جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۹

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
-	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a>b$، اگر دو عدد $ab-1$ و $a+b$ نسبت به هم اول باشند و $ab+1$ و $a-b$ هم نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab+1)^2+(a-b)^2$ مربع کامل نیست.

۲- n نقطه‌ی در صفحه‌ی داریم که هیچ سه‌تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه‌ی باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{2}{3}(n^2-n)$ بیشتر نیست.

۳- دایره‌های W_1 و W_2 در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی W_1 و W_2 هستند به‌طوری‌که AB بر دو دایره‌ی مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره W_2 را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید: $\angle DPM=\angle BDC$

۴- ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ عددهای حقیقی‌اند و $\min\{d,b+d\}>\max\{|c|,|a+c|\}$ ثابت کنید که معادله‌ی $P(x)=0$ در بازه‌ی $[-1,1]$ جواب ندارد.

۵- A و در مثلث ABC، $\angle A=60^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE=CF=BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به‌غیراز E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶- مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت‌نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت‌نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاس مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آنگاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-1)^2$ بیشتر نیست.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۹

۱- ابتدا دقت کنید که

$$(ab+1)^2+(a-b)^2=a^2b^2+a^2+b^2+1=(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$$

ادعا می‌کنیم که تحت شرایط مسئله‌ی a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند. زیرا اگر عـامل اول مشترکی مثل p داشته باشند، تفاضل آن‌ها یعنی a^2-b^2 باید بر p بخش‌پذیر باشد. پس $p|a+b$ و یا $p|a-b$.

اگر $p|a+b$، با توجه به این‌که $(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ بر p بخش‌پذیر است، باید $ab-1$ هم بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه نسبت به هم اول بودن $a+b$ و $ab-1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. مشابه این حالت اگر $p|a-b$، با توجه به این‌که $(ab+1)^2+(a-b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ هم بر p بخش‌پذیر است، باید $ab+1$ بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه نسبت به هم اول بودن $a-b$ و $ab+1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. پس در کل a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند و اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل باشد هر دو مربع کامل هستند. یعنی عدد صحیح x یافت می‌شود که $x^2=a^2+1$ این نتیجه می‌دهد که $(x-a)(x+a)=1$ و چون $x-a$ و $x+a$ هر دو صحیح هستند باید هر دو برابر ۱ یا هر دو برابر ۱- باشند. پس درهرصورت با هم برابرند که این نتیجه می‌دهد a برابر صفر است که با طبیعی بودن a تناقض دارد. بنابراین این حاصل‌ضرب نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۲- فرض کنید k مثلث با مساحت یک در بین مثلث‌های با رئوس در بین این نقاط موجود باشد. یک زوج از این نقاط را به‌دلخواه در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر d باشد. هر نقطه‌ی ی دیگری که مثلث تولید شده توسط آن و دو نقطه‌ی در نظر گرفته شده برابر یک باشد، باید فاصله‌ی برابر $\frac{2}{d}$ از خط شامل آن دو نقطه‌ی داشته باشد. پس این چنین نقاطی باید روی دو خط موازی و به فاصله‌ی $\frac{2}{d}$ با پاره‌خط شامل آن دو نقطه‌ی قرار داشته باشند و ازآنجاکه طبق فرض مسئله‌ی روی هیچ خطی سه نقطه‌ی از نقاط قرار ندارند تعداد چنین نقاطی حداکثر ۴ است (روی هرکدام حداکثر دو نقطه). حال دقت کنید که اگر برای همه‌ی $\binom{n}{2}$ زوج نقطه، تعداد این نقاط را بشماریم هر مثلث دقیقاً سه بار شمرده شده است. پس

$$4\binom{n}{2}\geq 3k\Rightarrow \frac{2}{3}(n^2-n)\geq k$$

و به‌این‌ترتیب حکم مسئله‌ی ثابت می‌شود.

۳- فرض کنید امتداد پاره‌خط PD که محور اصلی دو دایره است، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی N قطع کند. چهارضلعی BDPC محاطی است و درنتیجه $\angle BDC=\angle BPC$ بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle DPB=\angle BPC$ یا معادلاً $\angle DPB=\angle MPC$ نقطه‌ی N روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، بنابراین قوت آن نسبت به دو دایره برابر است:

$$NA^2=NB^2\Rightarrow NA=NB$$

حال داریم:

$$\angle PBC=\angle PDC=\frac{1}{2}\widehat{ADP}=\angle PAB$$

$$\angle PCB=\frac{1}{2}\widehat{PDB}=\angle PBA$$

پس مثلث PCB و PBA متشابه هستند و درنتیجه زاویه‌ی بین میانه و ضلع متناظر آن‌ها با هم برابر است. حال دقت کنید که PM میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث PBC و PN میانه‌ی ضلع AB در مثلث PAB است و لذا $\angle DPB = \angle NPB = MPC$ و این همان حکمی است که قصد اثبات آن را داشتیم.

