جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۵

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	۴	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$(a^۲+a^۲+c^۲)^۲ > ۲(a^۴+b^۴+c^۴)$$

ثابت کنید a، b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۲- فرض کنید a، b، c و d اعدادی طبیعی باشند به‌طوری که،

$$ab=cd$$

آیا $S=a+b+c+d$ می‌تواند عددی اول باشد؟

۳- مثلث ABC مفروض است. نقاطی مانند D و E خارج مثلث ABC در نظر می‌گیریم به طوری که مثلثهای ADB و AEC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشند ($\angle E=۹۰^\circ$, $\angle D=۹۰^\circ$).

اگر F نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد ثابت کنید مثلث DFE نیز قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۴- روی یک خط راست n نقطه‌ی قرمز و n نقطه‌ی آبی نه لزوماً متمایز به‌طور دلخواه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای متفاوت از مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای یکسان کمتر نیست.

پاسخ نامه تشریحی

۱- به آسانی می‌توان ثابت کرد که نابرابری داده شده معادل است با

$$(a+b-c)(a+c-b)(a+c-a)(a+b+c) > 0$$

اگر این رابطه برقرار باشد، بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض کنید $a \leq b \leq c$. در این صورت، جمله‌های دوم، سوم و چهارم مثبت‌اند. بنابراین جمله اول نیز باید مثبت باشد. یعنی $a+b>0$ و این همان نابرابری مثلث است. دو نابرابری دیگر مثلث نیز به روشنی برقرارند.

۲- ابتدا لم زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم. اگر a، b، c و d عددهایی طبیعی باشند به طوری که $ab=cd$، آنگاه عددهای طبیعی x، y، z و t وجود دارند که

$$a=xy, \qquad b=zt, \qquad c=xz, \qquad d=yt$$

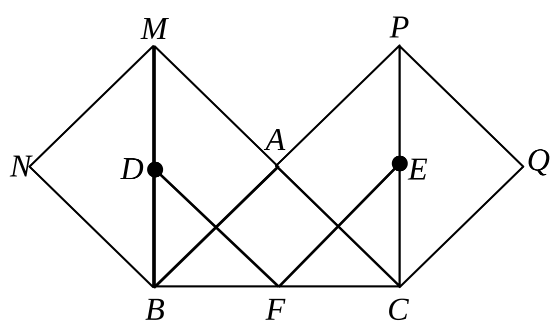
برهان. فرض کنید که $x=(a,c)$ (که در اینجا (m,n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n را نشان می‌دهد). فرض کنید $a=xa'$ و $c=xc'$. در این صورت، $a'b=c'd$. چون $a' \mid a'b$ پس $c' \mid c'd$ و چون $(a',c')=1$ پس $a' \mid d$. بنابراین، $d=a'u$. به دلیل مشابه $b=cv$ و با جایگذاری در معادله نتیجه می‌شود $u=v$. حال کافی است قرار دهیم $y=a', z=c'$ و $t=u=v$. $\square$

حال بنابر لم بالا،

$$a+b+c+d=xy+zt+xz+yt=(x+t)(y+z)$$

و بنابراین، S عددی مرکب است.

۳- برای اثبات، دو مربع AMNB و APQC را روی اضلاع AB و AC بنا می‌کنیم.



واضح است که E و F مراکز این دو مربع‌اند. حال دو مثلث ABP و ACM را در نظر می‌گیریم. روشن است که

$$AB=AM, \qquad AC=AP, \qquad \angle MAC=\angle BAP$$

پس این دو مثلث مساوی‌اند. بنابراین BP = MC.

با توجه به اینکه $AM \perp AB$ و $AP \perp AC$، روشن است که مثلث ABP از دوران مثلث AMC به اندازه 90° به دست می‌آید. بنابراین $MC \perp BP$.

روشن است که FE وسطهای دو ضلع مثلث BCP را به هم وصل کرده است بنابراین EF موازی BP و برابر نصف آن است. به دلیل مشابه FD نیز موازی MC و برابر نصف آن است. چون BP و MC مساوی و عمود بر هم‌اند، نتیجه می‌شود که DF و FE نیز برابر و بر هم عمودند و این حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴- فرض کنید که $A_1, A_2, \dots$ و A_n نقاط قرمز و $B_1, B_2, \dots$ و B_n نقاط آبی را نمایش دهند. نقطه دلخواه O را روی این خط انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $a_i = |OA_i|$ و $b_i = |OB_i|$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$$

و

$$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} |a_i - a_j| + \sum_{i<j} |b_i - b_j| &= \sum_{i<j} (a_i - a_j) + \sum_{i<j} (b_i - b_j) \\
&= \sum_{i<j} (a_j - b_i) + \sum_{i<j} (b_j - a_j) \\
&\le \sum_{i<j} |a_j - b_i| + \sum_{i<j} |b_j - a_j| \\
&\le \sum_{i,j} |a_i - b_j|
\end{aligned}$$

و این دقیقاً همان حکم مسأله است.

یادداشت. اگر نقاط را به جای اینکه روی خط بگیریم، در یک فضای n- بعدی اقلیدسی نیز در نظر بگیریم، کماکان حکم مسأله درست خواهد بود. این مطلب با به کار بستن قضیه لوی برای این حالت خاص مسأله که بررسی کردیم نتیجه می‌شود. این قضیه را بیان می‌کنیم

قضیه. فرض کنید که

$$(1 \le i \le p, 1 \le j \le r) a_{ij}, \quad (1 \le i \le q, 1 \le j \le r) b_{ij}$$

اعدادی حقیقی و دلخواه باشند. اگر نابرابری

$$\sum_{i=1}^{p} \left| \sum_{j=1}^{r} a_{ij} v_j \right| \le \sum_{i=1}^{q} \left| \sum_{j=1}^{r} b_{ij} v_j \right|$$

برای مقادیر حقیقی $(1 \le j \le r) v_j$ درست باشد، آنگاه این نابرابری برای بردارهای یک فضای ضرب داخلی حقیقی (مانند $\mathbb{R}^2$) نیز برقرار خواهد ماند.