جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۴

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
-	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

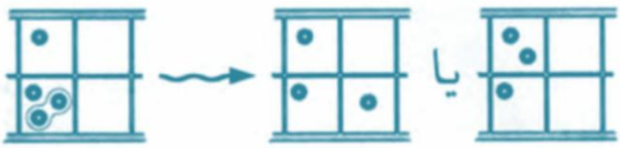
۱- n عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و p عددی اول است که $n \mid p-1$ و $p \mid n^3-1$. نشان دهید $4p-3$ مربع کامل است.

۲- در مثلث ABC، $\angle A = 60^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه‌ی می‌گذرد.

۳- کهکشان راه دوغی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه‌ی فرض کنید.)

۴- در برخی خانه‌های یک جدول $2 \times n$ تعدادی مهره‌ی قرار دارد.
اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره‌ی باشد، می‌توانیم دو مهره‌ی از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره‌ی در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره‌ی در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.

فرض کنید که در ابتدا دست‌کم 2^n مهره‌ی در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره‌ی به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.



۵- BC یک قطر دایره‌ی و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که $CY \parallel PB$ و $CX \parallel MP$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید $PB \perp MK$.

۶- تمام توابع $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x)+f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست).

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۴

۱- راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که از آنجا که p عددی اول است و $p\big|(n-1)(n^2+n+1)$ پس $p\big|(n-1)$ و یا $p\big|n^2+n+1$ اگر $p\big|n-1$، باید $p\le n-1$ و از طرف دیگر طبق فرض مسئله‌ی $n\big|p-1$ و بنابراین $n\le p-1$. پس این حالت امکان ندارد و در نتیجه $p\big|n^2+n+1$.

$n\big|p-1$، پس عدد طبیعی t وجود دارد که $p=tn+1$ ادعا می‌کنیم $t=n+1$ می‌دانیم:

$$p\big|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1\big|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1\big|n^2+n+1-tn-1$$
$$\Rightarrow tn+1\big|(n+1-t)n \Rightarrow tn+1\big|n+1-t$$

که آخرین نتیجه‌گیری با استفاده از لم اقلیدس و به این دلیل است که $(tn+1,n)=(n,1)=1$. حال اگر $n+1-t\neq n+1$ صفر نیست و لذا $tn+1\le\big|n+1-t\big|$. برای $\big|n+1-t\big|$ دو حالت داریم:

$$n+1-t>0 \Rightarrow n+1\le tn+1\le n+1-t<n+1$$
$$n+1-t<0 \Rightarrow t<tn+1\le t-(n+1)<t$$

که هر دو تناقض است. پس. $t=n+1$ حال داریم:

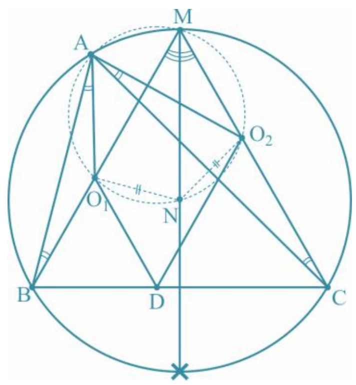
$$t=n+1 \Rightarrow p=tn+1=n^2+n+1 \Rightarrow 4p-3=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

پس $4p-3$ مربع کامل است.

راه‌حل دوم. ابتدای راه‌حل مشابه راه‌حل اول است. حال فرض کنید که $p\big|n^2+n+1$. ازآنجاکه $n\big|p-1$ عدد طبیعی k یافت می‌شود که $p=kn+1$. پس باید عدد طبیعی t موجود باشد که $n^2+n+1=(kn+1)t$. با در نظر گرفتن دو طرف عبارت اخیر به پیمانه n نتیجه می‌گیریم (به پیمانه‌ی n) $t=1$، پس عدد صحیح نامنفی s یافت می‌شود که $t=sn+1$. اگر $s>0$ باشد، آنگاه $(sn+1)(tn+1)>n^2+n+1$ که تناقض است، پس $s=0$ و لذا $t=1$. بنابراین . قسمت آخر راه‌حل هم مشابه است.

