جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
سی‌امین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۱

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
-	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته اشند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- دایره‌ی C_1 و نقطه‌ی O روی آن مفروض است. دایره‌ی C_2 به مرکز O، C_1 را در دو نقطه‌ی P و Q قطع می‌کند. C_3دایره‌ای است که در نقطه‌ی R بر C_2 مماس خارج و در نقطه‌ی S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطه‌ی Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۲- فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد $n,۳,۲,۱$ را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیهی از مجموع دو عدد مجاورش باشد؟

۳- ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > ۱$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعداد $n+t, n^۲+t, n^۳+t, \ldots$ توان کامل نیستند.

(دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی n توان کامل گفته می‌شود که اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $m \geq ۲$ و $a = b^m$).

۴- الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1، A_2، A_3 از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعی n، مجموع اعضای A_n برابر $n^۲ + ۱۳۹۱$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی A_1 و A_2 و A_3 و ... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقان یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعی n، مجموع اعضای A_n برابر $n^۲ + ۱۳۹۱$ باشد؟

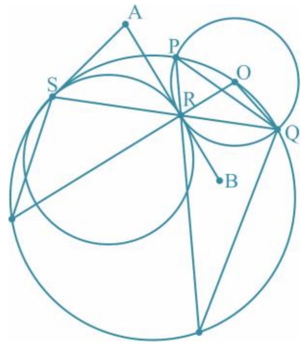
۵- چندجمله‌ای درجه‌ی دومی $x^۲ + ax + b$، با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این‌که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^۲ - ۴b$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیرهای a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ای چهار متغیره‌ی $P(a,b,c,d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:

چندجمله‌ای درجه‌ی چهار $x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل‌ضرب چهار چندجمله‌ای درجه‌ی یک باشد اگر و تنها اگر $P(a,b,c,d) \geq ۰$.

۶- دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط E, D و F به ترتیب بر اضلاع CA, BC و AB مماس است. قرینه‌ی نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۱

۱- برای اثبات موازی بودن QX و SY باید ثابت کنیم کمان‌های XY و SPQ روز دایره‌ی C_1 برابرند. برای این کار مماس بر دایره‌ی C_1 در نقطه‌ی S را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با مماس مشترک دایره‌های C_2 و C_3 در نقطه‌ی R را A می‌نامیم. حال با توجه به شکل روابط زیر برقرار است:



$$\left.\begin{aligned}\angle ASQ = SPQ = SR\\ \angle ASQ = ARS = BRQ = RQ\end{aligned}\right\} \Rightarrow SPQ = SR = RQ \qquad (۱)$$

هم‌چنین روابط زیر نیز برقرار است:

$$\frac{۱}{۲}QX = \angle QPX = \frac{۱}{۲}RQ = \frac{۱}{۲}\angle YOQ = \frac{۱}{۲}YXQ = \frac{۱}{۲}QX + XY$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}QX = \frac{۱}{۲}XY \Rightarrow QX = XY \qquad (۳)$$

$$(۲),(۳) \underset{\Rightarrow}{} \quad QX = XY = RQ$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۴) داریم: . $SPQ = RQ = XY$ و حکم ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. داریم

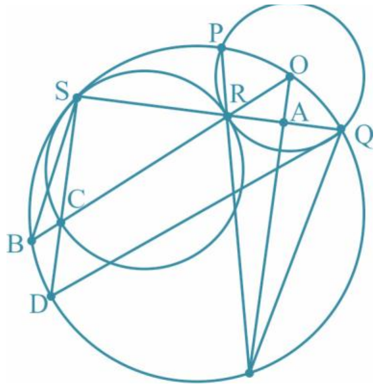
$$OP = OQ \Rightarrow OP = OQ$$

$$OP = OR \Rightarrow \angle OPR = \angle ORP$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(OP + XY) = \frac{۱}{۲}OQ + XQ \Rightarrow XQ = XY$$

$$\Rightarrow \angle ROX = \angle QOX \overset{OQ=OR}{\Rightarrow} \angle OAR = ۹۰^\circ \qquad (۱)$$

هم‌چنین چون C_2 و C_3 در نقطه‌ی R مماس هستند، OR از مرکز دایره C_3 نیز عبور می‌کند. پس مرکز دایره C_3 روی خط RC واقع است (C محل برخورد RY و دایره C_3 است) در نتیجه (۲) $\angle CSR = ۹۰$.



