



دخترچه سوالات و پاسخ تشریحی مرحله دوم

سی و دومین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مسأله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۶۰	۶	-

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سوالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل ۶ مسأله‌ی تشریحی و وقت آن ۳۶۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- **ماگ** فروش گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم مرغ باشد. می دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم تر یا بیش تر از مقدار یاد شده است. کارمندان فروشگاه می توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دلخواه برنج و هر تعداد تخم مرغ آن دو سبد را جابه جا کنند. دست کم در چند مرحله می توان، با شروع از هر وضعیت اولیه ای، برنج و تخم مرغ همه سبدها را با هم برابر کرد؟

۲- **ماگ** مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطه N و P ، به ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده اند که $PN = NC$ و نقطه Q روی پاره خط AN طوری انتخاب شده که $NCB = QPN$. ثابت کنید:

$$BCQ = \frac{1}{4}PQA$$

۳- **ماگ** اعداد حقیقی و نامنفی x, y, z و z مفروض هستند. می دانیم:

$$2(xy + xz + zy) = x^2 + y^2 + z^2$$

ثابت کنید:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

۴- **ماگ** تمام جواب های طبیعی معادله زیر را بیابید.

$$n^{m^n} = m^m$$

۵- **ماگ** زیر مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوئیم در صورتی که هر گاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آنگاه دست کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.

(الف) یک مجموعه توانای چهار عضوی مثال بزنید.

(ب) ثابت کنید یک مجموعه توانای متناهی؛ بیش از چهار عضو ندارد.

۶- **ماگ** در انجمن «معمابازان حرفه ای» اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده اند و در پایان هر هفته گروه بندی ها به شکل خاصی تغییر می کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان بهترین عضو مشخص می شود و همه بهترین های گروه ها از گروه خود جدا شده و تشکیل یک گروه جدید را می دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می رود و گروه قبلی منحل می شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همه اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته ای فرا می رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه ها حداکثر

$$1 + \sqrt{2n}$$

پاسخ‌نامه تشریحی

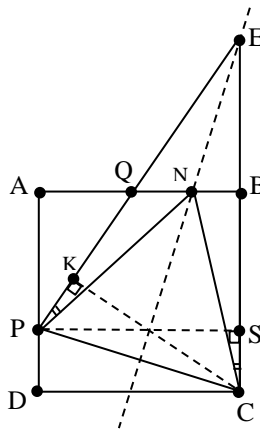
۱- راه حل. پاسخ مسئله ۹۹ است. ابتدا وضعیت اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در آن همه تخم‌مرغ‌ها در یک سبد باشند. در این صورت در هر مرحله حداکثر یک سبد جدید دارای تخم‌مرغ می‌شود. بنابراین حداقل ۹۹ مرحله لازم است تا همه سبدها دارای تخم‌مرغ شوند. اکنون ادعا می‌کنیم با هر وضعیت اولیه در ۹۹ مرحله می‌توان همه سبدها را درست کرد. (درست یعنی شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ) در هر مرحله، از بین سبدهایی که هنوز درست نشده‌اند، سبدی با بیشترین میزان برنج و سبدی با بیشترین تعداد تخم‌مرغ را در نظر بگیرید. به وضوح به سبد اول حداقل ۱۰ کیلوگرم برنج دارد و سبد دوم حداقل ۳۰ عدد تخم‌مرغ دارد. (ممکن است این دو سبد یکی باشند، در این صورت همین سبد و یک سبد دل‌خواه دیگر را انتخاب کنید.) با جابجایی اجناس بین این دو سبد می‌توان یک سبد با دقیقاً ۱۰ کیلوگرم برنج و دقیقاً ۱۰ عدد تخم‌مرغ ساخت. بنابراین در هر مرحله می‌توان حداقل یک سبد را درست کرد، پس از ۹۹ مرحله ۹۹ سبد درست شده‌اند، پس سبد آخر نیز خود به خود درست شده است.

۲- خط PQ را امتداد می‌دهیم تا خط BC را در نقطه E قطع کند. طبق فرض $PN = NC$ ، پس $\angle NPC = \angle PCN$. همچنین می‌دانیم $\angle QPC = \angle NCB$. از جمع این دو رابطه در می‌یابیم مثلث EPC متساوی‌الساقین است. در این مثلث ارتفاع‌های CK و PS را رسم می‌کنیم. چون مثلث EPC متساوی‌الساقین است $CK = PS$. از طرفی PS برابر طول ضلع مربع است پس $CK = CB$. در چهارضلعی $QBCK$ مجموع زاویه‌های $\angle QBC$ و $\angle CKQ$ برابر 180° درجه است. در نتیجه این چهار ضلعی محاطی است و

$$\angle BCK = \angle AQP$$

توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه CKQ و CBQ به حالت وتر و یک ضلع ($CQ = CQ, CK = CB$) هم‌نهشت هستند. بنابراین QC نیمساز $\angle KQB, \angle KCB$ است و

$$\angle BCQ = \frac{\angle KCB}{2} = \frac{\angle AQP}{2}$$



۳- راه حل نخست:

فرض کنید $x \geq y \geq z$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 1x^2 + x(-2y - 2z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0$$

$$\Rightarrow x = (y+z) \pm \sqrt{(y+z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz} = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geq y \geq z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلات $x = y + z + 2\sqrt{yz}$ رخ می‌دهد. حال با جایگذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y+z+2\sqrt{yz}+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{2(y+z+2\sqrt{yz})yz}$$

برای اثبات نابرابری بالا ابتدا فرض کنیم $y=0$ ولی در این حالت حکم اصلی مسئله واضح است چون سمت راست صفر و سمت چپ مثبت

است. حال فرض کنید y مخالف صفر است ($y=0$ بدیهی است) و دو طرف حکم معادل بالا را بر y تقسیم کنید و فرض کنید $\frac{z}{y} = t$

پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{2t+2\sqrt{t}+2}{3} \geq \sqrt[3]{2(t+1+2\sqrt{t})t}$$

که این هم با استفاده از نابرابری حسابی-هندسی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{2t+2\sqrt{t}+2}{3} &= \frac{(\sqrt{t}+1)+(\sqrt{t}+1)+2t}{3} \geq \sqrt[3]{2(t+1)^2 2t} \\ &= \sqrt[3]{2(t+1+2\sqrt{t})t} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

فرض کنید $x \geq y \geq z$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow x^2 + x(-2y - 2z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0$$

$$\Rightarrow x = (y+z) \pm \sqrt{(y+z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz} = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geq y \geq z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلات

$$x = y + z + 2\sqrt{yz}$$

رخ می‌دهد. حال با جایگذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y+z+2\sqrt{yz}+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{2(y+z+2\sqrt{yz})yz}$$

فرض کنید $A = \frac{y+z}{2}$ و $B = \sqrt{yz}$ حال چون $A \geq B$ (نابرابری حسابی-هندسی) می‌توان فرض کرد $A = B + e$ که $e \geq 0$ در

این صورت با جایگذاری $A = B + e$ در رابطه قبل به معادل زیر می‌رسیم

$$2B + \frac{4e}{3} \geq \sqrt[3]{2(4B+2e)B^2}$$

حال اگر دو طرف را به توان سه برسانیم به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$\left(2B + \frac{4e}{3}\right)^3 \geq 8B^3 + 4eB^2$$

اما داریم:

$$\left(2B + \frac{4e}{3}\right)^2 = 4B^2 + 2(2B)^2 \frac{4e}{3} + 6B\left(\frac{4e}{3}\right)^2 + \left(\frac{4e}{3}\right)^2 \geq 4B^2 + 16B^2e \geq 4B^2 + 4eB^2$$

پس رابطه مورد نظر ثابت شد.



راه حل نخست:

عدد طبیعی k و عدد صحیح نامنفی t را طوری انتخاب می‌کنیم که k بر n بخش پذیر نباشد و $m = kn^t$. (ابتدا t را بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی در نظر می‌گیریم که m بر n^t بخش پذیر باشد، سپس k را برابر حاصل تقسیم m بر n^t در نظر می‌گیریم.) با این جایگذاری در تساوی اصلی خواهیم داشت

$$n^n = m^m = (kn^t)^{kn^t}$$

از دو طرف رادیکال به فرجه n^t می‌گیریم

$$n^{n^{n-t}} = (kn^t)^k = k^k n^{kt}$$

دو طرف را بر n^{kt} تقسیم می‌کنیم

$$n^{n^{n-t}-kt} = k^k \quad (1)$$

اگر $t \geq n$ آنگاه $n^{n-t} \geq n^t \geq n^n$ ، پس $m = kn^t \geq n^t \geq n^n$ و در نتیجه

$$m^m = n^{n^n} \leq m^m \Rightarrow m \leq n \Rightarrow n^n \leq n \Rightarrow n \leq 1 \Rightarrow n = 1$$

و جواب $m = n = 1$ به دست می‌آید.

اما اگر $n > t$ آنگاه $n - t$ مثبت است و $n^{n-t} - kt$ عددی صحیح فرض کنید $s = n^{n-t} - kt$ ، در این صورت $n^s = k^k$. اگر $s < 0$ آنگاه یک طرف تساوی اخیر ناصحیح می‌شود، در حالی که طرف دیگر صحیح است. اگر $s = 0$ آنگاه $k = 1$ که در انتها بررسی شده. فرض کنیم $s > 0$ ، در این صورت اگر عدد اولی تنها یکی از n و k را بشمارد آنگاه این عدد اول تنها یکی از دو طرف تساوی $n^s = k^k$ می‌شمارد که این ممکن نیست. پس عوامل اول n و k یکسان‌اند. فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ و $k = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ تجزیه این دو عدد به عوامل اولشان باشد، در این صورت

$$n^s = k^k \Rightarrow (p_1^{\alpha_1})^s \dots (p_r^{\alpha_r})^s = (p_1^{\beta_1})^k \dots (p_r^{\beta_r})^k$$

از برابری توان‌های هر عدد اول در دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم

$$p_i^{\alpha_i s} = p_i^{\beta_i k} \Rightarrow \alpha_i s = \beta_i k \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{k}{s}$$

اگر $s \geq k$ آنگاه $\beta_i \geq \alpha_i$ و در نتیجه k بر n بخش پذیر است که خلاف فرض اولیه است.

