جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله اول
نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آذرماه ۱۳۷۰

۱- ثابت کنید بی‌نهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن‌ها کمترین مقدار ممکن [مثبت] باشد.

۲- همه‌ی اعداد طبیعی a، b و c بزرگ‌تر از یک را بیابید که حاصل‌ضرب هر دو عدد از آن‌ها به‌علاوه‌ی یک، مضرب سومی گردد.

۳- اگر برای تابع حقیقی غیرثابت f داشته باشیم

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-۲f(xy)$$

آنگاه $f(۱۳۷۰)$ را به دست آورید.

۴- خط (L) دو خط (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطه‌ی P واقع بر (L) خطی رسم کنید که (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A' و B' قطع کند، به‌طوری‌که $\frac{AA'}{BB'}=K$.

۵- اگر $x\geq y\geq z>۰$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$، ثابت کنید که

$$\frac{x^۲y}{z}+\frac{y^۲z}{x}+\frac{z^۲x}{y}\geq x^۲+y^۲+z^۲$$

۶- ۵۵ عدد دلخواه از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید که همواره می‌توان دو عدد بین اعداد انتخاب‌شده یافت به‌طوری‌که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد.

حل مسأله‌های مرحله‌ی اول نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی

۱- **روش اول**. اگر $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$، $C(x_3,y_3)$ مختصات سه رأس مثلث باشند، می‌دانیم مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

که منظور از $|A|$ قدر مطلق دترمینان ماتریس A است. درنتیجه، کمترین مقدار ممکن S عدد $\frac{1}{2}$ است.

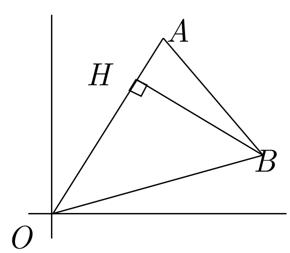
حال نشان می‌دهیم بی‌نهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت همه‌ی آن‌ها $\frac{1}{2}$ است. اگر قرار دهیم $a(m,n)$ و $gcd(m,n)=1$[1]؛ و r و s اعداد طبیعی باشند به‌طوری‌که $ms-nr=1$، آنگاه با قرار دادن $B(r,s)$ مثلث AOB دارای مساحت $\frac{1}{2}$ خواهد بود، زیرا

$$BH=\frac{|ms-nr|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}},\qquad OA=\sqrt{m^2+n^2}$$

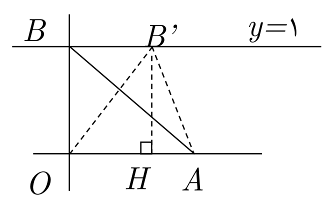
پس

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OABH=\frac{1}{2}$$

درنتیجه، برای هر زوج (m,n) که $gcd(m,n)$ باشد مثلثی با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن $\frac{1}{2}$ است.



روش دوم. مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOB را که در آن $OA=OB=1$ و $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم. حال اگر روی خط $y=1$ نقاطی با طول صحیح اختیار کنیم، این نقاط با O و A مثلث‌هایی می‌سازند که مساحت همه آن‌ها $\frac{1}{2}$ است.



[1] بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک m و n

۲- ماخ

$$\begin{cases} ab+۱=kc \\ ac+۱=k'b \\ bc+۱=k''a \end{cases} \qquad (۱)$$

حالا

$$(ab+۱)(ac+۱)(bc+۱)kk'k''abc$$
$$\Rightarrow mabc+ab+ac+bc+۱=kk'k'abc$$
$$\Rightarrow ab+bc+ca+۱=nab$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{abc}=n$$

اگر $a>۳$ ، $b>۳$ و $c>۳$ ، آنگاه

$$\text{طرف اول} \leq \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶۴}<۱$$

پس اقلاً یکی از عددها باید کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد مثلاً اگر $a=۲$، آنگاه،

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲abc}n>۰$$

اگر $c>۴$ و $b>۴$ باشد طرف اول کوچک‌تر از ۱ می‌شود. پس یکی از آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۴ است. مثلاً $b\geq ۴$. ضمناً از رابطه‌های (۱) نتیجه می‌گیریم که a، b و c دوبه‌دو نسبت به هم اول‌اند. پس $b=۳$ و

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۶c}=n \Rightarrow \frac{۷}{۶c}=n-\frac{۵}{۶}$$
$$\Rightarrow ۷=c(۶n-۵)$$

c عدد ۷ را می‌شمارد پس $c=۷$ و مجموعه‌ی $\{۲,۳,۷\}$ به دست می‌آید. اگر $a=۳$ را در نظر بگیریم

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۳bc}=n\geq ۰$$

در اینجا نیز اگر $b>۴$ و $c>۴$ باشد طرف اول کوچک‌تر از ۱ می‌شود پس یکی از آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۴ است مثلاً $b\leq ۴$. و چون a و b نسبت به هم اول‌اند پس $b=۲$ یا $b=۴$. از $b=۲$ مجدداً جواب قبلی به دست می‌آید و از $b=۴$ داریم

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۱۲c}=n$$

پس

$$\frac{۱۳}{۱۲c}+\frac{۷}{۱۲}=n$$

چون $a=۳$ و $b=۴$ پس c باید نسبت به ۲ و ۳ اول باشد، پس c حداقل مساوی ۵ است و با این فرض طرف اول تساوی کوچک‌تر از ۱ می‌شود که غیرممکن است. پس تنها جواب مسأله $\{۲, ۳, ۷\}$ است.

