بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
سی و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۲

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
-	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نمه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را درستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه داردی و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌پیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته اشند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- همه‌ی a و b های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که $b\,/\,a = \frac{a}{b}$.

(توضیح: اگر $a=۹۲$ و $b=۱۳$، آن‌گاه $b\,/\,a$ برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

۲- فرض کنید اعداد طبیعی $w_۱, w_۲, \cdots$ و w_n وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \ldots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه‌ی کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه‌ی وزنه‌های باقی‌مانده نیز کامل است.

۳- مثلث دلخواه ABC داده‌شده است. وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطه‌ی O، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایره‌ی محیطی در نقطه‌ی N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

۴- فرض کنید C یک دایره‌ی و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره‌ی رسم و نقطه‌ی K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ی محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایره‌ی C را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. قرینه‌ی P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید.

$$\angle PBT = \angle P'KA$$

۵- در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته‌شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شماره‌ی ستون و شماره‌ی سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه‌ی یک واحد کم کنیم یا به همه‌ی یک واحد اضافه کنیم: ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیر جدول ۳×۳ را، صرف‌نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آنگاه می‌توان همه‌ی اعداد داخل جدول را صفر کرد. به‌عنوان‌مثال در جدول ۹×۵ زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب و خانه‌های یکی از زیر جدول‌های ۳×۳ مشخص‌شده‌اند. توجه کنید که خانه‌ی گوشه راست ـ بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به‌تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						↘			
۲		*	*	*			↘		
۳		*	*	*				↘	
۴		*	*	*					↘
۵									

۶- دنباله‌ی $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+۲} = \left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right] + \left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = ۴$ و $a_{m+۱} \in \{۳, ۴\}$.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۲

۱- راه‌حل اول. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد، یعنی $۱۰^{k-۱} \leq a < ۱۰^k$ در این صورت $b / a = b + \frac{a}{۱۰^k}$، بنابراین با توجه به فرض مسئله‌ی خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{۱۰^k} \Rightarrow ۱۰^k a = ۱۰^k b^۲ + ab$$

با توجه به عبارت بالا و توجه به روابط بخش‌پذیری، $a \big| ۱۰^k b^۲ , b \big| ۱۰^k a$ و $۱۰^k \big| ab$ به‌دست می‌آیند. از آن‌جا که a و b نسبت به هم اول هستند، با به کار بردن لم اقلیدس و استفاده از دو رابطه اول قبلی به دست می‌آید $b \big| ۱۰^k$ و $a \big| ۱۰^k$. مجدداً چون ب.م.م a و b برابر یک است، خواهیم داشت $ab \big| ۱۰^k$. بنابراین $ab = ۱۰^k$. حال بار دیگر با توجه به این‌که a و b نسبت به هم اول هستند، عامل مشترکی ندارند و لذا چهار حالت زیر ممکن است:

حالت ۱. $a = ۱۰^k$ و $b = ۱$.

حالت ۲. $a = ۲^k$ و $b = ۵^k$.

حالت ۳. $a = ۵^k$ و $b = ۲^k$.

حالت ۴. $a = ۱$ و $b = ۱۰^k$.

حالت ۱ با k رقمی‌بودن a تناقض دارد. ضمناً از فرض مسئله‌ی $(\frac{a}{b} = b / a)$ به دست می‌آید $\frac{a}{b} > b$ و لذا $a > b^۲$ و با توجه به این نکته حالت‌های ۲ و ۴ هم امکان ندارند $۲^k < ۵^{۲k} , ۱ < ۱۰^{۲k}$. پس تنها حالت مورد قبول ۳ است. با توجه به k رقمی بودن a، $۱۰^{k-۱} \leq a = ۵^k$ و درنتیجه $۲^{k-۱} \leq ۵$ یعنی k نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد $۲^{k-۱} \leq ۵ < ۸ = ۲^۳ \Rightarrow k \leq ۳$

- $k = ۱$ در این صورت $a = ۵$ و $b = ۲$ که به‌وضوح $۲ / ۵ = \frac{۵}{۲}$ و این جوابی از مسئله‌ی است.
- $k = ۲$. در این صورت $a = ۲۵$ و $b = ۴$ که امکان ندارد زیرا $۴ / ۲۵ < ۶ < \frac{۲۵}{۴}$.
- $k = ۳$. در این صورت $a = ۱۲۵$ و $b = ۸$ که این هم ممکن نیست چون $۸ / ۱۲۵ < ۱۰ < \frac{۱۲۵}{۸}$.

