جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
نوزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
–	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، به‌طوری‌که $np+۱$ مربع کامل است. ثابت کنید می‌توان $n+۱$ را به‌صورت مجموع p تا مربع کامل نوشت.

۲- مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مفروض است. روی اضلاع آن سه مثلث $B'AC$، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم، به‌طوری‌که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = ۳۰^\circ$$
$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = ۶۰^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۳- تمام nهایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن‌ها افقی و عمودی باشند و شکل حاصل، حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

۴- تمام چندجمله‌ای‌های p با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$P(۲P(x)) = ۲P(P(x)) + ۲P(x)^۲$$

۵- در مثلث ABC $(AB > AC)$ نیم‌سازهای رأس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. هم‌چنین نقطه‌ی تقاطع دو نیم‌ساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی $\angle A$ چند درجه‌ای است؟

۶- جدولی با یک سطر و تعداد نامتناهی خانه‌ی در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد (نظیر شکل زیر) در این جدول تعدادی متناهی مهره‌ی قرار داده‌ایم به‌گونه‌ای که در بعضی از خانه‌ها تعدادی مهره‌ی قرار گرفته است. (در یک خانه‌ی می‌تواند بیش از یک مهره‌ی باشد.) دو عمل زیر را می‌توان روی مهره‌ها انجام داد:

۱) اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره‌ی وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه‌ی به راست برد و یک مهره‌ی از خانه‌ی سمت راست را حذف کرد.
۲) در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره‌ی وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌ها را یک خانه‌ی به راست و یک مهره‌ی دیگر را دو خانه‌ی به سمت چپ برد.
الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.
ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا nام یک مهره‌ی قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکرشده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n+۱$ام جلوتر نخواهد رفت.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۰

۱- فرض کنید x عدد صحیحی باشد که $x^2 = np + 1$. پس $p \mid x^2 - 1$ و در نتیجه $p \mid (x-1)(x+1)$. با توجه به این‌که p یک عدد اول است، $p \mid x-1$ و یا $p \mid x+1$. بنابراین عدد طبیعی k یافت می‌شود که $x = kp+1$ و یا $x = kp-1$. از اینجا مسئله‌ی را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

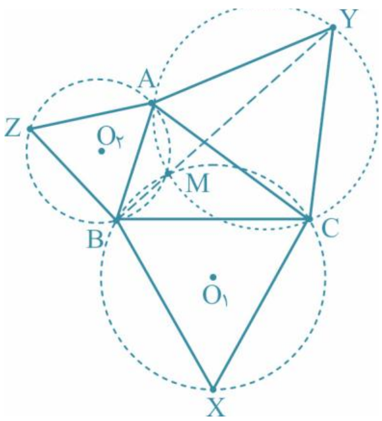
$$
\begin{aligned}
&x = kp+1 \Rightarrow 1+np = (kp+1)^2 = k^2p^2 + 2kp + 1\\
&\Rightarrow n = k^2p + 2k\\
&\Rightarrow n+1 = pk^2 + 2k + 1 = (p-1)k^2 + (k+1)^2\\
&\Rightarrow n+1 = \underbrace{k^2 + \ldots + k^2}_{p-1} + (k+1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x = kp-1 \Rightarrow 1+np = (kp-1)^2 = k^2p^2 - 2kp + 1\\
&\Rightarrow n = k^2p - 2k\\
&\Rightarrow n+1 = pk^2 - 2k + 1 = (p-1)k^2 + (k-1)^2\\
&\Rightarrow n+1 = \underbrace{k^2 + \ldots + k^2}_{p-1} + (k-1)^2
\end{aligned}
$$

پس در هر صورت $np+1$ مجموع p مربع کامل است.

۲- ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم:

لم. اگر بر روی اضلاع مثلث حاده‌الزاویه ABC و در خارج از آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCX، CAY و ABZ را بنا کنیم و O_1 و O_2 به ترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های BCX و ABZ باشند، در این صورت $BY \perp O_1O_2$.