۲- دقت کنید که در بین زاویه‌های $\angle ADB$ و $\angle ADC$ یکی کمتر یا مساوی 90° و دیگری بیش‌تر یا مساوی 90° است که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله‌ی و به دلیل تقارن می‌توان فرض کرد $\angle ADC\ge 90^\circ$. در این صورت با توجه به خواص مرکز دایره‌ی محیطی داریم:

$$\angle ADO_1=90^\circ-\angle ADB=\angle ADC-90^\circ=\angle ACO_2$$



پس BO_1 و CO_2 یکدیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند. با استدلال مشابه بالا می‌توان نشان داد که $\angle BAO_1=\angle CAO_2$ و بنابراین $\angle O_2AO_1=\angle BAC=60^\circ$. نقطه‌ی D قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به O_1O_2 (عمودمنصف AD) است. پس $\angle O_1DO_2=60^\circ$ لذا $\angle O_1NO_2=120^\circ$ و با توجه به این‌که M روی دایره‌ی محیطی ABC قرار دارد $\angle O_1MO_2=60^\circ$ است و این نتیجه می‌دهد که چهار نقطه‌ی O_1,N,M و O_2 روی یک دایره‌ی قرار دارند. از طرفی $O_1N=O_2N$ پس MN نیمساز زاویه‌ی $\angle O_1MO_2=\angle BMC$ است. می‌دانیم که نیمساز زاویه‌ی $\angle BMC$ از وسط کمان BC در دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد که یک نقطه‌ی ثابت است.

۳- فرض کنید $d_1 < d_2 < \ldots < d_r$ همه‌ی فاصله‌های ظاهر شده در بین این سیارات باشند. به برهان خلف فرض کنید که $r \leq 78$ یکی از ستاره‌های فضا را به‌دلخواه انتخاب کنید و کره‌های مرکز این ستاره و شعاع‌های $d_1 < d_2 < \ldots < d_r$ را در نظر بگیرید. طبق فرض ما هرکدام از ستاره‌های دیگر باید روی یکی از ا ین r کره باشند. پس طبق اصل لانه کبوتری روی یکی از این کره‌ها باید حداقل $\left\lceil \frac{10^6-1}{r} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{10^6-1}{78} \right\rceil = 12821$ ستاره باشد. حال تنها این کره را در نظر بگیرید و یکی از ستاره‌های روی آن را به دلخواه انتخاب کنید. مجدداً به مرکز این ستاره‌ی جدید r کره با شعاع‌های $d_1 < d_2 < \ldots < d_r$ در نظر بگیرید. تمام ستاره‌های آسمان غیر از ستاره‌ای که مرکز این کره‌هاست روی این k کره قرار دارند، پس باید طبق اصل لانه کبوتری یکی از این کره‌ها باشد که از بین ۱۲۸۲۱ ستاره‌ای که روی کره‌ی اول قرار داشتند شامل حداقل $\left\lceil \frac{12820}{r} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{12820}{78} \right\rceil = 165$ تا از ستاره‌ها باشد. حال دقت کنید که این ۱۶۵ ستاره روی دو کره غیر هم‌مرکز قرارگرفته‌اند، پس باید روی اشتراک آن‌ها که یک دایره‌ی است باشند. درنهایت تنها این ۱۶۵ ستاره را در نظر بگیرید. اگر یکی از این ۱۶۵تا را به دلخواه انتخاب کنیم برای هر $1 \leq i \leq r$ حداکثر دو ستاره از بین ۱۶۴ ستاره‌ی باقی‌مانده دارای فاصله‌ی d_i، با این ستاره هستند. پس تعداد ستاره‌ها روی این دایره‌ی باید حداکثر $2 \times 78 + 1 = 157$ باشد که این‌طور نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه‌ی ما اشتباه است و حداقل ۷۹ عدد متمایز در بین فواصل دوبه‌دوی این یک میلیون سیاره وجود دارد.

