بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
سی و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۴

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۶	-	۳۶۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۶۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند. دفترچه پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه‌حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که سؤالات راه‌حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه‌حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.
با توجه به جنبه آموزشی این راه‌حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه‌حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که براساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه‌حل‌ها نیامده باشند.

۱- فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعه مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعه مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

۲- کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظه خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظه کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظه آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظه کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد (به شرط این‌که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظه کامپیوتر باشند، می‌توان f + g و f - g را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند.)

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}, x-\frac{1}{x}, \frac{1}{x-\frac{1}{x}}, \frac{1}{x-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}$ و ...

همه اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنه هر دو باشد، برابر باشند.)

۳- دایره دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر P محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

۴- در چهارضلعی ABCD، AC نیمساز زاویه A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است.)

۵- محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n+1$ بازه به طول‌های ۱، ۲، ... ، $n+1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

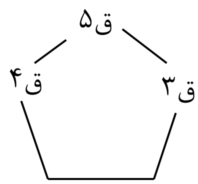
۶- $n \geq 50$ عددی طبیعی است. نشان دهید می‌توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ‌تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می‌توان به صورت ۱۴ + ۸۰ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{94}$ بزرگ‌تر نیستند.

«پاسخ‌نامه تشریحی»

۱- قطعات را از سبک به سنگین، ق۱ تا ق۵ می‌نامیم. واضح است که اگر آرش (ق۵ و ق۳) یا (ق۵ و ق۴) را به دست آورد، به نیمی از کیک رسیده است زیرا بهرام دو قطعه را دارد که هر کدام از یکی از این دو قطعه سبک‌تر است.

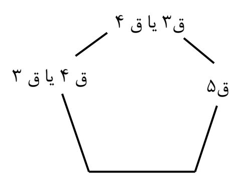
اکنون با توجه به موقعیت سه قطعه سنگین‌تر نسبت به هم، مسأله را در چهار حالت مختلف حل می‌کنیم:

حالت اول. ق۳، ق۴ و ق۵ کنار هم باشند و ق۵ وسطی باشد. در این صورت کافی است آرش ق۵ را بردارد زیرا او در مرحله بعد می‌تواند یکی از ق۳ یا ق۴ را بردارد.



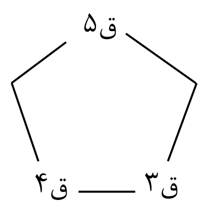
شکل ۱: حالت اول

حالت دوم. ق۳، ق۴ و ق۵ در کنار هم باشند و ق۵ وسط نباشد. در این حالت هم اگر آرش ق۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحله بعد می‌تواند یکی از ق۴ یا ق۳ را بردارد.



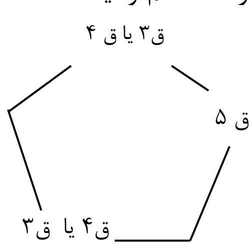
شکل ۲: حالت دوم

حالت سوم. ق۳، ق۴ هیچ‌کدام مجاور ق۵ نباشند. در این حالت هم اگر آرش ق۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحله بعد می‌تواند یکی از ق۴ یا ق۳ را بردارد.



شکل ۳: حالت سوم

حالت چهارم. یکی از ق۳ یا ق۴ مجاور ق۵ باشد و دیگری مجاور این دو نباشد. در این صورت روش آرش بستگی به این دارد که آیا جمع ق۳ و ق۴ کم‌تر از نصف است یا نه. اگر کم‌تر بود، ق۵ را برمی‌دارد و در ادامه در به‌ترین حالت بهرام به ق۳ و ق۴ می‌رسد. در غیر این صورت (یعنی حالتی که جمع ق۳ و ق۴ دست‌کم نصف کیک است.) در این صورت آرش باید از بین ق۳ و ق۴ آنی که مجاور ق۵ نیست را بردارد. هر قطعه‌ای که بهرام در نوبت بعد بردارد، آرش یا به ق۵ یا به قطعه باقی‌مانده از بین ق۳ و ق۴ دسترسی خواهد یافت و لذا از بین ق۳، ق۴ و ق۵ دو تایش به آرش می‌رسد که طبق فرض این قسمت از نصف کم‌تر نیست.