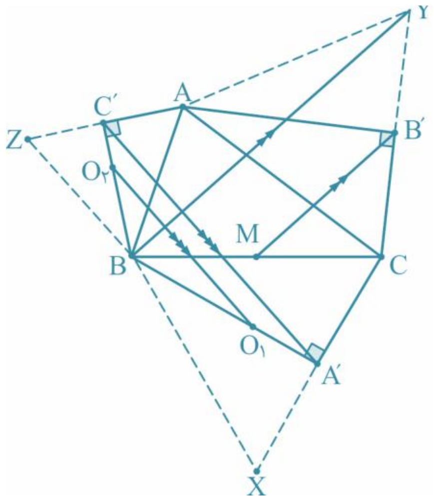
اثبات: فرض کنید M نقطه‌ی برخورد این دو دایره‌ی غیر از B باشد. در این صورت روشن است که $\angle BMC = \angle AMB = 120^\circ$ و در نتیجه $\angle CMA = 120^\circ$. حال با توجه به این‌که $\angle AYC = 60^\circ$، چهارضلعی $AMCY$ محاطی است. پس:

$$\angle AMY = \angle ACY = 60^\circ \Rightarrow \angle AMB + \angle AMY = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

بنابراین نقطه‌های M, B و Y هم‌خط هستند. از طرفی BM وتر مشترک دو دایره‌ی به مرکز O_1 و O_2 است و بنابراین بر خط‌المرکزین دو دایره‌ی یعنی O_1O_2 عمود است. در نتیجه $BY \perp O_1O_2$.

حال با در نظر داشتن لم فوق به حل مسئله‌ی می‌پردازیم.

مثلث‌های ساخته شده روی اضلاع مثلث ABC را طبق شکل زیر کامل می‌کنیم تا به مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع تبدیل شوند. در این صورت به وضوح نقطه‌های A', B' و C' وسط‌های سه ضلع از ضلع‌های این مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.



حال دقت کنید که اگر $O_۱$ مرکز دایره‌ی محیطی BCX و $O_۲$ مرکز دایره‌ی محیطی ABZ باشد، $O_۱$ روی BA' و $O_۲$ روی BC' واقع است و به علاوه:

$$\frac{BO_۱}{O_۱A'}=\frac{BO_۲}{O_۲C'}=۲$$

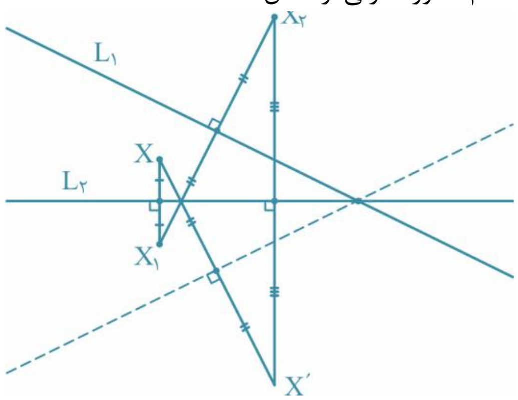
بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $O_۱O_۲ \parallel A'C'$.

هم‌چنین از آنجایی که M وسط ضلع BC است و B' وسط YC، $BY \parallel MB'$. اما طبق لم می‌دانیم که $O_۱O_۲ \perp BY$، بنابراین $A'C' \perp MB'$.

۳- ابتدا به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم:

لم. اگر $l_۱$ و $l_۲$ با دو محور تقارن از شکلی باشند، آن‌گاه قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ نیز محور تقارنی از شکل خواهد بود.

اثبات. چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی X نسبت به $l_۲$ که آن را با $X_۱$ نمایش می‌دهیم هم متعلق به شکل است و چون $l_۱$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۱$ نسبت به $l_۱$ که آن را با $X_۲$ نمایش می‌دهیم هم متعلق به شکل است. در نهایت چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۲$ نسبت به $l_۲$ که از X' برای نمایش استفاده می‌کنیم هم نیز متعلق به شکل است. اما به سادگی می‌توان دید که X' قرینه‌ی X نسبت به خطی است که از قرینه کردن $l_۱$ نسبت به $l_۲$ به دست آمده است. پس در کل برای هر نقطه‌ی X در شکل، قرینه‌ی X نسبت به این خط هم در شکل قرار دارد و بنابراین این خط هم محور تقارنی از شکل است.