از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود (۳) $SD \parallel OX$. همچنین با توجه به این‌که S مرکز تجانس $C_۱$ و $C_۳$ است، پس DQ و YQ موازی هستند (D محل برخورد امتداد SC با دایره $C_۱$ است.) درنتیجه $YD = OQ$. پس (۴) $\angle YSD = \angle QXO$ حال با توجه به (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که QX و SY نیز موازی‌اند و حکم ثابت می‌شود.

۲- ماخ آرایشی از اعداد ۱ تا n با خاصیت مطلوب را یک آرایش مجاز می‌نامیم. آرایش‌هایی را که با یک دوران به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض می‌کنیم. برای $n = ۳$ فقط دو آرایش مجاز و برای $n = ۴$ نیز فقط دو آرایش مجاز (اعداد به ترتیب ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) وجود دارد. حال با استقرا ثابت می‌کنیم که برای اعداد زوج بزرگ‌تر از ۳ دو آرایش و برای اعداد فرد بزرگ‌تر از ۳، چهار آرایش وجود دارد.

لم. در یک آرایش مجاز ۱ تا n، مجموعِ دو عدد مجاور n برابر با n است و اگر n را حذف کنیم به آرایشی مجاز برای ۱ تا $n-۱$ می‌رسیم. برعکس، اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا n-1، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید. اثبات. اگر دو عدد مجاور n، a و b باشند، داریم $a + b \le ۲n - ۳$ و $n \mid a + b$ پس $a + b = n$ حال اگر دو عدد مجاور a و b (به‌غیراز n) به ترتیب x و y باشند (یعنی حالت $x\,a\,n\,b\,y$):

$$a \mid x + n \Leftrightarrow a \mid x + a + b \Leftrightarrow a \mid x + b$$
$$b \mid y + n \Leftrightarrow b \mid y + a + b \Leftrightarrow b \mid y + a$$

پس با حذف n به آرایش مطلوبی از اعداد ۱،۲،....،$n-۱$ می‌رسیم و برعکس اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n-۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید.

حال فرض کنیم حکم استقرا برای عدد زوج n درست باشد، سپس حکم را برای $n+۱$ و $n+۲$ ثابت می‌کنیم. بنا بر فرض استقرا، تنها دو آرایش مجاز برای ۱ تا n وجود دارد که عبارت‌اند از چینش اعداد ۱ تا n به‌طور ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد. حال باید $n+۱$ را بین دو عدد مجاور از این دو آرایش که مجموعشان $n+۱$ است، قرار دهیم. به‌راحتی معلوم می‌شود که این دو عدد فقط می‌توانند $\{۱, n\}$ یا $\{\frac{n}{۲}, \frac{n}{۲}+۱\}$ باشند. پس برای عدد فرد $n+۱$ چهار حالت صحیح وجود دارد که دوتای آن اعداد به ترتیب دور دایره قرارگرفته‌اند (این دو حالت را حالات الف نام می‌گذاریم) و در دو حالت دیگر (که با حالات ب نام‌گذاری می‌کنیم) غیر از $n+۱$ بقیه اعداد به ترتیب قرارگرفته‌اند. حال می‌خواهیم جواب مسئله‌ی را برای عدد زوج $n+۲$ به دست بیاوریم. باید عدد $n+۲$ را بین دو عدد مجاور از آرایش‌های مجاز اعداد $۱, ۲, \ldots, n+۱$ قرار دهیم، که مجموع آن‌ها $n+۲$ باشد.. به‌راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های الف $n+۲$ فقط می‌تواند بین ۱ و $n+۱$ قرار گیرد. همچنین به‌راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های ب مجموع هیچ دو عدد مجاوری $n+۲$ نمی‌شود. بنابراین برای عدد زوج $n+۲$ نیز فقط دو آرایش مجاز وجود دارد. پس گام استقرا اثبات شد و اثبات کامل است.

راه‌حل دوم. حل مسئله‌ی را با چند لم آغاز می‌کنیم:

لم. هیچ دو عدد زوجی در دایره کنار هم نیستند.