شکل ۴: حالت چهارم

۲- ثابت می‌کنیم جواب مسأله، اعداد طبیعی فرد است.

اولاً توجه کنید که هر عبارتی که بتوان در حافظه ذخیره کرد، تابعی فرد است زیرا عبارت x که در ابتدا در حافظه کامپیوتر است تابعی فرد است و نیز اگر f و g توابعی فرد باشند، $\frac{1}{f}$ ، f + g و f - g نیز توابعی فرد هستند.

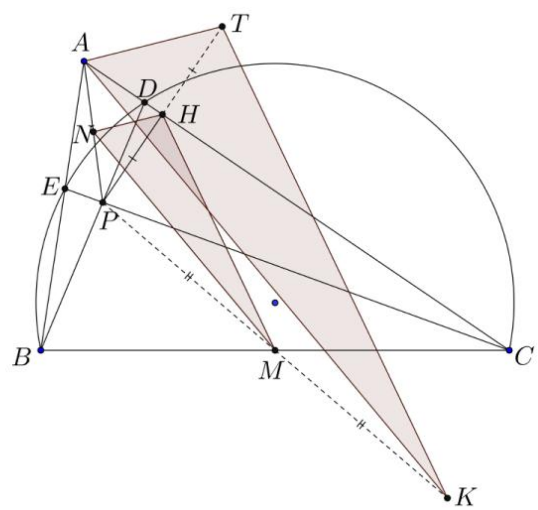
پس برای n های زوج، نمی‌توان x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. اکنون نشان می‌دهیم برای n فرد، می‌توان عبارتی متحد با x^n را در حافظه ذخیره کرد.

این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n = ۲k + ۱$. پایه استقرا برای $k = ۰$ واضح است. اکنون فرض کنید توانسته‌ایم عبارت‌های $x, x^۳, x^۵, \ldots, x^{۲k-۱}$ (یا عبارت‌هایی متحد با آن‌ها) را در حافظه ذخیره کنیم. بنابراین می‌توانیم $x^{۲k-۱} + x^{۲k-۳}$ و نیز $\frac{۱}{x^{۲k-۱}}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم. حال به ترتیب عبارات زیر را در حافظه ذخیره می‌کنیم:

$$x^{۲k-۱} + x^{۲k-۳} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲k-۱} + x^{۲k-۳}} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲k-۱}} - \frac{۱}{x^{۲k-۱} + x^{۲k-۳}} \equiv \frac{۱}{x^{۲k-۱} + x^{۲k-۳}}$$
$$\Rightarrow x^{۲k+۱} + x^{۲k-۱} \Rightarrow x^{۲k+۱}$$

پس توانستیم $x^{۲k+۱}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم و حکم استقرا ثابت شد.

۳- قرینه‌ی نقطه‌ی P نسبت به H و M را به ترتیب K و T می‌نامیم. در این صورت ادعا می‌کنیم مثلث‌های MNH و KAT هم‌نهشت هستند. برای این ادعا توجه کنید که PN = NA، PH = HT و PM = MK است. پس طبق قضیه‌ی تالس اضلاع این دو مثلث با هم موازی هستند و بنابراین ادعا ثابت شده است. از طرف دیگر با توجه به $\angle EBD = \angle ECD$ و برابری زاویه‌ی $\angle BAC$ در دو مثلث ABD و ACE این دو مثلث متشابه هستند. بنابراین برای اثبات حکم مسئله کافی است ثابت کنیم که دو مثلث AKT و ABD متشابه هستند. یعنی کافی است ثابت کنیم که $\angle BAD = \angle KAT$ و همچنین $\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AT}$.