اگر $k > s$ آنگاه $\alpha_i > \beta_i$ و در نتیجه n بر k بخش پذیر است. پس n^{n-t} هم بر k بخش پذیر است. از دو طرف تساوی (1) رادیکال فرجه k می‌گیریم

$$n^{\frac{n^{n-t}}{k}-t} = k$$

چون توان n در این عبارت صحیح است و k مضربی از n نیست به ناچار $s = 0$ و $k = 1$. یعنی $n^{n-t} - t = 0$ ، اما

$$t = n^{n-t} \geq n^1 \geq n \geq t$$

و به تناقض می‌رسیم.

راه حل دوم:

ابتدا توجه کنید که اگر $n = 1$ آنگاه $m = 1$ و جواب $m = n = 1$ به دست می‌آید. از این به بعد فرض می‌کنیم $n > 1$. فرض کنیم $r = \log_n m$ ، در این صورت $m = n^r$ و

$$n^{n^n} = m^m = (n^r)^{n^r} = n^{rn^r}$$

چون $n > 1$ باید توان‌های n در دو طرف برابر باشد

$$n^n = rn^r \Rightarrow r = n^{n-r} \quad (۲)$$

از طرفی با گرفتن لگاریتم (پایه n) از دو طرف تساوی $n^{n^n} = m^m$ به دست می‌آوریم

$$n^n = m \log_n m \Rightarrow r = \frac{n^n}{m} \quad (۳)$$

لم. اگر به ازای عددی طبیعی مثل n و عددهایی گویا و مثبت مثل p و q تساوی $n^p = q$ برقرار شود آنگاه q عددی طبیعی است.

اثبات. فرض کنید $p = \frac{a}{b}$ و $q = \frac{c}{d}$ نمایش‌های کسری این دو عدد گویا باشند. در این صورت

$$n^p = q \Rightarrow n^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow n^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b} \Rightarrow d^b \mid c^b \Rightarrow d \mid c \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$


ادامه راه حل. بنابر تساوی (۲) گویاست و بنابر تساوی (۱)، با فرض $p = n - r$ و $q = r$ داریم $n^p = q$. گویا بودن p و q نتیجه مستقیم گویا بودن r است. پس بنابر لم، q باید عددی طبیعی باشد. یعنی r عددی طبیعی است.

اگر $r < n$ آنگاه $r > n^{n-r} \geq n^1 > r$ در نتیجه تساوی امکان‌پذیر نیست.

اگر $r > n$ آنگاه $r < n^{n-r} < 1 < r$ در نتیجه باز هم تساوی ممکن نیست.

اگر $n = r$ آنگاه $n = r = 1$ پس $r = n^{n-r} = 1$ که خلاف فرض $n > 1$ است.

در نتیجه تنها جواب $m = n = 1$ است.

۵-  الف) یک مجموعه توانای ۴ عضوی است: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}$

$$1^x = 1, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

(البته این مثال را می‌توان با تحلیل صورت کلی مجموعه‌های توانا-همانطور که در ادامه خواهد آمد- به دست آورد.)

ب) ابتدا چند خاصیت اساسی عمل به توان رساندن را یادآوری می‌کنیم:

- برای هر عدد مثبت x و اعداد مثبت $a < b$ ، $a^x < b^x$
- اگر عدد حقیقی a بیشتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x زیاد می‌شود؛ به عبارت دیگر، اگر $x < y$ ، $a^x < a^y$
- اگر عدد حقیقی مثبت a کمتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x کم می‌شود.

حال به سراغ حل مسأله می‌رویم. ابتدا یک لم:

لم. یک مجموعه توانای متناهی نمی‌تواند هم‌زمان شامل یک عضو بزرگتر از ۱ و یک عضو کمتر از ۱ باشد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت مجموعه توانای متناهی S وجود دارد که هم شامل عضو بزرگتر از ۱ و هم شامل عضو کوچکتر از ۱ است. کوچکترین عضو مجموعه S را با a و کوچکترین عضو در میان اعضای بزرگتر از ۱ را با b نمایش می‌دهیم. (بنابر متناهی بودن S چنین اعضای وجود دارند.) در نتیجه $a < 1 < b$. داریم $a^b < a^1 = a$. اما a کوچکترین عضو S است، پس a^b نمی‌تواند در S باشد. همین‌طور $b^a < b^1 = b$ ، اما S شامل عضو بین ۱ و b نیست، پس b^a هم نمی‌تواند در S باشد. پس هیچ یک از دو عدد a^b و b^a قرار ندارند و این توانا بودن S را نقض و لم را ثابت می‌کند.