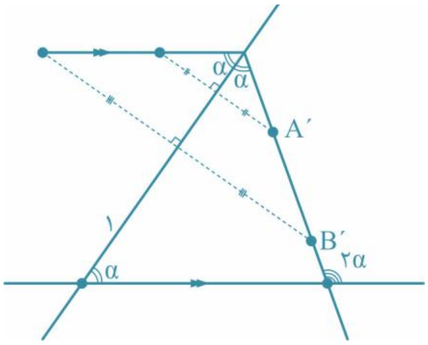
لم. هر مجموعه از اشکال که در ناحیه‌ای کران دار از صفحه‌ی (یعنی ناحیه‌ای که بتوان برای آن دایره‌ای با شعاع هر چند بزرگ یافت که به تمامی درون آن دایره‌ی قرار بگیرد.) باشد، نمی‌تواند دو محور تقارن موازی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن موازی برای مجموعه باشند. طبق لم ۱ قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ که آن را $l_۳$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب، قرینه‌ی $l_۲$ نسبت به $l_۳$ که آن را $l_۴$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب، نامتناهی خط موازی باید محور تقارن شکل باشند. اما به وضوح از جایی به بعد مجموعه ما در یک طرف این خطوط واقع خواهد شد و لذا این خط‌ها از جایی به بعد امکان ندارد که محور تقارن ما باشند. بنابراین چنین مجموعه‌ای دو محور تقارن موازی نمی‌تواند داشته باشد.

لم. محور تقارن تعدادی مربع با اضلاع عمودی و افقی، خطی است افقی، عمودی و یا با زاویه‌ی ۴۵ درجه‌ی یا ۱۳۵ درجه‌ی نسبت به محور افقی.

اثبات. فرض کنید خط l محور تقارنی از این شکل باشد و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ی α بسازد. در این صورت اگر $A'B'$ قرینه‌ی یکی از اضلاع افقی یکی از مربع‌ها نسبت به l باشد، می‌توان به سادگی دید که باید با محور x زاویه‌ی ۲α بسازد. اما چون ضلع مربع‌ها عمودی و یا افقی است، $A'B'$ هم باید عمودی و یا افقی باشد. پس $۲\alpha \in \{۰,۹۰^\circ,۱۸۰^\circ,۲۷۰^\circ\}$ و در نتیجه $\alpha \in \{۰,۴۵^\circ,۹۰^\circ,۱۳۵^\circ\}$.

حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.



طبق لم‌های دوم و سوم، سه محور تقارن ما باید دارای سه زاویه‌ی مختلف از چهار زاویه‌ی معرفی شده در بالا باشند. حال با یک بررسی ساده می‌توان دید که در هر کدام از این حالت‌ها می‌توان دو خط یافت که زاویه‌ی آن‌ها نسبت به هم برابر ۴۵ درجه‌ی باشد. حال از لم اول استفاده کنید، با قرینه‌ی کردن این دو محور نسبت به هم‌دیگر شکل ما چهار محور تقارن هم‌رس به صورت زیر پیدا می‌کند.

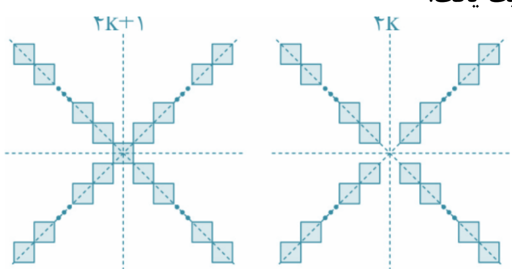
بنابراین مجموعه مطرح شده در صورت سؤال حتماً ۴ محور تقارن به این صورت دارد. حال وضعیت مربع‌ها را نسبت به این چهار محور بررسی می‌کنیم.

مرکز هر مربع یا در ناحیه‌های بین محورها است یا روی محورها و نه در نقطه‌ی تقاطع آن‌ها و یا در نقطه‌ی تقاطع است.

اگر مرکز مربع در ناحیه‌های بین محورها باشد، قرینه‌ی کردن این مربع نسبت به محورها، ۸ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر روی محورها (و نه نقطه‌ی تقاطع آن‌ها) باشد، قرینه‌ی کردن ا ین مربع نسبت به محورها، ۴ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر به این ترتیب با کنار گذاشتن مربع‌های به مرکز نقطه‌ی تقاطع، بقیه‌ی مربع‌ها را می‌توان به دسته‌هایی با تعداد اعضای ۴ یا ۸ تقسیم کرد. به مرکز نقطه‌ی تقاطع هم صفر یا یک مربع وجود دارد. لذا اگر بتوان n مربع یکسان با اضلاع افقی و عمودی در صفحه‌ی قرار داد که حداقل سه محور تقارن داشته باشد، x باید به یکی از دو صورت $۴k$ و یا $۴k+۱$ باشد. مثال‌های زیر نشان می‌دهد که برای همه‌ی مقدارهای k می‌توان $۴k$ و یا $۴k+۱$ مربع با این خاصیت یافت.