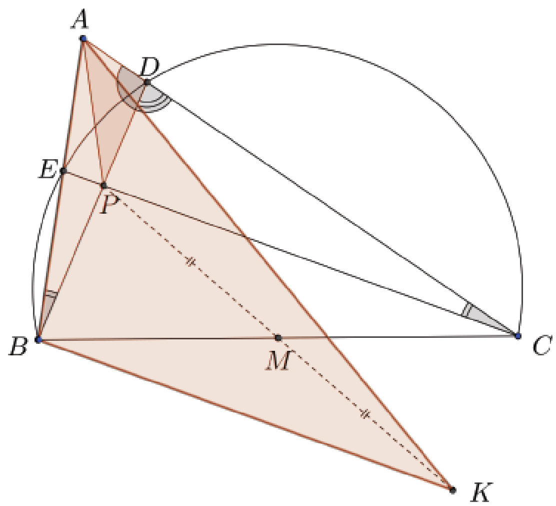


دقت کنید که این احکام معادل متشابه بودن مثلث‌های ABK و ADT است (چون $\angle BAD = \angle KAT$ اگر و تنها اگر $\angle BAK = \angle DAT$). اما با توجه به این که T از قرینه کردن P نسبت به ضلع AC به دست آمده بود، مثلث‌های ADT و ADP با هم هم‌نهشت هستند و بنابراین برای اثبات حکم باید نشان دهیم که دو مثلث ABK و ADP متشابه هستند.

چون در چهارضلعی BKCP قطرها یک‌دیگر را نصف کرده‌اند، این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است و لذا $BK \parallel CE$. این نتیجه می‌دهد که

$$\angle ABK = \angle AEC = ۱۸۰^\circ - \angle BEC = ۱۸۰^\circ - \angle BDC = \angle ADP$$

از سوی دیگر توجه کنید که مجدداً با توجه به این که BKCP متوازی‌الاضلاع است، BK = CP. پس برای کامل شدن اثبات تشابه دو مثلث باید نشان دهیم $\dfrac{AD}{DP} = \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AB}{CP}$.

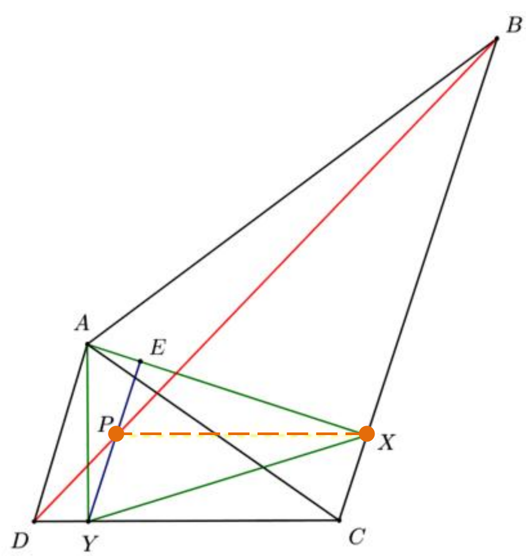


برای این هم طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های ABD و PDC باید ثابت کنیم:

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\sin(\angle DCP)}{\sin(\angle CDP)}$$

اما $\angle ABD = \angle DCP$ و $\angle ADB = ۱۸۰^\circ - \angle\ CD$. است، پس سینوس‌های این زوایا با هم برابر هستند و بنابراین تساوی موردنظر ما برقرار هست و بنابراین اثبات حکم مسئله به پایان می‌رسد.

-۴



پای عمود وارد از Y بر AX را E می‌نامیم. اگر تقاطع YE با BD را P بنامیم برای اثبات حکم کافیست ثابت کنیم XP بر AY عمود است یا معادلاً XP موازی CD است. داریم:

$$YE \parallel CB \Rightarrow \frac{DY}{YC}=\frac{DP}{PB}$$

از طرفی

$$ADC \sim ACB \Rightarrow \frac{DY}{YC}=\frac{CX}{XB}$$

پس

$$\frac{DP}{PB}=\frac{CX}{XB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه‌ی تالس XP با CD موازی است.

-۵ فرض کنید حکم برقرار نباشد. در این صورت $n+۱$ بازه با شرایط مسأله وجود دارد که هیچ‌کدام داخل دیگری نیست. بازه به طول ۱ را در نظر بگیرید. با توجه به این‌که هیچ یک از بازه‌های دیگر شامل این بازه نیست، بقیه بازه‌ها با این بازه (مگـــــــر احتمالاً در نقاط انتهایی) اشتراک ندارند و اگر درون این بازه را از دایره حذف کنیم و کمان باقی‌مانده را صاف کنیم، چنین چیزی خواهیم داشت:

پاره‌خطی به طول $۲n-۱$ که $۲n$ نقطه با فاصله‌های واحد روی آن علامت زده شده است. همچنین n بازه با سر و ته این نقاط و به طول‌های ۲، ... ، $n+۱$ که هیچ‌کدام شامل دیگری نیست.