بنابراین تنها جواب مسئله‌ی $a = ۵$ و $a = ۲$ است.

راه‌حل دوم. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد. پس می‌خواهیم داشت $\frac{a}{b} = b / a = b + \frac{a}{۱۰^k}$ و این معادل با این است که $\frac{a}{۱۰^k} = \frac{a - b^۲}{b}$. چون $(a,b) = ۱$، پس $(a - b^۲, b) = ۱$ یعنی $\frac{a - b^۲}{b}$ کسری تحویل‌ناپذیر و مساوی با (ساده‌شده‌ی) $\frac{a}{۱۰^k}$ است. بنابراین $s \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $s(a - b^۲) = a$ یعنی $sb = ۱۰^k$. پس خواهیم داشت $a - b^۲ \big| a$ و چون $(a - b^۲, a) = ۱$، $a - b^۲ \big| ۱$ و لذا $a - b^۲ = \pm ۱$ اما ازآنجاکه $\frac{a - b^۲}{b} = \frac{a}{۱۰^k} > ۰$ تنها حالت ۱+ قابل‌قبول است. یعنی $a = b^۲ + ۱$ و $\frac{۱}{b} = \frac{a}{۱۰^k}$ حال توجه کنید که چون k تعداد ارقام a است، پس $a \geq ۱۰^{k-۱}$ و $\frac{۱}{b} = \frac{a}{۱۰^k} \geq \frac{۱}{۱۰}$، درنتیجه $b \leq ۱۰$ از طرفی $ab = b(b^۲ + ۱) = ۱۰^k$ توانی از ۱۰ است، پس عوامل اول b، ۲ یا ۵ است یعنی $b \in ۱,۲,۴,۵,۸,۱۰$. در این صورت

$b^2+1 \in 2,5,17,26,65,101$ و چون b^2+1 هم عامل اولی جز ۲ و ۵ ندارد تنها حالت $b=1$ و $b=2$ می‌ماند. اما اگر $b=1$، $b(b^2+1)=2$ توانی از ۱۰ نیست. پس تنها حالت $a=5$ و $b=2$ باقی می‌ماند که این هم به‌وضوح جوابی از مسئله‌ی است.

$$\left(\frac{a}{b}=\frac{5}{2}=2/5=b/a\right)$$

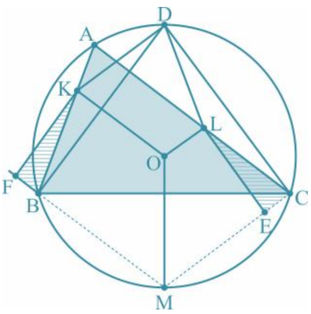
۲- نشان می‌دهیم مجموعه‌ی n عدد $w_1 \le w_2 < \ldots \le w_n$ کامل است و تنها اگر $w_1=1$ و برای هر $2 \le i \le n$ داشته باشیم. عدد $w_i \le w_1+w_2+\cdots+w_{i-1}+1$. توجه کنید اگر $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_n$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{n-1}$ نیز دارای آن شرط هستند پس برای اثبات حکم کافی است ادعای خود را ثابت کنیم.

روشن است که اگر $w_1>1$ یا برای یک $2 \le i \le n$ داشته باشیم $w_i > w_1+w_2+\ldots+w_{i-1}+1$ آنگاه به ترتیب عدد ۱ یا عدد $w_1+w_2+\ldots+w_{i-1}+1$ مجموع هیچ تعدادی از وزنه‌ها نمی‌شود. پس اگر تعدادی وزنه کامل باشند شرط بالا درباره‌ی آن‌ها صادق است. حال اگر برای تعدادی وزنه شرط یاد شده برقرار باشد به استقرا روی n نشان می‌دهیم که کامل هستند. پایه‌ی استقرا در حالتی که تنها یک وزنه داریم واضح است. حال حکم را برای $n=k-1$ فرض می‌کنیم. اگر $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_k$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{k-1}$ نیز دارای آن شرط هستند پس طبق فرض استقرا مجموعه‌ای کامل‌اند پس هر عدد طبیعی w که کوچک‌تر از $w_1+w_2+\ldots+w_{k-1}$ باشد به‌صورت جمع تعدادی از $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ است. حال برای آن w های طبیعی که $w_1+w_2+\ldots+w_{k-1} < W < w_1+w_2+\ldots+w_k$ چون $w_k \le w_1+w_2+\ldots+w_{k-1}+1$ داریم:

$$-1 \le w_1+w_2+\ldots \le w_{k-1}-w_k < W-w_k < w_1+w_2+\ldots w_{k-1}$$

در حالت $W-w_k=0$ مطلوب حاصل است. در غیر این صورت $1 \le W-w_k < w_1+w_2+\ldots+w_{k-1}$ پس طبق فرض استقرا $W-w_k$ به‌صورت جمع تعدادی از $w_1, w_2, \ldots, \ldots w_{k-1}$ است. حال اگر w_k را به آن مجموعه اضافه کنیم مجموع اعضای مجموعه‌ی جدید برابر w خواهد بود و حکم برای $n=k$ نیز نتیجه می‌شود.

۳- راه‌حل اول.



ابتدا ثابت می‌کنیم $KB=LC$ است. از نقاط K و L عمودهای KF و LE را بر خطوط MB و MC رسم می‌کنیم. این دو عمود برابر فاصله O تا دو وتر برابر MB و MC از دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ هستند و در نتیجه با هم برابرند.

از طرف دیگر داریم: $\angle KBF=\angle LCE$ (چهارضلعی ABMC محاطی است) در نتیجه $\overset{\Delta}{KBF} \cong \overset{\Delta}{LCE}$ و KB=LC است.

اگر D نقطه‌ی وسط کمان $\overset{\Delta}{BAC}$ باشد داریم:

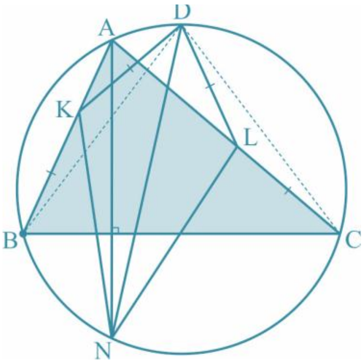
$$\left.\begin{array}{l} DB=DC \\ \angle DBA=\angle DCA \\ KB=LC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{DBK} \cong \overset{\Delta}{DCL} \Rightarrow \angle KDL = \left\{\begin{array}{l} \angle KDL=\angle BDC=\angle BAC \\ KD=LD \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \angle KDL=\angle BDC=\angle BAC \\ KD=LD \end{array}\right.$$

از طرفی $\angle KOL=\angle BMC$ پس نتیجه می‌شود که AKOLD محاطی است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\angle AKD=\angle ALD=\angle AOD=\angle B-\angle C\\ \angle KBD=\angle LCD=\dfrac{\angle B-\angle C}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle KDB=\angle LCD=\frac{\angle B-\angle C}{۲}$$

$$\Rightarrow KB=KD=LD=LC\,(*)$$

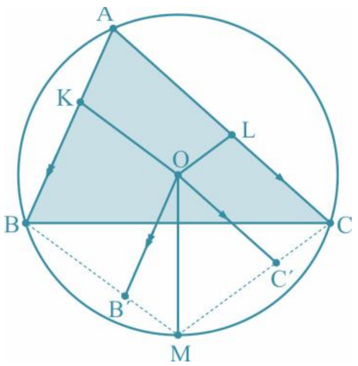


در انتها با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\Delta}{NDK}$ و $\overset{\Delta}{NDL}$ حکم مسئله‌ی اثبات خواهد شد

$$\left.\begin{array}{l}\angle NDK=\angle NDB+\angle BDK=(۹۰^\circ-\angle B)+(\dfrac{\angle B-\angle C}{۲})=\dfrac{\angle A}{۲}\\ \angle NDL=\angle NDC-\angle CDL=(۹۰^\circ-\angle C)-\dfrac{\angle B-\angle C}{۲}=\dfrac{\angle A}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle NDK=\angle NDL$$

اکنون با کمک رابطه‌ی $(*)$ هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\Delta}{NDK}$ و $\overset{\Delta}{NDL}$ اثبات می‌شود و داریم: NK=NL

راه‌حل دوم.