با توجه به لم، مجموعه‌های توانای متناهی، دو نوع هستند. نوع اول آن‌هایی هستند که همه اعضای آنها بیشتر یا مساوی ۱ هستند و نوع دوم آن‌هایی هستند که همه اعضای آنها کمتر یا مساوی ۱ هستند.

فرض کنیم S مجموعه توانایی از نوع اول و با بیش از ۳ عضو باشد. همچنین $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ اعضای بزرگتر از ۱ در S باشند. از آنجایی که S عضو کمتر از ۱ ندارد، تعداد اعضای آن حداکثر یکی از n بیشتر است و در نتیجه $n \geq 3$. برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $a_n^{a_i}$ از a_n

بیشتر است، پس در S قرار نمی‌گیرد. پس توانا بودن S ایجاب می‌کند که $a_i^{a_n}$ باشد. حال

$$a_1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \dots < a_{n-1}^{a_n}$$

N عضو بزرگتر از ۱ در S هستند، از طرف دیگر $a_1 < \dots < a_n$ همه اعضای بزرگتر از ۱ در S بودند، پس

$$a_1 = a_1^{a_n}, a_2 = a_2^{a_n}, \dots, a_n = a_n^{a_n}.$$

حال بیایید توانا بودن S را در مورد a_1 و a_2 است و چنین عددی در S وجود ندارد. به طریق مشابه:

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_1} < a_{n-1}^{a_2} = a_n$$

پس $a_{n-1}^{a_1}$ هم در S قرار ندارد. پس S نمی‌تواند توانا باشد و نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های توانای نوع اول حداکثر ۳ عضو دارند.

حال فرض کنید S یک مجموعه توانای متناهی از نوع دوم با بیش از ۴ عضو و $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ اعضای کمتر از ۱ در آن نباشند. پس

n حداقل ۴ است. $a_n < 1$ پس برای $1 \leq i \leq n$ ، $a_n^{a_i} > a_n^1 = a_n$. پس $a_n^{a_i}$ در S قرار ندارد و $a_i^{a_n}$ عضو S است. داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \dots < a_{n-1}^{a_n} < 1$$

و در نتیجه مشابه استدلال حالت قبل داریم

$$a_1 = a_1^{a_n}, a_2 = a_2^{a_n}, \dots, a_n = a_n^{a_n}.$$

و یا معادلاً

$$a_{n-1} = \frac{1}{a_n^{a_n}}, a_{n-2} = \frac{1}{a_{n-1}^{a_n}}, \dots, a_1 = \frac{1}{a_2^{a_n}}$$

پس اگر a_n را با a نشان دهیم، اعضای S به صورت زیر هستند:

$$\dots < a^{a^2} < a^a < a$$

حال توجه کنید که $a_{n-1} < 1$ ، پس

$$a_n = a_{n-1}^{a_n} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < 1$$

پس $a_{n-2}^{a_{n-1}}$ در S قرار دارد و چون

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} > a_{n-2}^{a_n} = a_{n-1}$$

پس داریم $a_{n-2}^{a_{n-1}} = a_n$

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} = a^{1/a^2} = a \Rightarrow a^{a^{(1/a)-2}} = a$$

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{a}-2} = 1$$

که با توجه به این که $a \neq 1$ پس $\frac{1}{a} - 2 = 0$ و در نتیجه $a = \frac{1}{2}$. پس $a_{n-2} = \frac{1}{16}$, $a_{n-1} = \frac{1}{4}$, $a_n = \frac{1}{2}$. حال $n \geq 4$ پس $n - 3 \geq 1$ و $a_{n-3} = a_{n-2}^2 = \frac{1}{2^8}$. حال شرط توانا بودن را برای a_{n-2} و a_{n-3} بررسی می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{2^8}\right)^{\frac{1}{8}} = a_{n-3}^{a_{n-2}} < 1$$

همین‌طور

$$\frac{1}{2} < a_{n-3}^{a_{n-2}} = \left(\frac{1}{2^8}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

پس هیچ یک از دو عدد $a_{n-2}^{a_{n-3}}$ و $a_{n-3}^{a_{n-2}}$ در S قرار ندارند و شرط توانا بودن نقض می‌شود. پس مجموعه‌های توانای نوع دوم حداکثر ۴ عضو دارند.

پس هر دو نوع مجموعه توانای متناهی حداکثر ۴ عضو دارد.



راه حل نخست:

پیش از هر سخنی ابتدا به این نکته واضح و کلیدی دقت کنید که اگر k گروه با اعضای $1, 2, \dots, k$ داشته باشیم، در مرحله بعد هم k گروه با اعضای $1, 2, \dots, k$ خواهیم داشت. حال به حل سوال توجه کنید.

لم: اگر $n = \binom{k}{2}$ همواره پس از حرکت، در نهایت $k-1$ گروه خواهیم داشت که به ازای هر i که $1 \leq i < k$ گروهی با i عضو موجود باشد.