۴- فرض کنید n درجه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ باشد. در این صورت P به فرم زیر است.

$$P(x) = a_n x^x + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰ \qquad (a_n \neq ۰)$$

حال ضریب بزرگ‌ترین توان x را در دو طرف عبارت داده شده در صورت مسئله‌ی محاسبه می‌کنیم.

$$P(۲P(x)) = P(۲(a_n x^n + \ldots + a_۰))$$
$$= a_n(۲(a_n x^n + \ldots + a_۰))^n + \ldots + a_۰$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن x^{n^2} است و ضریب این جمله برابر $2^n a_n^{n+1}$ است. از طرف دیگر

$$2P(P(x)) = 2P(a_n x^n + \dots + a_0)$$
$$= 2a_n(a_n x^n + \dots + a_0)^n + \dots + a_0$$

که بزرگ‌ترین توان x در اینجا هم همان x^{n^2} است که ضریب آن برابر $2a_n^{n+1}$ است. در نهایت

$$2P(x)^2 = 2(a_n x^n + \dots + a_0)^2$$

که بزرگ‌ترین توان x^{n^2} در آن برابر x^{2n} بوده و ضریب این جمله $2a_n^2$ است.

حال اگر $n > 2$ باشد، $n^2 > 2n$ و لذا بزرگ‌ترین توان x در دو سمت عبارت x^{n^2} خواهد بود. از برابر قرار دادن ضریب این جمله در دو طرف تساوی به دست می‌آوریم $2^n a_n^{n+1} = 2a_n^{n+1}$ که با فرض $a_n \neq 0$ و $n > 2$ هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد. به این ترتیب سه حالت برای درجه‌ی $P(x)$ محتمل است.

حالت اول: $n = 0$. در این صورت $P(x) = a_0$ است و باید داشته باشیم:

$$a_0 = 2a_0 + 2a_0^2 \Rightarrow 2a_0^2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0(2a_0 + 1) = 0$$

پس $a_0 = 0$ و یا $a_0 = -\frac{1}{2}$ و بنابراین تنها جواب‌های آن $P(x) = 0$ و $P(x) = -\frac{1}{2}$ هستند.

حالت دوم: $n = 1$. در این صورت $P(x) = ax + b$ که $a \neq 0$، و باید داشته باشیم:

$$a(2(ax+b)) + b = 2a(ax+b) + 2b + 2(ax+b)^2$$

ضریب x^2 در طرف چپ صفر است، درحالی‌که در سمت راست ضریب x^2 برابر $2a^2$ است. پس باید a برابر صفر باشد که در این حالت فرض کرده‌ایم این‌طور نیست.

حالت سوم. $n = 2$. در این صورت $P(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$، و باید داشته باشیم:

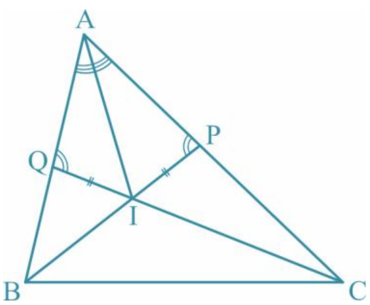
$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2$$
$$\Rightarrow 4aP(x)^2 + 2bP(x) + c = 2aP(x)^2 + 2bP(x) + c + 2P(x)^2$$
$$\Rightarrow 2aP(x)^2 = c + 2P(x)^2$$

از برابر قرار دادن ضریب x^4 در دو طرف نتیجه می‌شود که $2a^3 = 2a^4$ که چون $a \neq 0$ باید $a = 1$ باشد. حال تساوی بالا نشان می‌دهد که $c = 0$ بنابراین جواب این قسمت به‌صورت $x^2 + bx$ است که می‌توان دید در شرط مسئله‌ی صدق می‌کند.

بنابراین همه‌ی جواب‌های مسئله به دست آمد.

