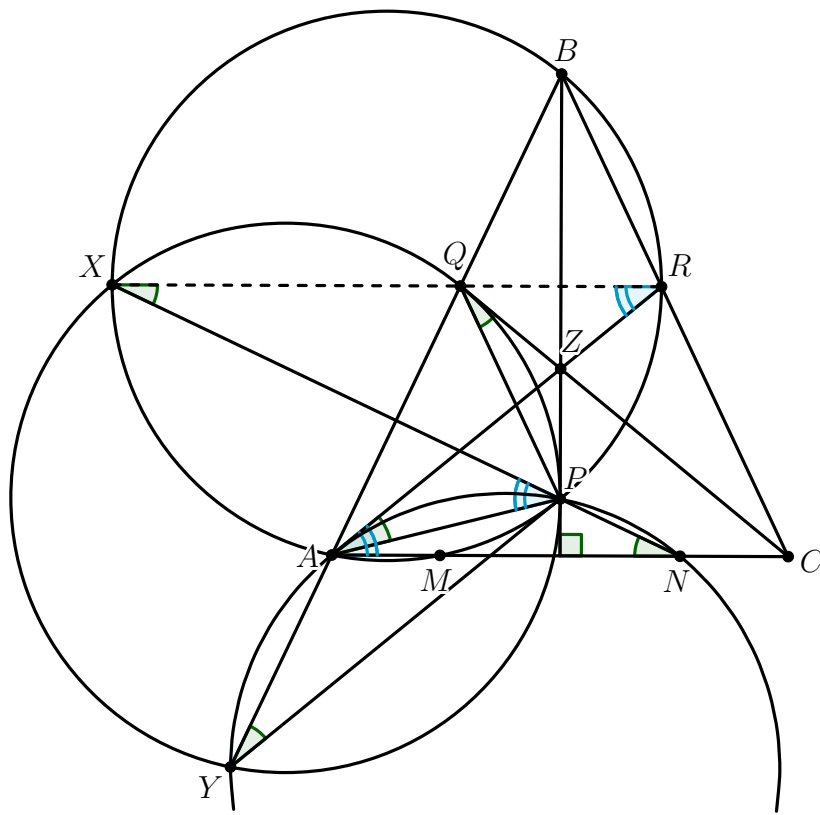
$$p^j(q+1) \geq p^j q + r + 1 \iff p^j \geq r + 1$$

که واضح است. پس مقدار (۱) نامنفی است و این یعنی A عددی طبیعی است. ادامه راه حل مانند راه حل اول است و تنها کافی است قرار دهیم $n = 2^t - 1$ که t فرد است.

۶. در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(BA = BC)$ نقطه P روی ارتفاع رأس B به طور دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایره APB خط AC را برای بار دوم در M قطع می کند. قرینه M نسبت به وسط AC را N می نامیم. خط NP دایره APB را در نقطه X ($X \neq P$) و خط AB دایره APN را در نقطه Y ($Y \neq A$) قطع می کند. مماس در A بر دایره APN ، در نقطه Z با خط BP برخورد می کند. ثابت کنید که CZ بر دایره محیطی مثلث PXY مماس است.

راه حل.

محل برخورد خطوط CZ و AB را Q می نامیم. ابتدا نشان می دهیم چهارضلعی $PQXY$ محاطی است. دقت کنید که $\angle PYQ = \angle PNA$ پس اگر ثابت کنیم $\angle PNA = \angle QXP$ آنگاه محاطی بودن چهارضلعی $PQXY$ نتیجه می شود. این نیز معادل است با توازی AN و XQ .



برای اثبات این توازی از نقطه R کمک می گیریم که محل تقاطع BC و AZ است. می توان نوشت

$$\angle RAP = \angle PNA = \angle PMN = \angle PBA = \angle PBR$$

پس R نیز روی دایره محیطی مثلث APB قرار دارد. به وضوح $QR \parallel AC$ پس تنها باید نشان دهیم خط RQ از X می گذرد. توجه کنید که

$$\angle QRA = \angle RAN = \angle XPA = \angle XRA.$$

این تساوی هم خطی نقاط R, Q و X را نتیجه می دهد پس محاطی بودن $PQXY$ ثابت شد. دقت کنید که نقاط C, N و Q قرینه نقاط A, M و R نسبت به خط BP هستند و از آنجا که پنج ضلعی $BRPMA$

محاطی است، $BQPNC$ نیز محاطی است. در نتیجه

$$\angle CQP = \angle PNA = \angle PXQ$$

و این یعنی CZ بر دایره محیطی PXY مماس است.