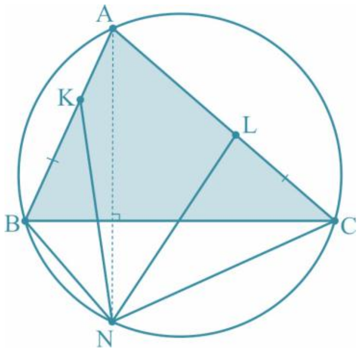


از نقطه‌ی O دو خط به‌موازات اضلاع AB و AC مثلث رسم می‌کنیم تا MB و MC را در B' و C' قطع کنند. طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در دو مثلث $\overset{\Delta}{OMB'}$ و $\overset{\Delta}{OMC'}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{OB'}{\sin(\dfrac{\angle B+\angle C}{۲})}=\dfrac{R}{\sin(\angle C+\dfrac{\angle A}{۲})}\\ \dfrac{OC'}{\sin(\dfrac{\angle B+\angle C}{۲})}=\dfrac{R}{\sin(\angle C+\dfrac{\angle A}{۲})}\end{array}\right\}\Rightarrow OB'=OC'\Rightarrow KB=LC=x \qquad (۱)$$

طبق رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید که:

$$\frac{X}{R}=\frac{\sin\left(\dfrac{\angle B+\angle C}{۲}\right)}{\sin\left(\angle C+\dfrac{\angle A}{۲}\right)}=\frac{\sin\left(\dfrac{\angle B+\angle C}{۲}\right)}{\cos\left(\dfrac{\angle B-\angle C}{۲}\right)} \qquad (۲)$$



اکنون طول دو پاره‌خط NK و NL را با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $\overset{\Delta}{BNK}$ و $\overset{\Delta}{CNL}$ به دست آورده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} NK^۲ = NB^۲ + BK^۲ - ۲NB.BK.\cos(۹۰^\circ - \angle C + \angle B) \\ NL^۲ = NC^۲ + CL^۲ - ۲NC.CL.\cos(۹۰^\circ - \angle B + \angle C) \end{cases}$$

حال چون $BK = CL = x$ داریم:

$$NK = NL$$
$$\Leftrightarrow NB^۲ - ۲NB.x.\cos(۹۰^\circ - \angle C + \angle B) = NC^۲ - ۲NC.\cos(۹۰^\circ - \angle C + \angle B)$$
$$\Leftrightarrow NB^۲ - ۲NB.x.\sin(\angle C - \angle B) = NC^۲ - ۲NC.x.\sin(\angle C - \angle B) \qquad (۳)$$

از قضیه سینوس‌ها داریم:

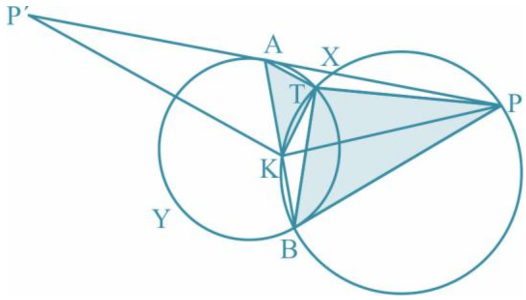
$$NB = ۲R.\sin(۹۰^\circ - \angle B) = ۲R.\cos\angle B, NC = ۲R.\sin(۹۰^\circ - \angle C) = ۲R.\cos\angle C$$

حال رابطه‌ی (۳) را می‌توان به‌صورت ساده‌تری نوشت:

$$۴R^۲.\cos^۲\angle B + ۴R.x.\cos\angle B.\sin(\angle B - \angle C) = ۴R^۲.\cos\angle C - ۴R.x.\cos\angle C.\sin(\angle B - \angle C)$$
$$\Leftrightarrow x.\sin(\angle B - \angle C).\left[\cos\angle B + \cos\angle C\right] = R.\left[\cos\angle C - \cos\angle B\right].\left[\cos\angle B + \cos\angle C\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{R} = \frac{\cos\angle C - \cos\angle B}{\sin(\angle B - \angle C)} = \frac{۲\sin\left(\frac{\angle B - \angle C}{۲}\right)\sin\left(\frac{\angle B + \angle C}{۲}\right)}{۲\sin\left(\frac{\angle B - \angle C}{۲}\right)\cos\left(\frac{\angle B - \angle C}{۲}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\angle B + \angle C}{۲}\right)}{\cos\left(\frac{\angle B - \angle C}{۲}\right)}$$

این تساوی، همان رابطه‌ی (۲) هست و ازآنجاکه این مراحل بازگشت‌پذیرند خواهیم داشت: $NK = NL$

۴- راه‌حل اول. در این راه‌حل همه‌ی کمان‌ها متعلق به دایره‌ی C هستند.

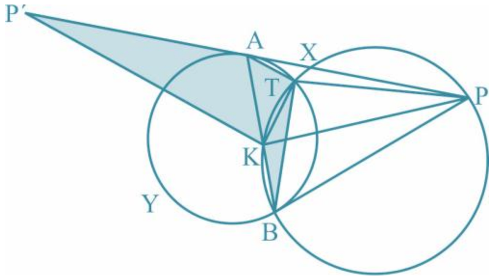


چهارضلعی NTPB محاطی است بنابراین $\angle AKT = BPT$:

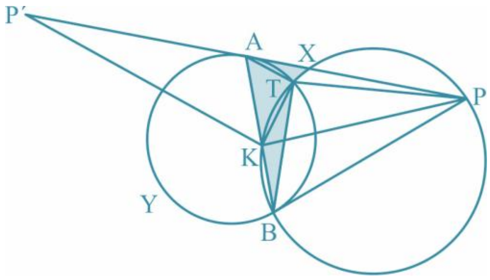
$$\left.\begin{array}{l}\angle TAK = \dfrac{TB}{2} = \angle TBP \\ \angle AKT = \angle BPT\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{TAK} \sim TBP \Rightarrow \frac{TA}{TB} \overset{\triangle}{=} \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB'} = \frac{AK}{TA} \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\angle P'AK = \frac{AYB}{2} = \angle BTA \Big\} \Rightarrow P'\overset{\triangle}{A}K \sim \overset{\triangle}{BTA} \Rightarrow \angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT.$$



راه‌حل دوم. در این راه‌حل تنها رابطه‌ی (۱) را از راه دیگری ثابت می‌کنیم. قوت نقطه‌ی A را نسبت به دایره‌ی محیطی مثلث $\overset{\triangle}{PBK}$ محاسبه می‌کنیم:



$$AX.AP = AK.AB \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AP}{AK} = \frac{AP'}{AK} \qquad (1)$$

از طرفی چهارضلعی TKBP محاطی است:

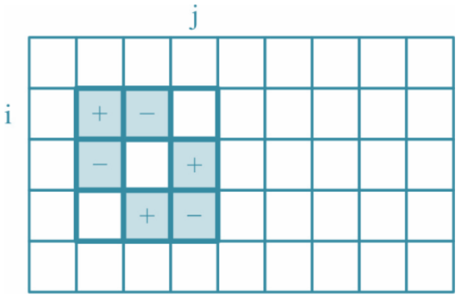
$$\left.\begin{array}{l}\angle TBP = \angle TXA \\ \angle TAX = \dfrac{AT}{2} = \angle TBA \\ \angle TAB = \dfrac{TB}{2} = \angle TBP\end{array}\right| \Rightarrow \overset{\triangle}{TAB} \sim \overset{\triangle}{TXB} \Rightarrow \frac{AB}{XA} = \frac{TB}{TA} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{AP'}{AK} = \frac{TB}{TA} \Rightarrow \frac{TP'}{TB} = \frac{AK}{TA}$$

۵- ابتدا حکم مسئله‌ی را در حالتی که $m, n \geq 3$ اثبات می‌کنیم. در حالتی که یکی از m و n کمتر از ۳ باشد، زیر جدول ۳ × ۳ وجود ندارد. پس می‌توان هر زیر جدول ۳ × ۳ آن را صفر کرد. در این حالت باید ثابت کنیم جدول را می‌توان با اعمال معرفی‌شده صفر کرد. این قسمت را در انتها ثابت می‌کنیم.

عدد نوشته‌شده در خانه‌ی سطر i و ستون j را با A(i,j) نشان می‌دهیم. یک زیر جدول ۳ × ۳ در نظر بگیرید که خانه‌ی گوشه‌ی بالا - راست آن، (i,j) باشد. این زیر جدول را با S(i,j) نشان می‌دهیم.

منظور از شاخص این زیر جدول، عدد حاصل از جمع زدن اعداد خانه‌های مشخص‌شده در شکل زیر با علامت‌های مشخص‌شده است، یعنی عدد

$$A(i+1,j) - A(i+2,j) + A(i+2,j-1) - A(i+i,j-2) + A(i,j-2) - A(i,j-1)$$



خانه‌های مشخص‌شده در شکل بالا دارای این خاصیت هستند که هر ردیف افقی یا عمودی یا اریب، خانه‌های مشخص‌شده در شکل بالا را یا قطع نمی‌کند و یا در دوخانه با علامت مخالف قطع می‌کند. پس با انجام هر یک از اعمال مجاز در صورت‌مسئله، شاخص یک زیر جدول تغییر نمی‌کند. حال ازآنجاکه بنا بر فرض، می‌توان اعداد هر زیر جدول ۳×۳ را صفر کرد، و چون شاخص در طول این فرآیند تغییر نمی‌کند پس شاخص هر زیر جدول ۳×۳ از ابتدا صفر است و در طول فرآیند نیز صفر می‌ماند.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات حکم را داریم. حکم را با استقرا روی $m+n$ اثبات می‌کنیم. پایه‌ی استقرا در حالتی است که $m+n=۶$، یعنی $m=n=۳$ در این حالت حکم بدیهی است چون کل جدول یک زیر جدول ۳×۳ است. حال فرض کنید $m+n>۶$ پس دست‌کم یکی از m و n از ۳ بیش‌تر است. فرض می‌کنیم $m>۳$ (حالت $n>۳$ مشابه است). حال زیر جدولی از جدول اصلی را در نظر بگیرید که از حذف ستون آخر به‌دست‌آمده است. فرض استقرا برای این زیر جدول $n\times(m-۱)$ برقرار است. پس بنا بر استقرا، می‌توان با استفاده از اعمال مجاز، همه‌ی اعداد این زیر جدول را صفر کرد. پس به جدولی می‌رسیم که تنها ستون آخر آن ممکن است نا صفر باشد. ادعا می‌کنیم که در این حالت اعداد ستون آخر به‌جز عدد خانه‌ی بالا - راست، باید برابر باشند. زیر جدول $S(۱,m)$ را در نظر بگیرید شاخص این جدول برابر است با

$$A(۲,m)-A(۳,m)+A(۳,m-۱)-A(۲,m-۲)+A(۱,m-۲)-A(۱,m-۱)=A(۲,m)-A((۳,m)$$

از طرفی بنا بر آنچه گفته شد، این شاخص باید صفر باشد. پس $A(۳,m)=(۲,m)$ با در نظر گرفتن زیر جدول‌های $S(۳,m)$ $S(۴,m)$،... و $S(n-۲,m)$ و تکرار استدلال فوق، مشابهاً نتیجه می‌شود $A(۵,m)=A(۴,m),A(۴,m)=A(۳,m)$,... و $A(n,m)=A(n-۱,m)$ پس در ستون آخر، مقادیر همه‌ی خانه‌ها به‌جز خانه $(۱,m)$ با یکدیگر برابرند. پس با استفاده از تعدادی عمل مجاز روی ستون آخر می‌توان همه‌ی آن‌ها را صفر کرد و سپس با استفاده از ردیف اریبی که تنها از خانه‌ی $(۱,m)$ تشکیل‌شده می‌توان خانه‌ی $(۱,m)$ را نیز صفر کرد و بنابراین کل جدول صفر می‌شود.

تنها می‌ماند حالتی را ثابت کنیم که حداقل یکی از m و n از ۳ کمتر باشند. مثلاً فرض کنید $m<۳$ (حالت $n<۳$ مشابه است). اگر $m=۱$، به‌وضوح می‌توان با استفاده از سطرها، همه‌ی خانه‌ها را صفر کرد. اگر $m=۲$ روش زیر را به کار می‌بریم.

ابتدا با استفاده از سطر nام، $A(n,۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n,۲)$، $A(n,۲)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از سطر $(n-۱,۲)$، $A(n-۱,۱)$ را صفر می‌کنیم و همین فرآیند را ادامه می‌دهیم تا همه‌ی جدول صفر شود.

۶- ماخ لم ۱. به ازای هر $n\geq۳$ داریم $a_n\geq۳$

اثبات. فرض کنید $a_n<۳$ اگر $a_{n-۱}\geq a_{n-۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\geq۲\Rightarrow\left[\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\right]\geq۲\Rightarrow\left[\frac{۲a_{n-۲}}{a_{n-۱}}\right]=۰\Rightarrow a_{n-۱}>۲a_{n-۲}\Rightarrow\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}>۴$$

که با فرض $a_n<۳$ در تناقض است. در حالتی که $a_{n-۲}\geq a_{n-۱}$ نیز استدلال کاملاً مشابه است چون رابطه‌ی بازگشتی نسبت به دو جمله قبل متقارن است

لم۲. به ازای هر $n\geq۳$ داریم: $a_{n+۲}<\max\{a_{n+۱}+۱,a_n\}$ یا $a_{n+۱}=a_n$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a_{n+۱}\neq a_n$. همچنین به علت تقارن رابطه‌ی بازگشتی بدون کاسته‌شدن از کلیت فرض می‌کنیم $a_n=\max\{a_{n+۱},a_n\}$ پس:

$$\frac{۲a_{n+۱}}{a_n} < ۲$$

از طرفی:

$$a_{n+۱}, a_n \geq ۳ \Rightarrow \frac{۲a_n}{a_{n+۱}} \leq \frac{۲a_n}{۳} \Rightarrow a_n + ۲ = \left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right] + \left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right] \leq ۱ + \frac{۲a_n}{۳} \leq \frac{a_n}{۳} + \frac{۲a_n}{۳} = a_n$$

و با توجه به فرض $a_{n+۱} \neq a_n$ هر دوی نابرابری‌های $\frac{۲a_n}{۳} \leq \frac{۲a_n}{a_{n+۱}}$ و $۱ \leq \frac{a_n}{۳}$ نمی‌توانند تساوی باشند و حکم نتیجه می‌شود.

لم۳. K وجود دارد که $a_k = a_{k+۱}$

اثبات. اگر چنین نباشد طبق لم ۲ برای هر $n \geq ۳$:

$$a_{n+۲} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$$

و

$$a_{n+۳} < \max\{a_{n+۲}, a_{n+۱}\}$$

در حالتی که $a_{n+۲} < a_{n+۳}$ نتیجه می‌شود $a_{n+۳} < a_{n+۱}$ یعنی

$$\max\{a_{n+۳}, a_{n+۲}\} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$$

و در حالتی که $a_{n+۲} > a_{n+۳}$ نیز نتیجه می‌شود

$$\max\{a_{n+۳}, a_{n+۲}\} < \max\{a_{n+۱}, a_n\}$$

یعنی ماکزیمم جفت جمله‌های متوالی همواره اکیداً نزولی است که غیرممکن است. توجه کنید که این استدلال نتیجه می‌دهد که دو جمله برابر و متوالی بی‌نهایت بار در دنباله ظاهر می‌شود.

حال توجه کنید که همواره پس از دو جمله‌ای برابر در دنباله ۴ ظاهر می‌شود و اگر آن دو عدد برابر ۳ یا ۴ باشند مطلوب حاصل می‌شود و چون اگر ۳ و ۴ پشت سر هم بیایند جمله‌ی بعد از ۴ هم ۳ می‌شود. اما اگر آن دو عدد برابر بزرگ‌تر از ۴ باشند مثلاً $a_{k+m} = a_k + m + ۱$ باشد که m فرد است، با توجه به اثبات لم ۳ داریم:

$$a_{k+۱} = \max\ a_{k+۱}, a_{k+۲} = ۴\} > \max\{a_{k+۳}, a_{k+۴}\} > \ldots > \max\{a_{k+m}, a_{k+m+۱}\} = a_{k+m}$$

و در حالتی که m زوج است داریم:

$$a_{k+۱} = \max\ a_{k+۱}, a_{k+۲} = ۴\} > \max\{a_{k+۳}, a_{k+۴}\} > \ldots > \max\{a_{k+m-۱}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}$$

یعنی تا وقتی اعداد متوالی برابر بیش از ۴ باشند همواره یک جفت برابر متوالی کمتر از جفت برابر متوالی قبلی است ولی این روند نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و پس از مدتی به دو عدد ۳ یا ۴ متوالی می‌رسیم که مطلوب ما را به دست می‌دهد.