اثبات لم: برای $k=2$ بدیهی است و برای $k=3$ نیز داریم $n = \binom{3}{2} = 3$ که پس از یک حرکت به حالت یک گروه یک نفره و یک گروه دو نفره می‌رسیم.

فرض می‌کنیم حکم استقرا به ازای هر $1 \leq k \leq m$ برقرار باشد، حال حکم را برای $k = m+1$ اثبات می‌کنیم. بنابراین فرض کنید گروه اصلی گروهی با $\binom{m+1}{2}$ عضو باشد. طبق فرض استقرا پس از حرکت، $m-1$ گروه جدید خواهیم داشت که به ازای هر i که

$1 \leq i \leq m-1$ گروهی با i عضو موجود باشد. ضمناً تعداد اعضای گروه اصلی هم برابر با m است. بنابراین حکم با

استقرا اثبات شد.

حال به اثبات باقیمانده سوالات می‌رویم: فرض کنید $n = \binom{k}{2} + t$ به طوری که $n \leq \binom{k+1}{2}$ می‌خواهیم اثبات کنیم مرحله‌ای وجود

دارد که از آن به بعد تعداد اعضای بزرگترین گروه n نفر است. برای این کار هم به سادگی مانند اثبات لم بالا فرض کنید $\binom{k+1}{2}$ معما باز

داریم که $t = \binom{k+1}{2} - \binom{k}{2}$ تا از آنها عضو فرعی و بقیه اصلی هستند. (در واقع تعدادی عضو فرعی اضافه نمودیم.) در هر مرحله هم

اولویت برداشت عضو از هر گروه با اعضای اصلی آن گروه می‌باشد (اعضای فرعی تا جای ممکن از همه می‌بازند!). طبق لم می‌دانیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد به ازای هر $1 \leq i \leq k$ ، گروهی با i عضو وجود دارد. در هر مرحله تعداد اعضای هر گروه از k بیشتر نمی‌شود و بدون در نظر گرفتن اعضای فرعی هم این حکم درست است. بنابراین تعداد اعضای اصلی از k بیشتر نمی‌شود. پس حکم به این صورت نتیجه می‌شود:

$$\frac{k^2 - k}{2} = \binom{k}{2} < n = \binom{k}{2} + t \leq \binom{k+1}{2}$$

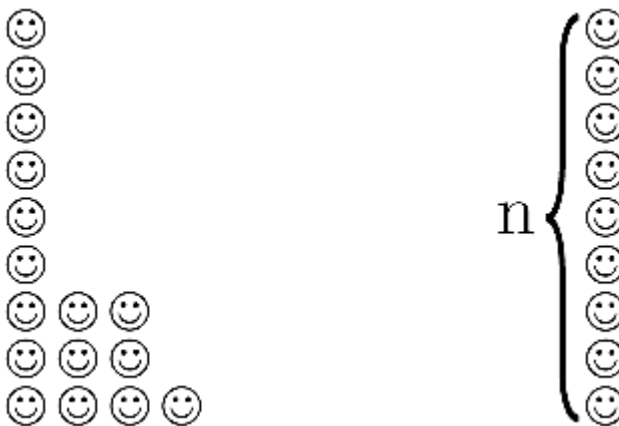
$$\Rightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n \Rightarrow (k - \frac{1}{4})^2 < 2n \Rightarrow k < \sqrt{2n} + \frac{1}{4} < \sqrt{2n} + 1$$

راه حل دوم:

توجه کنید که سوال معادل این است که ثابت کنیم اگر در ابتدا یک دسته n تایی از دوایر داشته باشیم و در هر مرحله از هر دسته یک دایره انتخاب کرده و با آنها دسته‌ای جدید ایجاد کنیم، مرحله‌ای فرا خواهد رسید که از آن مرحله به بعد، هر دسته شامل حداکثر $\sqrt{2n} + 1$ دایره باشد.

برای این که راه حل قابل فهم‌تر باشد تعدادی تعریف کرده و شهودی کلی از اثبات ارائه می‌دهیم و در انتها شهودی که ارائه دادیم را دقیق می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر دسته‌بندی از دوایر، «قیافه» این دسته‌بندی را نمایشی از دایره‌ها گوئیم به طوری که هر دسته به شکل ستونی از دوایر باشد و ستون‌ها نیز بر حسب تعداد دوایرشان مرتب شده باشند. در شکل زیر قیافه دسته بندی (n) را در سمت راست و قیافه دسته‌بندی $(3, 9, 3)$ ، (1) را در سمت چپ می‌بینید.