۴- ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر حداقل 2^{n-1} مهره در یک جدول $1 \times n$ داشته باشیم و حرکات مجاز ما این باشد که اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره‌ی قرار داشت بتوانیم دو مهره‌ی از آن خارج کنیم و یک مهره‌ی در خانه‌ی سمت راستش قرار دهیم، می‌توانیم با جابه‌جایی مهره‌ها در نهایت مهره‌ای را به آخرین خانه‌ی سمت راست برسانیم. این حکم برای $n = 1$ بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای k درست باشد و ما 2^k مهره‌ی در یک جدول $1 \times (k+1)$ داریم. اگر از ابتدا مهره‌ای در آخرین خانه‌ی سمت راست باشد، چیزی برای ثابت کردن باقی نمی‌ماند. پس فرض می‌کنیم که این خانه‌ی خالی باشد. حال 2^k مهره‌ی را که همگی در یک جدول $1 \times k$ قرار دارند و به دو دسته 2^{k-1} تایی تقسیم می‌کنیم. حال طبق فرض استقرا می‌توان با جابه‌جایی مهره‌ها در هر دسته یک مهره‌ی را به خانه‌ی دوم از سمت راست رساند. پس در نهایت حداقل دو مهره‌ی به این خانه‌ی می‌رسد و با استفاده از این دو مهره‌ی می‌توان یک مهره‌ی را به خانه‌ی سمت راست برد.

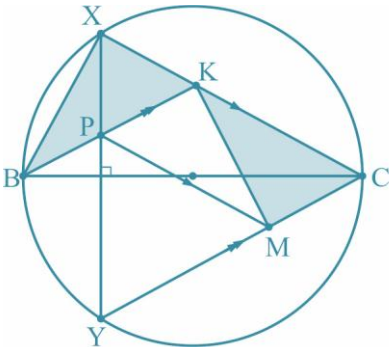
حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

حکم مسئله‌ی اصلی را هم شبیه به بالا به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. باز هم حالت $n = 1$ به سادگی قابل بررسی است. حال فرض کنید که حکم برای k برقرار باشد و ما 2^{k+1} مهره‌ی در یک جدول $2 \times (k+1)$ داشته باشیم. مشابه بالا اگر در ابتدا مهره‌ای در خانه‌ی بالا سمت راست (خانه‌ی ستاره‌ای) باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. این بار اگر حداقل دو مهره‌ی در خانه‌ی پایین سمت راست باشد می‌توان دو مهره‌ی از ین خانه‌ی برداشت و یک مهره‌ی به خانه‌ی بالا راست منتقل کرد که باز مسئله‌ی حل است. پس باید فرض کنیم که در خانه‌ی پایین راست حداکثر یک مهره‌ی قرار دارد. حال برحسب تعداد مهره‌های این خانه‌ی مسئله‌ی را به دو حالت تقسیم می‌کنیم.

اگر در خانه‌ی پایین راست مهره‌ای نباشد، همه‌ی 2^{k+1} مهره‌ی در یک جدول $2 \times k$ قرار دارند. حال اگر مشابه بالا 2^{k+1} مهره‌ی را به دو دسته 2^kتایی به دل‌خواه تقسیم کنیم، طبق فرض استقرا می‌توان با هرکدام از این دسته‌ها یک‌مهره‌ی را به خانه‌ی دوم از سمت راست از ردیف بالایی رساند. حال با استفاده از این دو مهره‌ی می‌توان یک مهره‌ی را به خانه‌ی موردنظر رساند.