حال بازه به طول $n+۱$ را در نظر بگیرید. از آن‌جایی که هیچ بازه دیگری کاملاً درون این بازه قرار ندارد و بقیه بازه‌ها از آن کوچکترند، هر کدام از این $n-۱$ بازه شامل یک نقطه در سمت چپ و یا یک نقطه در سمت راست بازه به طول $n+۱$ است و فقط یکی از این حالات اتفاق می‌افتد. حال سرهای (یعنی چپ‌ترین نقطه‌های) هر یک از بازه‌های دسته اول را در نظر بگیرید. این نقاط در سمت چپ بزرگترین بازه قرار دارند و متمایز هستند، چون اگر سر دو بازه یکی باشد، بازه بزرگ‌تر بازه کوچک‌تر را می‌پوشاند. به همین ترتیب نقاط ته بازه‌های دسته دوم را در نظر بگیرید که در سمت راست بزرگترین بازه قرار دارند و متمایزند. پس در مجموع باید $n-۱$ نقطه متمایز (سرهای دسته اول و ته‌های دسته دوم) داشته باشیم که همگی از میان نقاط علامت‌زده‌شده و بیرون بزرگترین بازه هستند. اما بزرگترین بازه خود شامل $n+۲$ نقطه علامت‌زده‌شده است و $n-۲$ نقطه علامت‌زده‌شده بیرون آن قرار دارد، پس نمی‌توان $n-۱$ نقطه علامت‌زده‌شده بیرون آن انتخاب کرد. پس فرض خلف به تناقض می‌انجامد و حکم ثابت می‌شود.

-۶ از آن‌جا که در طول راه‌حل بارها از عبارت ((عوامل اول x از y بیش‌تر نیستند))، استفاده می‌کنیم، در همین ابتدا نماد $\subseteq$ را برای نمایش این مفهوم قرارداد می‌کنیم. به این صورت که $x \subseteq y$ یعنی همه عوامل اول x کم‌تر یا مساوی y هستند.

دو نکته ساده ما را در رسیدن به این نمایش برای عدد n کمک می‌کند.

- برای هر عدد طبیعی $r \le m, r \subseteq m$. (اگر r عامل اولی بزرگ‌تر از m داشته باشد، باید $r > m$.)
- اگر $r \subseteq m$ و $s \subseteq m$ ، آن‌گاه $rs \subseteq m$. (هر عامل اول rs عاملی از r یا s است.)

به طور خاص این نکته‌ها نتیجه می‌دهند که اگر بتوان عدد r را به صورت حاصل‌ضرب اعدادی کم‌تر یا مساوی m نوشت $r \subseteq m$، برای مثال همواره $m^۲ \subseteq m$.

فرض کنید $m^۲$ و $(m+۱)^۲$ دو مربع کامل متوالی باشند که $m^۲ \le n < (m+۱)^۲$. پس $n = m^۲ + r$ که $۰ \le m \le ۲m$. دقت کنید که در این صورت $\left[\sqrt{n}\right] = m$ و باید نشان دهید که n را می‌توان به صورت a + b نوشت که $a \subseteq m$ و $b \subseteq m$.

مسئله را برحسب زوج یا فرد بودن m به دو حالت تقسیم می‌کنیم. (توجه کنید که چون $n \ge ۵۰$ فرض شده است، $m \ge ۷$ خواهد بود.)

اگر m فرد باشد، $m+۱$ زوج است. حال $m+۱$ عدد متوالی زیر را در نظر بگیرید:

$$n-(m+۱), n-m, \dots, n-۲, n-۱$$

از بین این $m+۱$ عدد متوالی یکی از آن‌ها مثلاً $n-j=m^۲+r-j$ بر $m+۱$ بخش‌پذیر است. ادعا می‌کنیم که در این صورت