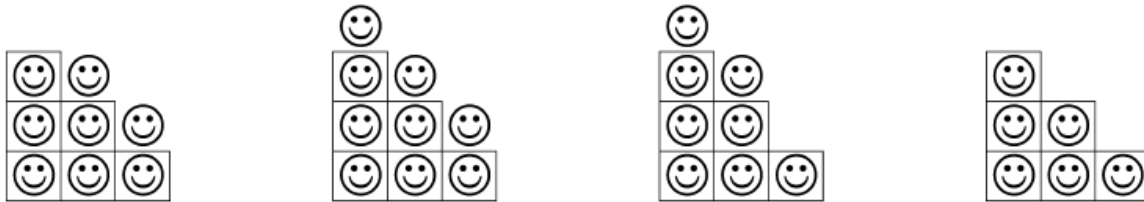
تعریف ۲: یک «پلکان به طول k » شامل $\binom{k+1}{2}$ دایره است به طوری که دایره‌ها در دسته‌های $1, 2, 3, 4, \dots, k$ تایی قرار داشته باشند.

تعریف ۳: یک «پلکان به طول k و تاج t » (که $t \leq k$) پلکانی به طول k است که به t دسته بزرگتر آن دایره اضافه کرده‌ایم. در نتیجه شامل $\binom{k+1}{2} + t$ دایره است که در دسته‌های $1, 2, \dots, k-t, k-t+2, \dots, k, k+1$ تایی قرار گرفته‌اند. اگر $t = k+1$ پلکان به طول k و تاج t را همان پلکان به طول $k+1$ در نظر می‌گیریم. پس پلکان به طول k و تاج 0 یک پلکان به طول k است.

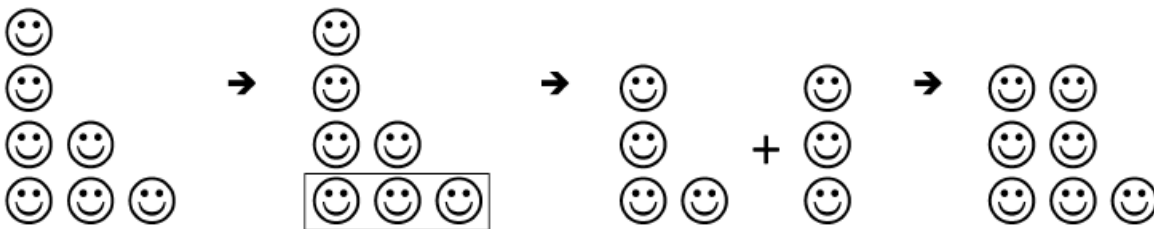
تعریف ۴: یک «ساختار پلکانی با m دایره» دسته‌بندی شامل m دایره است که اگر $\binom{k+1}{2} \leq m < \binom{k+2}{2}$ این دسته‌بندی به شکل پلکانی به طول k و تاج $m - \binom{k+1}{2}$ باشد.

تعریف ۵: یک «پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r » (که $t \leq k+1$) پلکانی با دسته‌های x_1, x_2, \dots, x_k است (x_i می‌تواند ۰ باشد) که اگر $k-i$ به پیمانانه $k+1$ عضو مجموعه $r, r+1, \dots, r+t-1$ باشد $x_i = i+1$ و در غیر این صورت $x_i = i$. پس پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r یک پلکان به طول k و تاج t است.

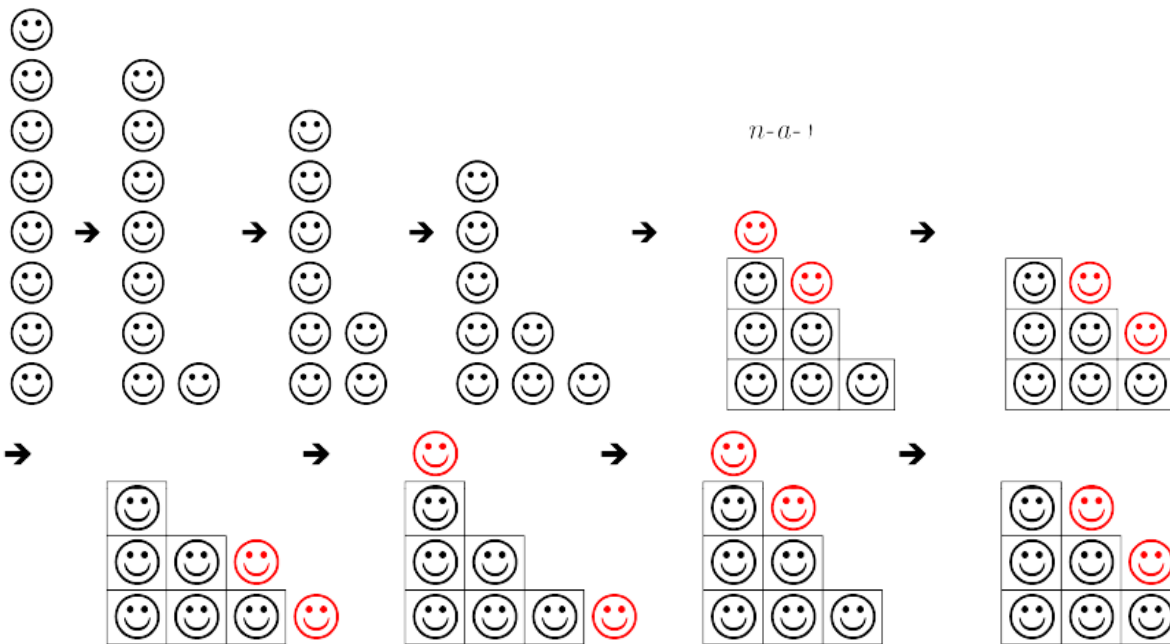
شکل زیر از راست به چپ قیافه یک پلکان به طول ۳، قیافه پلکان به طول ۳ و تاج ۲، قیافه یک ساختار پلکانی به طول ۹ و قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲ و جایگاه ۵ را نشان می‌دهد.