اگر در خانه‌ی پایین سمت راست یک مهره‌ی قرار داشته باشد، $2^{k+1} - 1$ مهره‌ی در بقیه‌ی جدول قرار دارند. پس طبق اصل لانه کبوتری یا 2^kدر ردیف بالایی قرار دارد که طبق استدلال قسمت اول راه‌حل می‌توان یک مهره‌ی را به خانه‌ی مورد نظر رساند و یا 2^k مهره‌ی در ردیف پایینی غیر از خانه‌ی سمت راست آن قرار دارد. در اینجا باز با استفاده حکمی که در ابتدای راه‌حل ثابت شد می‌توان یک مهره‌ی دیگر به خانه‌ی پایین راست اضافه کرد که در این صورت ۲ مهره‌ی در این خانه‌ی قرار می‌گیرد و حال با استفاده از این دو مهره‌ی می‌توان یک مهره‌ی را به خانه‌ی بالا راست رساند.

۵- راه‌حل اول. دقت کنید که BC قطر دایره‌ی و لذا عمودمنصف XY است، پس $\angle BCY = \angle BCX$ و $\angle YBC = \angle XBC$. ازآنجاکه $BK \| CY, \angle KBC = \angle BCY = \angle BCK$ و بنابراین $BK = KC$. همچنین $\angle XPK = \angle XYC = \angle YXC$ و لذا $KX = KP$. ازآنجاکه $KCPM$ متوازی‌الاضلاع است، $KP = CM$. از طرف دیگر $\angle BKX = \angle MCK$ و لذا دو مثلث XKB و CMK هم‌نهشت هستند. ازآنجاکه BC قطر دایره‌ی است، $\angle BXC = 90^\circ$ و با توجه به هم‌نهشتی این دو مثلث $\angle KMC$ قائمه است و $KM \perp YC$. درنهایت باز با توجه به موازی بودن PB و CY حکم موردنظر ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم: برای اثبات حکم از قضیه‌ی کارنو استفاده می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم تحت شرایط مسئله‌ی $BM^2 - PM^2 = BK^2 - PK^2$. طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $BYM, BM^2 = BY^2 + YM^2$ دقت کنید که $XC \| PM$ و لذا $\angle YPM = \angle YXM = \angle CYP$ پس مثلث PMY متساوی‌الساقین است و $PM = MY$. در راه‌حل اول هم نشان دادیم که $KP = XK$ و $BK = KC$. درنهایت با ترکیب این روابط و استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث BXK داریم:

$$BM^2 - PM^2 = (BY^2 + YM^2) - YM^2 = BY^2 = BX^2 = BK^2 - KX^2 = BK^2 - KP^2$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶- ابتدا نشان می‌دهیم f تابعی یک‌به‌یک است. اگر $f(\alpha) = f(b)$ باشد، با قرار دادن $y = 1$ در معادله و یک‌بار جایگذاری α و بار دیگر b به‌جای x داریم:

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha+1)f(f(\alpha)) = \alpha^2 f(f(\alpha)) + f(1)) \\ (b+1)f(f(b)) = b^2 f(f(b)) + f(1))\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha+1} = \frac{b^2}{b+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\alpha - b)(\alpha b + \alpha + b) = 0$$

حال با توجه به این‌که α و b در نتیجه $\alpha b + \alpha + b$ مثبت است، نتیجه می‌گیرم $\alpha = b$ و بنابراین تابع یک‌به‌یک است. اگر برای یک $x > 1$ در رابطه اصلی به‌جای y، $x^2 - x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(x + (x^2 - x))f(f(x)(x^2 - x)) = x^2 f(f(x) + f(x^2 - x))$$
$$\Rightarrow f(f(x)(x^2 - x)) = f(f(x) + f(x^2 - x))$$
$$\Rightarrow f(x)(x^2 - x) = f(x) + f(x^2 - x)$$
$$\Rightarrow f(x)(x^2 - x - 1) = f(x^2 - x)$$

در خط دوم به سوم از یک‌به‌یکی تابع f استفاده شده است. در نهایت دقت کنید که معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - x - 1$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد که یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. حال اگر این ریشه را α بنامیم، با قرار دادن $x = \alpha$ در معادله آخر به $f(1) = 0$ می‌رسیم که با فرض این‌که مقادیر F مثبت هستند تناقض دارد. پس چنین تابعی اصلاً وجود ندارد.