اثبات. واضح است اگر اعداد $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و .... a_n به ترتیب دور دایره چیده شده باشند و $a_۱$ و $a_۲$ زوج باشند آنگاه $a_۳$ هم زوج است زیرا می‌دانیم $a_۲ \mid a_۳ + a_۱$. و با تکرار این روند همه‌ی اعداد زوج می‌شوند که تناقض است.

لم. اگر n زوج باشد اعداد دور دایره یکی در میان زوج هستند و اگر n فرد باشد تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی جفت‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

اثبات. طبق لم ۱ اگر n زوج باشد چون تعداد اعداد زوج و فرد برابر است و هیچ دو عدد زوجی کنار هم نیستند پس اعداد یکی در میان زوج و فرد هستند و اگر n فرد باشد چون تعداد اعداد فرد یکی بیشتر است پس تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی زوج‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

حال برای اعداد زوج ثابت می‌کنیم که تنها یک چینش متوالی (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد ۱ تا n به همین ترتیب دور دایره چیده شده‌اند.

عدد $n-1$ فرد است پس طبق لم ۲ اعداد مجاور آن زوج هستند. پس مجموع دو عدد مجاور باید مضرب زوجی از $n-1$ باشد. پس باید مجموع آن‌ها برابر $2n-2$ باشد (بیش‌تر از $2n-2$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعداد باقی‌مانده n و $n-2$ هستند که مجموعشان $2n'-2$ است). پس قطعاً اعداد مجاور $n-1$ باید n و $n-2$ باشند. پس اعداد n و $n-1$ و $n-2$ به شکل متوالی قرار دارند. حال با استقرا نشان می‌دهیم همه‌ی اعداد به شکل متوالی قرار دارند. فرض کنید اعداد n و $n-1$ و ... و n-k به‌طور متوالی قرارگرفته‌اند $(n-2>k>2)$ نشان می‌دهیم عدد بعدی $n-k-1$ است. فرض کنید عدد بعدی x باشد داریم $n-k|x+n-k+1$ که نشان می‌دهد $n-k|x+1$. حال چون x کم‌تر از n-k است تنها عدد ممکن n-k-1 است که نشان می‌دهد عدد بعدی n-k-1 است که این روند متوالی بودن اعداد را اثبات می‌کند.

حال برای اعداد فرد $n>3$ ثابت می‌کنیم که تنها دو آرایش مجاز (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد حتماً باید به یکی از

زیر باشند $1,2,\ldots,n$

$$1,2,\ldots\frac{n-1}{2},n,\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\ldots,n-1$$

لم. اگر n فرد باشد یکی از تنها دو عدد فرد متوالی عدد n است.

اثبات. مجموع اعداد مجاورِ n از $2n$ کم‌تر است و چون باید مضربِ n باشد باید برابر n باشد ولی اگر اعداد مجاورِ n دو عدد زوج باشند مجموع آن‌ها نمی‌تواند n شود چون n فرد است. پس یکی از دو عدد فرد متوالی عدد n است. اگر $n=5$ حکم به‌راحتی اثبات می‌شود پس فرض می‌کنیم $n>5$. حال به ادامه‌ی اثبات می‌پردازیم: $n-2$ فرد است پس طبق لم ۲ و لم ۳ هر دو عدد مجاورِ آن یا زوج هستند یا یکی از اعداد مجاور آن n است. اگر n مجاور $n-2$ باشد مجاورِ دیگرِ $n-2$ فقط می‌تواند $n-4$ باشد چون مجموع مجاورهای $n-2$ باید بر $n-2$ بخش‌پذیر باشد و این مجموع حداکثر می‌توانند $2n-1$ باشد.

که چون $n>5$, $3n-6>2n-1$ پس باید $2n-4$ باشد. پس n و $n-2$ و $n-4$ مجاور هستند ولی طبق لم ۲ امکان ندارد ۳ عدد فرد کنار هم باشند. پس مجاورهای $n-2$ دو عدد زوج هستند. حال مانند اثبات برای اعداد زوج مجموعِ دو عدد مجاور باید مضرب زوجی از $n-2$ باشد پس قطعاً باید برابر $2n-4$ باشد(بیشتر از $2n-4$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعداد باقی‌مانده n و $n-1$ هستند که مجموعشان $2n-1$ است که کمتر از $3n-6$ است). پس اعداد مجاور $n-2$ باید $n-1$ و $n-3$ باشند.