نکته ۱: چنانچه یک دسته‌بندی داشته باشیم، در هر مرحله قیافه دسته‌بندی به این شکل تغییر می‌کند: سطر پایینی جدا شده و به یک ستون جدید تبدیل می‌شود. سپس بر حسب تعداد دوایرش در جایگاه مناسب قرار می‌گیرد. برای مثال قیافه دسته (۴، ۱، ۲) به این شکل تغییر می‌کند:



اکنون فرض کنید $n \leq \binom{a+2}{2} < n < \binom{a+1}{2}$ و $b = n - \binom{a+1}{2}$ در ادامه راه می‌خواهیم اثبات کنیم دایره‌ها از مرحله $n - a - 1$ به بعد مانند شکل جمع شده و قیافه‌ها با الگوی خاصی تکرار می‌شوند.



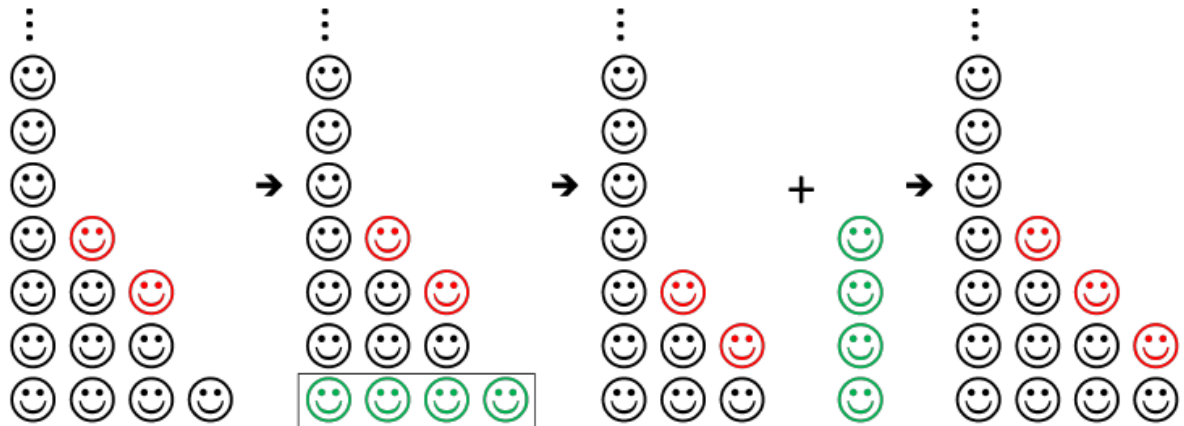
حال به اثبات دقیق می‌پردازیم.

ادعا ۱: در مرحله l ام ($l < n$)، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک دسته با $n - l$ دایره است. اثبات ادعا: به استقرا روی l حکم را ثابت می‌کنیم. پایه استقرا با توجه به اولین عمل واضح است. برای اثبات گام استقرا توجه می‌کنیم که طبق فرض استقرا در مرحله $l - 1$ ام، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با $l - 1$ دایره به همراه یک دسته با $n - l + 1$ دایره است. حال دو حالت داریم:

حالت نخست: k وجود داشته باشد که $l - 1 = \binom{k+1}{2} - 1$. در این حالت پلکانی به طول $k - 1$ و تاج $k - 1$ داریم پس دسته‌ها به طول $1, 2, 3, \dots, k - 1, n - l + 1$ هستند. که در هر مرحله بعد دسته‌ها برابر $1, 2, 3, \dots, k - 2, k - 1, n - l + 1$ خواهد شد. که این یک پلکان به طول به طول $k + 1$ به همراه یک ستون با $n - l$ دایره است. پس در این حالت مرحله بعد حاوی یک ستون با $n - l < 0$ دایره و یک ساختار پلکانی l تایی است.



حالت دوم: $1 - \binom{k+1}{2} \leq k-l \leq \binom{k}{2}$ در این حالت ساختار پلکانی به شکل یک پلکان به طول $k-1$ و تاج به طول نامنفی و کم تر از $k-1$ است. پس در این حالت پلکان شامل دسته‌ای به طول ۱ است. پس طول دسته‌ها به شکل $(1, k-t-1, k-t+1, \dots, n-l+1)$ است (طول بزرگترین دسته ساختار k یا $k-1$ است). حال با حذف یک دایره از هر دسته و ایجاد دسته‌های جدید دسته‌ای به طول k ایجاد می‌شود و دسته‌های موجود به شکل $(n-l, \dots, k-t, \dots, k-t-2, \dots, 0)$ خواهند بود (طول کوچکترین دسته ساختار ۱ یا ۲ خواهد بود). که این یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک ستون با $n-l > 0$ دایره است.