۵- در دو مثلث AIP و AIQ از قضیه سینوس‌ها استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\frac{IP}{\sin(\frac{\angle A}{2})} = \frac{AI}{\sin(\angle p)} \quad , \quad \frac{IQ}{\sin(\frac{\angle A}{2})} = \frac{AI}{\sin(\angle Q)}$$



بنابراین اگر $IP = IQ$، آنگاه $\sin(\angle P) = \sin(\angle Q)$. پس یا این دو زاویه‌ی با هم برابر هستند و یا مکمل یکدیگرند. اما $\angle P = \angle C + \frac{۱}{۲}\angle B$ و $\angle Q = B + \frac{۱}{۲}\angle C$. بنابراین اگر $\angle P = \angle Q$ آنگاه $\angle B = \angle C$ که خلاف فرض $AB > AC$ است. پس $\angle P + \angle Q = ۱۸۰^\circ$. درنتیجه

$$\angle C + \frac{۱}{۲}\angle B + \angle B + \frac{۱}{۲}\angle C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = \frac{۲}{۳}۱۸۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \angle A = ۶۰^\circ$$

۶- الف) خانه‌های این جدول را از چپ به راست با عددهای ۱، ۲، ۳،... شماره‌گذاری می‌کنیم. در هر حالت تعداد مهره‌های موجود در خانه‌ی kام را با a_k نمایش می‌دهیم. در هر گام از فرآیند مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \sum_{k=۱}^{+\infty} k a_k + \text{تفاضل تعداد مهره‌ها}$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هر عمل (چه از نوع یک و چه از نوع دو) حداقل یک واحد کاهش می‌یابد. زیرا:

اگر عمل از نوع یک باشد، و این دو خانه‌ی، خانه‌های iام و $i+۱$ ام باشند، از S به اندازه‌ی $i + (i+۱) + ۱$ واحد کم شده و $i+۲$ تا به S اضافه می‌شود. بنابراین S به $S - i$ تبدیل می‌شود و در نتیجه حداقل یک واحد کاهش می‌یابد.

اگر عمل از نوع دو باشد، و این خانه، خانه‌ی iام باشد، ا ز S به اندازه‌ی $۲i$ کم شده و $(i-۲)+(i+۱)$ جایگزین آن می‌شود. پس S به $S-۱$ تبدیل شده و یک واحد کاهش می‌یابد.

اما دقت کنید که همواره باید $S \geq ۰$. بنابراین اگر مقدار S را در ابتدای کار $S_۰$ بنامیم. (دقت کنید که چون تعداد مهره‌ها در آغاز کار متناهی است، لذا مقدار $S_۰$ نیز متناهی است) ما قادر به انجام بیشتر از $S_۰$ عملیات نیستیم و بنابراین حداکثر بعد از انجام $S_۰$ عمل، عملیات به پایان می‌رسد.

ب) دنباله اعداد فیبوناتچی را که به شکل زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید:

$$f_۱ = f_۲ = ۱ \ , \ f_{n+۲} = f_{n+۱} + f_n \ n \geq ۰$$

ابتدا دقت کنید که به‌راحتی می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n،

$$f_۱ + f_۲ + ... + f_n = f_{n+۲} - ۱$$

حال برای حل مسئله، مجموع S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \sum_{k=۱}^{+\infty} a_k f_k$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هیچ‌یک از دو عمل ذکر شده در صورت‌مسئله‌ی تغییر نمی‌کند. زیرا اگر عمل نوع ۱ باشد و روی خانه‌های n و $n+۱$ انجام شود، تغییرات S برابر است با $f_{n+۲} - f_n - f_{n+۱} = ۰$ و اگر عمل از نوع ۲ باشد، و روی خانه nام انجام شود، تغییرات S برابر است با

$$f_{n+۱} + f_{n-۲} - ۲f_n = f_n + f_{n-۱} + f_{n-۲} - ۲f_n$$
$$= f_{n-۱} + f_{n-۲} - f_n = ۰$$

مقدار S در ابتدای کار برابر با $S_۰ = f_۱ + f_۲ + ... + f_n = f_{n+۲} - ۱$ است و طبق آنچه گفته شد، مقدار S در همه‌ی مرحله‌ها همین مقدار $f_{n+۲} - ۱$ باقی خواهد ماند. بنابراین اگر در مرحله‌ای، مهره‌ای از خانه‌ی $n+۱$ام جلوتر برود، مقدار S باید حداقل $f_{n+۲}$ بشود که این‌گونه نخواهد بود.