۳- ماخ

$$f(a+b)=f(a)+f(b)-۲f(ab)$$
$$f(۰)=f(۰+۰)=f(۰)f(۰)-۲f(۰)=۰$$

پس $f(۰)=۰$.

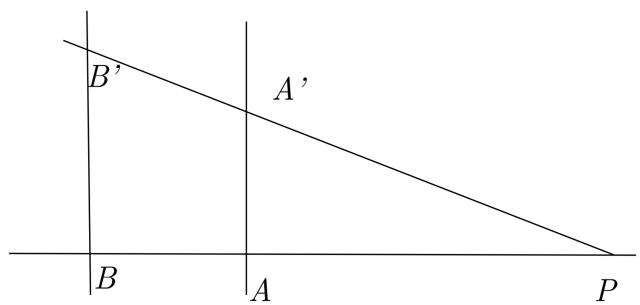
$$f(n+۱)=f(n)+f(۱)-۲f(۰)=۲f(۱)-f(n)$$

پس

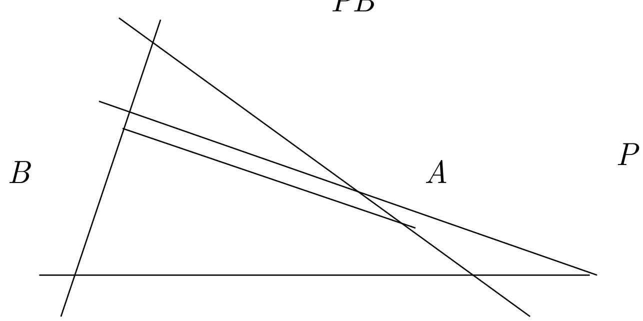
$$f(۱)=f(۱)$$
$$f(۲)=f(۱)-f(۱)=۰$$
$$f(۳)=f(۱)-f(۲)=f(۱)$$
$$f(۴)=f(۱)-f(۳)=۰$$

و با استقرا می‌توان ثابت کرد $f(۲n)=۰$ و $f(۲n+۱)=f(۱)$ ، درنتیجه $f(۱۳۷۰)=۰$

۴- ماخ



واضح است که $(n) \,||\, (m)$ باشد آنگاه مسأله وقتی دارای جواب است که $K=\frac{PA}{PB}$. در این حالت هر خطی که از P بگذرد (m) و (n) را قطع کند جواب مسأله است. در حالتی که $K\neq\frac{PA}{PB}$ مسأله جواب ندارد.



حال فرض می‌کنیم که (m) و (n) متقاطع باشند و $(m)\cap(n)=\{c\}$. در مثلث ABC بنابر قضیه‌ی منلائوس داریم

$$\frac{A'A}{A'C}\times\frac{B'C}{B'B}\times\frac{PB}{PA}=۱$$

و یا

$$\frac{B'C}{A'C}\times\frac{PA}{PB}\times\frac{1}{K}=K''$$

پس کافی است نقاط B'' و A'' را به ترتیب روی CB و CA به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{B''C}{A''C}=k'$ باشد و آنگاه از P خیلی به‌موازات $A''B''$ رسم کنیم. در این حالت مسأله یک جواب دارد.

۵- ماخ باید ثابت کنیم که

$$x^2\left(\frac{y}{z}\right)+y^2\left(\frac{z}{x}-1\right)+z^2\left(\frac{x}{y}-1\right)>0$$

اگر $a=\frac{y}{z}-1, b=\frac{z}{x}-1, c=\frac{x}{y}-1$ بنابر نامساوی حسابی – هندسی داریم

$$a+b+c\geq 0$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$ax^2+by^2+cz^2\geq 0$$

چون $c\geq -a-b$ بنابراین،

$$ax^2+by^2+az^2-bz^2\geq 0$$

$$a\ \ x^2-z^2\ \ +b\ \ y^2-z^2\ \ \geq 0$$

$$\frac{y-z}{z}\ \ x^2-z^2\ \ +\frac{z-x}{x}\ \ y^2-z^2\ \ \geq 0$$

$$\frac{x+z}{z}-\frac{y+z}{x}\geq 0$$

(در مرحله‌ی آخر $(x-z)(y-z)$ را از طرفین ساده کرده‌ایم.) چون $x+z\geq y+z$, $\frac{1}{z}\geq\frac{1}{x}$ بنابراین،

$$\frac{x+z}{z}\geq 0\ \frac{y+z}{x}$$

یعنی $\frac{x+z}{z}-\frac{y+z}{x}\geq 0$. پس

$$ax^2+by^2+cz^2\geq 0$$

۶- ماخ اگر در مجموعه‌ی

$$\{a,a+1,\dots,a+2n-1\}$$

$n+1$ عدد انتخاب کنیم، تفاضل دوتای آن‌ها n است. برای اثبات زوج‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$(a,a+n),(a+1,a+n+1),\dots,(a+n-1,a+2n-1)$$

و اصل لانه‌کبوتری را به کار می‌بریم. حال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به ۵ دسته‌ی زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{1,2,\dots,20\},\ \{21,22,\dots,40\},\ \{41,42,\dots,60\},\ \{61,62,\dots,80\},\ \{81,82,\dots,100\}$$

واضح است که از میان ۵۱ عدد باید یازده تای آن‌ها از یکی از این دسته‌ها انتخاب شوند و با آنچه که در بالا گفتیم اثبات تمام است.