۴- ماخ راه‌حل اول. به برهان خلف فرض کنید a یک ریشه حقیقی معادله باشد که $|a| \le 1$ بنابراین:

$$p(a) = 0 \Rightarrow a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \Rightarrow a\alpha^3 + c\alpha = - \ b\alpha^2 + d$$

$$\Rightarrow |\alpha||a\alpha^2 + c| = |b\alpha^2 + d| \Rightarrow |a\alpha^2 + c| \ge |b\alpha^2 + d| \ge b\alpha^2 + d$$

حال دقت کنید که بیش‌ترین مقداری که تابع $f \ \ x \ \ |ax + c|$ در بازه‌ی $|0, 1|$ می‌پذیرد، به ازای یکی از مقادیر انتهایی بازه است. و به عبارتی $f(x) \le \max\{f(0), f(1)\} = \max\{|c|, |a + c|\}$. پس:

$$|a\alpha^2 + c| \le \max\{|c,||a + c\}|$$

با استدلالی مشابه می‌توان گفت که تابع خطی $g(x) = bx + d$ نیز کمترین مقدار خود را دریکی از نقاط انتهایی می‌پذیرد. پس:

$$b\alpha^2 + d \ge \min\{d, b + d\}$$

حال بنا بر رابطه‌های بالا داریم:

$$\max\{|c|, |a + c|\} \ge |a\alpha^2 + c| \ge b\alpha^2 + d \ge \min\{d, b + d\}$$

درنتیجه باید. $\max\{|c|, |a + c|\} \ge \min\{d, b + d\}$ که با فرض مسئله‌ی در تناقض αای است، پس چنین a‌ای وجود ندارد.

راه‌حل دوم. دقت کنید که

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \ a + c \ x^3 + \ b + d \ x^2 + c \ x - x^3 \ + d \ 1 - x^2$$

اگر . $x \notin \{-1, 0, 1\}$ ثابت می‌کنیم:

الف. $(a + c)x^3 + (b + d)x^2 > 0$

ب. $c(x - x^3) + d(1 - x^2)$

برای اثبات ادعای الف، می‌دانیم که $0 < |x| < 1$، پس

$$(a + c)x^3 + (b + d)x^2 = x^2(a + c)x + (b + d)$$

حال دقت کنید که:

$$b + d > |a + c \ge x(a + c)| \ge \Rightarrow \ a + c \ x^3 + \ b + d \ x^2 > 0$$

برای اثبات ادعای ب دقت کنید که. $1 - x^2 > 0$ و درنتیجه:

$$d > |c| > |xc| \ge -xc \Rightarrow cx + d > 0 \Rightarrow \ 1 - x^2 \ \ cd + d \ > 0 \Rightarrow \ cx - x^3 \ + \ 1 - x^2 \ > 0$$

حال با جمع زدن رابطه‌های الف و ب به این نتیجه می‌رسیم که $p(x)$ ریشه‌ای در $[-1, 1]$ ندارد، مگر احتمالاً در ۰، ۱+و یا ۱- که این سه عدد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$p(0) = d > |c| \ge 0$$
$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > a + c \Rightarrow p(-1) > 0$$
$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > -a - c \Rightarrow p(1) > 0$$

پس این نقاط هم‌ریشه‌ی $p(x)$ نیستند و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۵- زاویه‌ی $\angle BCT$ زاویه‌ای از مثلث متساوی‌الساقین BCE با زاویه‌ی خارجی $\angle ABC$ است، پس $\angle BCT = \frac{1}{2}\angle ABC$ و

به‌طور مشابه $\angle CBT = \frac{1}{2} ACB$ پس:

$$\angle CTF = \angle CTF + \angle CBT = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB = \frac{1}{2}\ 180^{\circ} - \angle BAC \ = 60^{\circ}$$

بنابراین چهارضلعی ABTC محاطی است و درنتیجه $\angle EBF = \angle ACE = \angle AKE$ این نتیجه می‌دهد که $\angle ABF = 180^{\circ} - \angle EBF = 180^{\circ} - \angle AKE = \angle AKF$ پس چهارضلعی ABKF محاطی است.

حال داریم که $\angle EBK = \angle CFK$ و $\angle BEK = \angle KCF$ و $BE = CF$ پس مثلث‌های KEB و KCF هم‌نهشت هستند و لذا KE=KC. به‌عنوان نتیجه دو کمان EK و KC برابر هستند و AK نیم ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ خواهد بود.

۶- فرض کنید برای عدد طبیعی $2 \le i \le n$، منظور از A_i مجموعه‌ی کلاس‌های i نفره باشد. نشان می‌دهیم که $\left|A_i\right| \le \frac{n(n-1)}{i(i-1)}$

طبق فرض هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی از دانش‌آموزان حداکثر در یک کلاس از کلاس‌های A_i می‌توانند با هم شرکت کنند، پس به عبارتی $\binom{n}{2} \ge \left|A_i\right| \binom{i}{2}$ .. پس $\left|A_i\right| \le \frac{n(n-1)}{i(i-1)}$ حال می‌دانیم که

$$m = \left|A_2\right| + \left|A_3\right| + \ldots + \left|A_n\right|$$

در نهایت با جاگذاری نامساوی به‌دست‌آمده در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$m \le n(n-1)\left(\frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{3(3-1)} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}\right)$$
$$= n(n-1)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n(n-1)(1-\frac{1}{n}) = (n-1)^2$$

و درنتیجه اثبات حکم به پایان می‌رسد.