تا اینجا دیدم $n-1$ و $n-2$ و $n-3$ متوالی هستند. حال اگر مجاور $n-1$ باشد داریم $n-1|x+n-2$ پس دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: $x=n$. در این حالت مشابه اثبات اعداد زوج می‌توان نتیجه گرفت اعداد متوالی و به‌صورت ۱، ۲، ...، n هستند.

حالت دوم: فرض کنید k بزرگ‌ترین عددی است که اعداد $n-1$، $n-2$، ..... و $n-k$ به‌طور متوالی قرارگرفته‌اند $(2<k<n-1)$.

نشان می‌دهیم $k=\frac{n-1}{2}$ و عدد بعدیِ آن n است. عدد بعدی را y بنامید. داریم $n-k|y+n-k+1$ که نشان می‌دهد $n-k|y+1$ از طرفی بنا بر نحوه‌ی انتخابِ k، y با $n-k-1$ برابر نیست و چون .. $n-k<y+1$ پس $n-k\geq\frac{n+1}{2}$

y=n. حال اگر عدد دیگر مجاور n را z بگیریم داریم $n|z+(n-k)$. ادعا می‌کنیم $n-k\geq\frac{n+1}{2}$. زیرا در غیر این صورت z و – k n هر دو کمتر از $\frac{n}{2}$ خواهند بود که با $n|z+(n-k)$ در تناقض است. پس $n-k\geq\frac{n+1}{2}$ و چون $n-k|n+1$ پس $k=\frac{n-1}{2}$ حال. چون مجموع اعداد مجاور n همان n است روشن است که عدد دیگر مجاور n باید $\frac{n-1}{2}$ باشد. حال به طرز مشابه می‌توان ثابت کرد اعداد ۱ و ۲ و ... و $\frac{n-3}{2}$ و $\frac{n-1}{2}$ متوالی می‌آیند پس آرایش موردنظر $n-1$ و ... و $\frac{n+3}{2}$ و $\frac{n+1}{2}$ و $\frac{n-1}{2}$ ... و ۲ و ۱ است.

۳- راه‌حل اول. فرض کنید $t+1=q^{\alpha}s$ که q عددی اول است و $(s,q)=1$. (درواقع α بزرگ‌ترین توانی از است که را می‌شمارد).

حال x_0 را طوری انتخاب کنید که $x_0\equiv 1$ (به پیمانه‌ی $q^{\alpha+1}$) و $x_0>t$ قرار دهید $n=x_0^{\alpha}$. ادعا می‌کنیم این n جواب مسئله‌ی است.

توجه کنید که برای هر i

$n^i+t\equiv 1+t\not\equiv 0$ (به پیمانه‌ی $q^{\alpha+1}$) ولی $n^i+t\equiv 1+t\equiv 0$ (به پیمانه‌ی q^{α})

فرض کنید به ازای i ای n^i+t توان کامل شود. (فرض خلف) درنتیجه rای وجود دارد که $r>1$ و $n^i+t=y^r$ و چون نمای عدد اول q در تجزیه‌ی n^i+t به عوامل اول برابر با α است، α بر r بخش‌پذیر است. درنتیجه $\alpha\ge 2$ و $y^r=n^i+t=\left(x_0^{i\left(\frac{\alpha}{r}\right)}\right)^r+t=z^r+t$ از همین تساوی نتیجه می‌شود که $y>z$. حال توجه کنید،

$$z^r+t<z^r+x_0\le z^r+z\le z+1^{\,r}\le y^r=z^r+t$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و این n کار می‌کند.