پس در هر دو حالت حکم استقرا را نتیجه گرفتیم و این موجب اثبات ادعا می‌شود.

حال می‌دانیم که ادعای ۱ برای هر $n < l$ درست است. پس این حکم برای $l = n - a - 1$ نیز درست است.

پس در مرحله $n - a - 1$ یک ساختار پلکانی به طول $n - a - 1$ و یک ستون به طول $a + 1$ داریم. از آنجایی که

$$\binom{a+1}{2} < n \leq \binom{a+2}{2} \text{ پس } \binom{a+2}{2} \leq n - a - 1 \leq \binom{a}{2} \text{ که این نشان می‌دهد که ساختار پلکانی، پلکانی به طول } a-1 \text{ و تاج}$$

به طول مثبت (شاید a) خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که پس از این، طول هیچ دسته‌ای از $a+1$ بیشتر نمی‌شود. برای اثبات کل دایره‌های موجود را آبی کرده و تعدادی دایره قرمز روی پلکان اضافه می‌کنیم تا یک پلکان به طول $a+1$ ایجاد کنند. با توجه به نکته ۱، پلکان به طول $a+1$ پس از هر مرحله به خودش تبدیل می‌شود. پس در قیافه شامل دایره‌های قرمز و آبی، طول دسته‌ها هیچ‌گاه بیشتر از $a+1$ نمی‌شود. حال اگر در هر مرحله دایره‌های قرمز را در بالای هر دسته قرار دهیم نتیجه می‌شود که دایره‌های قرمز هیچ تأثیری در ساختار دایره‌های آبی ندارند و در نتیجه تعداد دایره‌های آبی در دسته‌هایشان همواره کمتر مساوی $a+1$ است.



حال توجه کنید که

$$\binom{a+1}{2} < n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) < 2n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) + \frac{1}{4} < 2n \Rightarrow \left((a+1) - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n$$

$$\Rightarrow (a+1) - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} \Rightarrow a+1 < \sqrt{2n} + 1$$

پس تعداد دایره های درون هر دسته همواره کم تر از $\sqrt{2n} + 1$ است.

اکنون می خواهیم کمی فراتر از راه حل سوال رفته و ساختار دسته بندی ها را پس از مرحله $n - a + 1$ نیز به دست بیاوریم. توجه کنید که در این مرحله دسته بندی ها یک پلکان به طول a و تاج b و جایگاه \circ تشکیل داده اند. ادعا ۲: در مرحله $a - n + 1 + r$ پلکانی به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

اثبات ادعا: برای اثبات ادعا روی r استقرار می زنیم. پایه همان نتیجه ادعا ۱ است. برای تکمیل گام استقرا فرض را برای $r - 1$ در نظر گرفته و دو حالت را در نظر می گیریم.

حالت نخست: a به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $r - 1, r - 2, \dots, r + t - 2$ نباشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعه x_j در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای صفر دایره است. پس قیافه این دسته بندی دارای a دایره پایینی است و با جدا نمودن این دایره ها و ایجاد دسته جدید دسته x_a دارای a دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دسته x_i به جای دسته x_{i-1} قرار گرفته است می توانیم ادعا کنیم که در دسته بندی جدید اگر $a - j$ به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $r - 1, r + 1, \dots, r + t - 1$ باشد $x_j = j + 1$ و در غیر این صورت $x_j = j$. پس در مرحله بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

حالت دوم: a به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $r - 1, r - 2, \dots, r + t - 2$ باشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعه x_j در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای ۱ دایره است. پس قیافه این دسته بندی دارای $a + 1$ دایره پایینی است و با جدا نمودن این دایره ها و ایجاد دسته جدید دسته x_a دارای $a + 1$ دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دسته x_i به جای دسته x_{i-1} قرار گرفته است می توانیم ادعا کنیم که در دسته بندی جدید اگر $a - j$ به پیمانه $a + 1$ عضو مجموعه $r - 1, r + 1, \dots, r + t - 1$ باشد $x_j = j + 1$ و در غیر این صورت $x_j = j$. پس در مرحله بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

پس ادعا ۲ نیز ثابت شد. اکنون می توانیم ادعا کنیم که پس از مرحله $a - n - 1$ دسته بندی ها به نظم واضحی هر $a + 1$ مرحله تکرار می شوند و چون پیش از مرحله $n - a - 1$ دسته ای به طول $a + 2$ داشتیم، پس مرحله $n - a - 1$ اولین مرحله ایست که این تناوب شروع می شود. پس قیافه ی دسته بندی ها پس از مرحله $n - a - 1$ مانند شکل زیر خواهد بود:

