جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۵

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
–	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- فرض کنید دایره‌ی $C_۲$ از مرکز دایره‌ی $C_۱$ گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دلخواهی از $C_۱$ و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی $C_۲$ باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره‌ی $C_۱$ است.

۲- همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$P(x+y,x-y)=۲P(x,y)$$

۳- در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل روئیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره $(k>۱)$ دست‌کم دوتایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k-۱$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی iام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته $[a_i,b_i]$ بنامید که در آن $a_i<b_i$).

۴- الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn+۱$ بر $m+n$ بخش‌پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m,n>۲$، ثابت کنید دنباله‌ی $(a_۰,a_۱,\ldots,a_k)$ از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از دو موجود است که $a_۰=m$ ، $a_k=n$ و برای هر $i=۰,۱,\ldots,k-۱$ داریم:

$$a_i+a_{i+۱}\mid a_ia_{i+۱}+۱$$

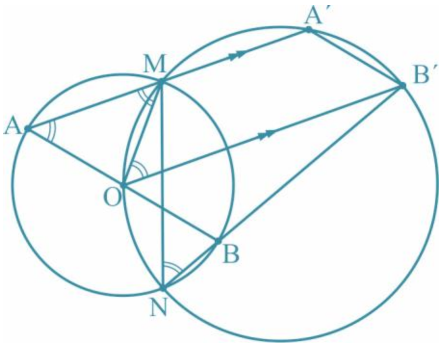
۵- نقاط A، B، C و D با همین ترتیب روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M که $\frac{MA}{MB}=\frac{MD}{MC}$ چهارتاست و به‌علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

۶- تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت‌ورو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را پشت‌ورو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند و الی‌آخر. پس‌ازاین که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعدادی جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضعیت اول برمی‌گردند.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۵

۱- مرکز دایره‌ی c را o نام‌گذاری کنید. کافی است نشان دهیم $MA'\|OB'$ زیرا در این صورت چهارضلعی محاطی با رئوس A,O,M و B' یک ذوزنقه متساوی‌الساقین خواهد بود و در نتیجه آن $MO=A'B'$ و حکم ثابت می‌شود. برای اثبات توازی MA' و OB' هم داریم:

$$\angle OMA=\angle OAM=\angle BAM=\angle BNM=\angle B'NM=\angle B'OM\Rightarrow B'O\|MA'$$



۲- با دو مرتبه استفاده از فرض مسئله‌ی داریم:

$$p(x,y)=۲p(\frac{x+y}{۲},\frac{x-y}{۲})=۴p(\frac{\frac{x+y}{۲}+\frac{x-y}{۲}}{۲},\frac{\frac{x+y}{۲}-\frac{x-y}{۲}}{۲})=۴p(\frac{x}{۲},\frac{y}{۲})$$

حال دقت کنید که اگر ضریب جمله‌ی x^iy^j در $p(x,y)$ برابر A باشد، ضریب آن در $۴p(\frac{x}{۲},\frac{y}{۲})$ برابر $۴A\times ۲^{i-j}$ است و بنابراین در جملات با ضریب نا صفر باید $i+j=۲$ باشد، یعنی $p(x,y)$ می‌تواند شامل سه جمله‌ی $y^۲,x^۲$ و xy باشد.

اگر $p(x,y)=\alpha x^۲+bxy+cy^۲$، با توجه به رابطه‌ی صورت‌مسئله‌ی خواهیم داشت:

$$۲p(x,y)=۲\alpha x^۲+۲bxy+۲cy^۲=p(x+y,x-y)=(\alpha+b+c)x^۲+۲(\alpha-c)xy+(\alpha+c-b)y^۲$$

پس $۲(\alpha-c)=۲b,\alpha+b+c=۲\alpha$ و $\alpha+c-b=۲c$ که از هر سه نتیجه می‌شود $\alpha=b+c$ پس چندجمله‌ای جواب باید به فرم $p(x,y)=(b+c)x^۲+bxy+cy^۲$ باشد که به‌راحتی می‌توان چک کرد که این چندجمله‌ای در صورت‌مسئله‌ی فرق می‌کند.

۳- حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. پایه استقرا در پایان ثابت می‌کنیم. برای گام استقرا فرض کنید $b_۱$ کوچک‌ترین عدد در بین b_i باشد. ادعا می‌کنیم اگر ستاره‌ی مربوط به بازه‌ی $[\alpha_۱,b_۱]$ (که آن را در طول راه‌حل ستاره‌ی ۱ می‌نامیم) و همه‌ی ستاره‌هایی که با آن لحظه‌ای در آسمان دیده شده‌اند را در نظر نگیریم، فرض مسئله‌ی برای ستاره‌های باقی‌مانده و $k-۱$ برقرار است. برای این منظور $k-۱$ ستاره‌ی دلخواه را از بین ستاره‌هایی در نظر بگیرید که در هیچ لحظه‌ای با ستاره ۱ در آسمان نبوده‌اند. این $k-۱$ ستاره‌ی به همراه ستاره ۱، k ستاره هستند، پس طبق فرض مسئله‌ی لحظه‌ای وجود دارد که دو تا از آن‌ها در آسمان با هم دیده می‌شوند. دقت کنید که ستاره ۱ نمی‌تواند در بین این دو ستاره باشد، پس در نهایت در بین $k-۱$ ستاره اولیه دو ستاره یافت می‌شدند که در یک زمان در آسمان ظاهر بودند و فرض مسئله‌ی برای $k-۱$ برقرار است. حال طبق استقرا می‌توان $k-۲$ عکس گرفت به‌طوری‌که همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره ۱ در آسمان دیده نشده‌اند، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شوند. حال اگر در لحظه $b_۱$ هم عکسی بگیریم، همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره ۱ اشتراک دارند در این عکس دیده می‌شوند، چرا که $b_۱$ کوچک‌ترین مقدار در بین b_i فرض شده بود و لذا هر بازه‌ی دیگری که با $[\alpha_۱,b_۱]$ اشتراک دارد، باید شامل $b_۱$ باشد.

در مورد پایه‌ی استقرا، استدلال قسمت پایانی بند بالا کار می‌کند. در این حالت هم فرض کنید $b_۱$ کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. ازآنجاکه طبق فرض استقرا در این حالت، بازه‌ی حضور هر دو ستاره در آسمان با هم اشتراک دارند، پس باید بازه‌ی حضور هر ستاره دیگری شامل $b_۱$ باشد و بنابراین اگر در این لحظه $(b_۱)$ عکسی بگیریم همه‌ی ستاره‌ها در آن دیده می‌شوند.

۴- الف.

$$\left.\begin{array}{l} m+n \mid mn+1 \\ m+n \mid m^2+nm \end{array}\right\} \Rightarrow m+n \mid m^2-1$$

پس $m+n$ باید مقسوم‌علیه m^2-1 باشد. اما m^2-1 تنها متناهی مقسوم‌علیه دارد و لذا متناهی عدد این‌چنینی یافت می‌شوند.

ب. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که اگر m و n دو عدد فرد متوالی باشند، آنگاه $m+n \mid mn+1$ با توجه به متقارن بودن رابطه می‌توان فرض کرد $n>m$. در این صورت به‌راحتی می‌توان چک کرد که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1), 2m+1, 2m+3, \ldots, 2n+1, n^2-n-1, n)$$

شرط مسئله‌ی را برآورده می‌کند.

راه‌حل دوم: این راه‌حل هم کاملاً مشابه راه‌حل قبلی است. تنها دقت کنید که اگر $3 \leq m < n$ آنگاه $m^2-m-1 < n^2-n-1$. پس می‌توان به‌راحتی دید که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, m^2-m+1, m^2+m+3, \ldots, n^2-n-3, n^2-n-1, n)$$

هم شرایط مسئله‌ی را دارد.

۵- برای حل این مسئله‌ی ابتدا یک لم معروف را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید مثلثی با اضلاع به طول b, α و c، دارای مساحت s بوده و شعاع دایره‌ی محیطی آن برابر R باشد. نشان دهید که $4RS = \alpha bc$.

اثبات. فرض کنید A زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع α باشد، در این صورت با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc \frac{\alpha}{2R} \Rightarrow 4RS = \alpha bc$$

حال در مسئله‌ی اصلی فرض کنید L محل تقاطع AC و BD باشد. M را نقطه‌ای دلخواه روی دایره‌ی بگیرید. طبق لم بالا در مثلث‌های ABC و BMD داریم: (شعاع دایره‌ی را برابر R گرفتیم و مساحت مثلث‌ها را با S نمایش می‌دهیم.)

$$MA.MC.AC = 4R.S_{AMC}, MB.MD.BD = 4R.S_{BMD}$$

اگر نقطه‌ی M در شرط مسئله‌ی صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$MA.MC = MB.MD \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{AC}{BD}$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو پاره‌خط AC و BD باید برابر باشد و درنتیجه باید روی نیم‌ساز یکی از چهار زاویه‌ای که دو خط AC و BD با ایجاد می‌کنند، واقع است. حال دقت کنید که این چهار نیم‌ساز دایره‌ی را در ۴ نقطه‌ی قطع می‌کنند که به‌راحتی با توجه به نتایج بالا می‌توان چک کرد این چهار نقطه، همان ۴ نقطه‌ی خواسته‌شده در صورت‌مسئله‌ی هستند.

۶- تعداد کتاب‌ها را برابر n بگیرید. دقت کنید که ترتیب کتاب‌ها حداکثر $n!$ حالت مختلف می‌تواند به خود بگیرد. به‌علاوه با توجه به این‌که هر کتاب دو وضعیت می‌تواند داشته باشد حداکثر $2^n n!$ آرایش مختلف برای کتاب‌ها محتمل است. بعد از $n, 2n, 3n$ و ... جابه‌جایی وضعیت کتاب‌ها را نگاه کنید. چون تعداد این مرحله‌ها نامتناهی است و تعداد آرایش‌های ممکن کتاب‌ها متناهی دو مرحله مختلف هستند که آرایش کتاب‌ها در آن‌ها یکسان است. توجه کنید که اگر در آرایش کتاب‌ها را در یک مرحله بدانیم، آرایش کتاب‌ها در n مرحله قبل با برعکس انجام دادن عمل‌ها تعیین می‌شود. پس با توجه به دو مرحله‌ای که وضعیت کتاب‌ها یکسان است و با برگشت به عقب می‌توان به مرحله‌ای رسید که وضعیت کتاب‌ها همان وضعیت اولیه‌شان باشد.