دقت کنید در اثبات نابرابری سوم از بسط دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن،

$$(z+1)^r=z^r+rz^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}z^{r-2}+\ldots+rz+1\ge z^2+z$$

(نابرابری بالا برای $r\ge 2$ درست است)

راه‌حل دوم. دو حالت در نظر بگیرید

حالت اول. $t+1$ توان کامل نباشد. قرار دهید $n=t(t+1)^2+1$. ادعا می‌کنیم این n کار می‌کند. فرض کنید برای k ای n^k+t توان کامل شود. درنتیجه با تعریف $y=t(t+1)^2$،

$$(t(t+1)^2+1)^k+t=y^k+ky^{k-1}+\ldots+ky+t=(t+1)(b(t+1)+1)$$

(به ازای b مناسبی)

به‌وضوح $t+1$ و $b(t+1)+1$ نسبت به هم اول‌اند و ضربشان توان کامل است. پس بایستی هر یک توان کامل باشند که خلاف فرض اولیه‌ی ما است.

حالت دوم. $t+1$ توان کامل باشد. قرار دهید $t+1=m^r$ که m توان کامل نیست. (برای این کار r را بیش‌ترین توان ممکن انتخاب کنید) قرار دهید $n_0=t(t+1)^2+1$ و $n=n_0^r$ همین n جواب مسئله‌ی است.

فرض کنید به ازای k,c,d ای $n^k+t=c^d$ مشابه روش کار در حالت اول نتیجه می‌گیریم $t+1$ توان d ام کامل است. پس با توجه به این‌که $t+1$ توان r ام کامل نیز هست و r بیش‌ترین نمای ممکن است،

r بر d بخش‌پذیر است. پس $r=ld$ و

$$t=c^d-n^k=c^d-n_0^{kld}=(c-n_0)\left(c^{d-1}+c^{d-2}n_0^{kl}+\ldots+n_0^{kl(d-1)}\right)\ge n_0>t$$

که تناقض است.

۴- الف) با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم چنین زیرمجموعه‌هایی یافت نمی‌شود.

فرض کنید این‌طور نباشد و بتوان اعداد طبیعی را به زیرمجموعه‌هایی دو عضوی A_1، A_2، A_3 افراز کرد طوری که حاصل جمع اعضای A_i برابر $1391+i$ باشد. اگر $A_i=\{a_i,b_i\}$ باشد آنگاه چون a_i و b_i اعداد طبیعی‌اند و $a_i+b_i=1391+i$ پس $a_i,b_i<1391+i$ داریم:

$$i\le 1391\Rightarrow a_{i,}b_i<1391+i\le 1391+1391=2\times 1391$$

پس همه‌ی اعضای A_1، A_2، A_3، ...، A_{1391} از 2×1391 کمتر هستند، یعنی حداکثر $2\times 1391-1$ عدد را می‌توان در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار داد که با فرض اولیه مبنی بر افراد به مجموعه‌های دو عضوی، که در نتیجه‌ی آن 2×1391 عدد در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار می‌گیرد. تناقض دارد. این تناقض نشان می‌دهد فرض اولیه نادرست بوده و اعداد طبیعی را نمی‌توان به زیرمجموعه‌های دو عضوی با شرایط خواسته‌شده‌ی مسئله‌ی افراز کرد.

ب) با ارائه‌ی روشی برای ساخت این مجموعه‌ها نشان می‌دهیم جواب مثبت است.

روش به این صورت است که در مرحله‌ی i اُم، a_i، کوچک‌ترین عددی که تابه‌حال در هیچ مجموعه‌ای قرار نگرفته و $b_i=1391+i^2-a_i$ را در مجموعه‌ی A_i قرا می‌دهیم. در مراحل زیر نشان می‌دهیم مجموعه‌های حاصل شرایط مسئله‌ی را دار است.

آ.همه‌ی اعداد طبیعی در حداقل یکی از مجموعه‌ها قرار می‌گیرد در غیر این صورت، فرض کنید a کوچک‌ترین عددی باشد که در هیچ مجموعه‌ای نیامده و در مرحله‌ی i- اُم همه‌ی اعداد کوچک‌تر از a انتخاب شده باشند، در این صورت طبق روش فوق در مرحله i عدد a انتخاب می‌شود. پس فرض اولیه نادرست بوده و همه‌ی اعداد طبیعی در این مجموعه‌ها پوشانده می‌شوند.

ب. در مراحل زیر ثابت می‌کنیم هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده و بدین ترتیب ثابت می‌شود خروجی این روش افرازی است که موردنظر سؤال است.

