



## دفترچه سوالات مرحله دوم

### هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۹

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۶۰	-	۶

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

#### تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل ۶ سؤال چند گزینه‌ای و وقت آن ۳۶۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط کمیته‌ی اجرایی ماخ انجام شده است.

۱- ۲۱ عدد متمایز از بین اعضای مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 2046\}$  انتخاب شده‌اند. نشان دهید که می‌توان سه عدد متمایز  $a$  و  $b$  و  $c$  از بین آن ۲۱ عدد انتخاب کرد به طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$bc < 2a^2 < 4bc$$

۲- نقاط  $D$  و  $E$  و  $F$  به ترتیب روی اضلاع  $BC$  و  $AC$  و  $AB$  از مثلث  $ABC$  قرار دارند. ثابت کنید دو مثلث  $ABC$  و  $DEF$  دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و تنها اگر:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

۳- مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  را  $M$  می‌نامیم. نشان دهید که می‌توان ۱۶ زیرمجموعه از  $M$  انتخاب کرد به طوری که برای هر  $a \in M$ ، ۸ تا از این مجموعه‌ها باشند که اشتراک آن‌ها دقیقاً برابر  $\{a\}$  باشد.

۴- همه اعداد طبیعی  $n$  را بیابید که مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  را بتوان به سه مجموعه مجزای  $A$  و  $B$  و  $C$  تقسیم کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه با هم برابر باشند.

۵- می‌دانیم در چهاروجهی  $ABCD$ ، مجموع زاویه‌های هر رأس برابر  $180^\circ$  است.

$$(BAC + CAD + DAB = 180^\circ : A \text{ مثلاً در رأس } A)$$

نشان دهید که وجوه این چهارضلعی، چهار مثلث برابرند.

۶- «آبر عدد» تعمیمی از مفهوم عدد است. همان‌طور که می‌دانید هر عدد طبیعی به صورت دنباله‌ای متناهی از ارقام صفر تا نه نوشته می‌شود. یک «ابر عدد» دنباله‌ای از سمت چپ نامتناهی از ارقام صفر تا نه است، مثلاً  $3030304 \dots$  یک «ابر عدد» است. توجه کنید که هر عدد خود یک «ابر عدد» است (که از جایی به بعد ارقام آن همگی صفراند). با همان روشی که دو عدد باهم جمع و یا در هم ضرب می‌شوند، می‌توان دو «ابر عدد» را نیز باهم جمع و یا در هم ضرب کرد. مثال:

$$\begin{array}{r} \phantom{0}1 \phantom{0}1 \\ \phantom{0}0 \dots 3030304 \\ + \phantom{0} \dots 4571378 \\ \hline \phantom{0} \dots 7601682 \\ \\ \phantom{0} \dots 3030304 \\ \times \phantom{0} \dots 4571378 \\ \hline \phantom{0} \dots 4242432 \\ \phantom{0} \dots 212128 \\ \phantom{0} \dots 90912 \\ \phantom{0} \dots 0304 \\ \phantom{0} \dots 128 \\ \phantom{0} \dots 20 \\ \phantom{0} \dots 6 \\ \hline \phantom{0} \dots 5038912 \end{array}$$

الف) فرض کنید  $A$  یک «ابر عدد» است. ثابت کنید: «ابر عدد»  $B$  وجود دارد که  $A + B = \overleftarrow{0}$  (منظور از  $\overleftarrow{0}$  «ابر عدد»ی است که همه رقم‌های آن صفرند).

ب) تمام «ابر عدد»های  $A$  را پیدا کنید که وارون ضربی دارند، یعنی «ابر عدد»  $B$  وجود دارد که  $A \times B = \overleftarrow{1}$  (منظور از  $\overleftarrow{1}$  «ابر عدد»  $0001 \dots$  است).

ج) آیا درست است اگر  $A \times B = \overleftarrow{0}$  آن‌گاه  $A = \overleftarrow{0}$  و یا  $B = \overleftarrow{0}$ ؟ چرا؟