$$n=\underbrace{(n-j)}_{a}+\underset{b}{j}$$

نمایش مطلوب برای n را به دست می‌دهد. توجه کنید که برای هر $۱\le j\le m+۱$ ، داریم $j\subseteq m$ ، زیرا اگر $j\le m$ باشد، با توجه به نکته بالا این موضوع واضح است و اگر $j=m+۱$ ، آن‌گاه $m+۱=۲(\frac{m+۱}{۲})$ و چون $۲\le m$ و $\frac{m+۱}{۲}\le m$ ، مجدداً طبق نکته‌های بالا $m+۱\subseteq m$. پس در هر صورت $j\subseteq m$. از طرف دیگر با توجه به نحوه تعریف m، $n-j<(m+۱)^۲$ و در نتیجه $\frac{n-j}{m+۱}<m+۱$. پس $\frac{n-j}{m+۱}\subseteq m$ و این یعنی می‌توان نوشت:

$$n=\underbrace{(m+۱)(\frac{n-j}{m+۱})}_{a}+\underset{b}{j}$$

که چون $m+۱\subseteq m$ و $\frac{n-j}{m+۱}\subseteq m$ نتیجه می‌گیریم که $a\subseteq m$ و بنابراین کار تمام است.

در حالتی که m زوج باشد، شبیه به حالت قبل این بار $m+۲$ زوج خواهد بود. در این حالت $m+۲$ عدد متوالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n-m, n-(m-۱), \dots, n-۱, n, n+۱$$

از بین این $n+۲$ عدد متوالی حتماً یکی از آن‌ها بر $m+۲$ بخش‌پذیر است.

- اگر $۱\le j\le m$ یافت شود که $m+۲\,|\,n-j$ ، مشابه حالت قبل $\frac{n-j}{m+۲}\le m$ و لذا $\frac{n-j}{m+۲}\subseteq m$. از طرف دیگر $m+۲=۲(\frac{m+۲}{۲})$ که $۲,\frac{m+۲}{۲}\le m$. پس $m+۲\subseteq m$. بنابراین در کل $a=n-j$ و $b=j$ نمایش مطلوب ما است.
- اگر خود n بر $m+۲$ بخش‌پذیر باشد، چون $m+۲$ زوج است می‌توان نوشت:

$$n=۲(\frac{m+۲}{۲})(\frac{n}{m+۲})=\underbrace{(\frac{m+۲}{۲})(\frac{n}{m+۲})}_{a}+\underbrace{(\frac{m+۲}{۲})(\frac{n}{m+۲})}_{b}$$

- اگر $m+۲\,|\,n+۱$ ، چون $n+۱=(m-۱)(m+۲)=m^۲+m-۲, m^۲+۱\le n+۱\le(m+۱)^۲$ و یا $n+۱=m(m+۲)$ (مضرب‌های دیگر $m+۲$ بزرگ‌تر از $(m+۱)^۲$ و یا کوچک‌تر از $m^۲$ هستند). در حالت اول چون $a=m^۲, m-۳<m$ و $b=m-۳$ همان نمایش مطلوب است. در حالت دوم $n=(m+۱)^۲-۲$. پس می‌توان نوشت:

$$n=(m+۱)^۲-۲=(m+۱)^۲-۹+۷=(m-۲)(m+۴)+۷=\underbrace{۲(m-۲)(\frac{m+۴}{۲})}_{a}+\underset{b}{۷}$$

حال چون $\frac{m+۴}{۲}\le m, m\ge۷$ و لذا $a\subseteq m$ و $b\subseteq m$. پس در این حالت هم نمایش مطلوب وجود دارد و بنابراین کار تمام است.

توضیح. توجه کنید که در طول راه‌حل از فرض $m\ge۷$ تنها در آخرین استدلال استفاده شد و در مابقی استدلال‌ها فرض $m\ge۴$ $(n\ge۱۶)$ کفایت می‌کرد. با توجه به این نکته استدلال بالا حکم مسئله را برای همه اعداد طبیعی مگر اعداد به شکل $m^۲+۲m-۱$ که m عددی زوج و کم‌تر از ۷ است نتیجه می‌دهد. این چنین عددی برای $m=۶$ برابر ۴۷ است که می‌توان آن را به

صورت ۱۵ + ۳۲ نوشت. در مورد $m = ۴$ هم به عدد ۲۳ برمی‌خوریم که می‌توان به سادگی دید که چنین نمایشی ندارد. در واقع حکم مسئله برای همه اعداد بزرگ‌تر از ۷ به جز ۲۳ درست است.