لم. $a_i\le 2i-1$

اثبات. تا پیش از مرحله‌ی i-اُم، عدد در مجموعه‌ها قرارگرفته‌اند، پس دست‌کم یکی از اعداد کمتر یا مساوی انتخاب نشده است درنتیجه:

۱. با توجه به اینکه در هر مرحله کوچک‌ترین عددی است که تابه‌حال در هیچ مجموعه‌ای نیامده پس با هیچ‌کدام از عدد قبلی برابر نیست و هم‌چنین که باشد.

$$b_i=1392+i^2-a_i\ge 1391+\ i-1\ ^2>2i-1\ge a_i$$

۲. اگر $i>j$ آنگاه:

$$b_i=1392+i^2-a_i\ge 1391+i^2-2i+1=1391+\ i-1\ ^2>b_j>a_i$$

به‌این‌ترتیب ثابت‌شده است که هیچ دو عدد در یک مجموعه یا در مجموعه‌های متفاوت یا یکدیگر برابر نیستند درنتیجه هر مجموعه دقیقاً دو عضوی است و هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده است.

۵- ابتدا فرض کنید $Q\ b,d\ =P\ 0,b,0,d$ در این صورت $Q\ b,d\ \ge 0$ اگر و تنها اگر چندجمله‌ای x^4+bx^2+d دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد و این مورد هم برقرار است اگر و تنها اگر x^2+bx+d دارای دو ریشه حقیقی نامنفی باشد. (چراکه

$$x^2+bx+d=\ x-a\ \ x-\beta\ \to x^4+bx^2+d=\ x^2-\alpha\ \ x^2-\beta$$

و $x^2-\alpha$ به عوامل خطی تجزیه می‌شود اگر و تنها اگر $\alpha\ge 0$ حال ثابت می‌کنیم x^2+bx+d دارای دو ریشه‌ی حقیقی نامنفی است اگر و تنها اگر $b^2-4d\ge 0, b\ge 0$.

فرض کنید $\alpha,\beta\ge 0$ ریشه‌های x^2+bx+d باشند در این صورت:

$$x^2+bx+d=\ x-\alpha\ \ x-\beta\ =x^2-\ \alpha+\beta\ x+\alpha\beta$$

و بنابراین $b=-\ \alpha+\beta\ \le 0, d=\alpha\beta\ge 0$ و چون چندجمله‌ای دارای ریشه بود پس $b^2-4d\ge 0$.

حال برعکس فرض کنید $b^2-4d\ge 0, b\le 0, d\ge 0$ بنابراین x^2+bx+d دارای دو ریشه‌ی حقیقی است فرض کنید این ریشه‌ها α,β باشند. در این صورت مانند قبل $b=-\ \alpha+\beta\ , d=\alpha\beta$ حال $d\ge 0$ بنابراین دارای مخالف نیستند، بنابراین اگر $\alpha<0$ آنگاه $\beta\le 0$ و درنتیجه $b=-\ \alpha+\beta\ >0$ که خلاف فرض ماست پس داریم و آنچه می‌خواستیم ثابت شد.

حال داریم:

$$Q(b,d)\ge 0 \Leftrightarrow b^2-4d\ge 0, b\le 0, d\ge 0 \qquad (1)$$

حال برای هر $b<0$ چندجمله‌ای تک متغیره‌ی $Q_b(y)$ که $Q_b(y)=Q(b,y)$ برای $0\le y\le \frac{b^2}{4}$ نامنفی و برای $y<0$ منفی است و چون هرچند جمله‌ای تابعی پیوسته است پس $Q_b(0)=0$. درنتیجه چندجمله‌ای $L(b)=Q(b,0)$ برای هر $b<0$ برابر صفر شده است و این یعنی این چندجمله‌ای دارای بی‌نهایت ریشه است و بنابراین همه‌جا صفر است و این یعنی $L(1)=Q(1,0)=0$ بنابراین طبق (۱) باید داشته باشیم $1\le 0$. پس به تناقض رسیدیم پس حکم مسئله‌ی ثابت شد.

۶- راه‌حل اول. مثلث BDT متساوی‌الساقین به رأس B است. بنابراین داریم $\angle BDT=\frac{1}{2}\angle B$. به‌طور مشابه $\angle CDS=\frac{1}{2}\angle C$. بنابراین:

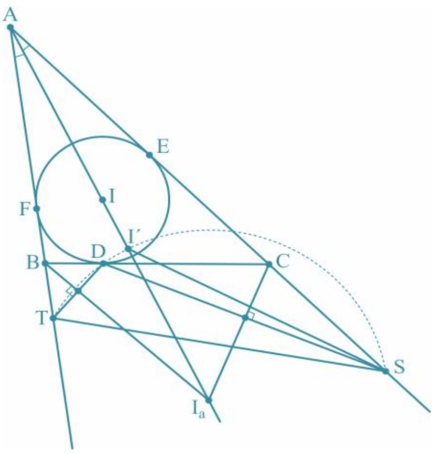
$$\angle TDS=180^\circ-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C=90^\circ+\frac{1}{2}A$$

اگر مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABC و ATS را به ترتیب I و I' بنامیم، خواهیم داشت:

$$I'TS=\frac{1}{2}\angle T \quad , \quad I'ST=\frac{1}{2}\angle S$$

$$\Rightarrow \angle TI'S=180^\circ-\frac{1}{2}\angle T-\frac{1}{2}\angle S=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$$

بنابراین $\angle TDS=\angle TI'S$ و چون I' و D هر دو یک طرف خط TS هستند، چهارضلعی $TDI'S$ محاطی است. مرکز دایره‌ی محیطی این چهارضلعی همان محل برخورد عمودمنصف‌های TD و SD است که همان نیمسازهای خارجی زوایای $\angle B$ و $\angle C$ از مثلث ABC هستند. پس مرکز این دایره همان مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC متناظر با رأس A است که آن را I_a می‌نامیم.



اگر دایره‌ی به مرکز I_a و شعاع I_aD را با خط ω بنامیم، I' همان تقاطع ω با خط AI_a است. همچنین I_a و D در دو طرف TS قرار دارند (چون $\angle TDS>90^\circ$ و I_a مرکز دایره‌ی محیطی مثلث TDS است) درحالی‌که I'، D و I در یک‌طرف TS قرار دارند. پس I' روی نیم‌خط I_aI است که خط‌المرکزین دایره‌ی محاطی و ω است. پس برای اثبات این که داخل یا روی دایره‌ی محاطی است، کافی است ثابت کنیم $I_aI-r\le I_aI'\le I_aI+r$ که در آن r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است. اما $r=I_aD$ و $I_aI'=I_aD$ پس نامساوی‌های فوق تبدیل می‌شوند که همان نامساوی مثلث در مثلث I_aID است و حکم ثابت می‌شود.

راه حل دوم. فرض کنید E' نقطه‌ی ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS باضلع AS باشد. با توجه به این که زاویه‌ی II' با ضلع AC برابر با $\frac{A}{2}$ است، خواهیم داشت $EE'=II'\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ پس کافی است ثابت کنیم $EE'\le r\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ می‌دانیم

$$AE=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)\ ,$$

$$AE' = \frac{۱}{۲}\ AT + AS - TS\ = \frac{۱}{۲}\ \ AB + BD\ \ +\ \ AC + CD\ \ - TS$$

توجه کنید که $AE' > AE$، زیرا دایره‌ی محاطی داخلی مثلث کاملاً داخل مثلث ATS است و بنـابراین شـعاع دایـره‌ی محـاطی داخلـی ATS بیشتر از r است. بنابراین $EE' = BC - \frac{۱}{۲}TS$ پس کافی است ثابت کنیم $BC - \frac{۱}{۲}TS \le r\cos\frac{A}{۲}$. امـا اگـر M را تقـاطع EF با AI بگیریم، داریم

$$r\cos\frac{A}{s} = I\,E\sin\angle MIE = EM = \frac{۱}{۲}EF.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $۲BC - TS \le EF$. داریم $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = ۲\overrightarrow{BC}$ زیرا

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = \ \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}\ \ +\ \ \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS}$$

و $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CS} = ۰$. بنابراین

$$۲BC = \left|۲\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS}\right| \le \left|\overrightarrow{FE}\right| + \left|\overrightarrow{TS}\right| = FE + TS$$

و حکم ثابت می‌شود.