جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله اول
هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۸

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
-	۶	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

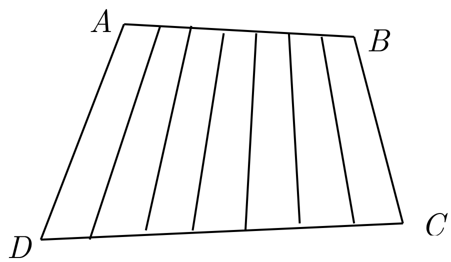
- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آذرماه ۱۳۶۸

۱- نشان دهید اگر a، b و c طول‌های اضلاع یک مثلث باشند، داریم

$$۳(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^{۲}<۴(ab+bc+ca)$$

۲- در چهارضلعی $ABCD$ (شکل زیر) ضلع AB را به هفت قسمت مساوی و ضلع CD را نیز به هفت قسمت مساوی تقسیم [کرده] و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا هفت چهارضلعی کوچک به دست آید.



ثابت کنید دست‌کم یکی از چهارضلعی‌های کوچک مساحتی برابر $\frac{۱}{۷}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ دارد.

۳- ثابت کنید معادله‌ی

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲^{t}xyz$$

که در آن x، y، z و t اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

۴- اگر $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ فواصل یک نقطه در درون مثلث قائم‌الزاویه از سه ضلع آن و a طول وتر مثلث باشد، نشان دهید

$$\sqrt{d_۱}+\sqrt{d_۲}+\sqrt{d_۳}<\sqrt{۲a}$$

۵- n نقطه درروی صفحه مفروض است به‌طوری‌که فاصله‌ی بین هر دونقطه از آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید تعداد جفت‌هایی از این نقاط که فاصله‌ی آن‌ها دقیقاً مساوی یک باشد از $۳n$ تجاوز نمی‌کند.

۶- روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر نقطه‌ی دلخواه $A_۰$ را انتخاب و در جهت مثبت دایره‌ی مثلثاتی نقاط $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و ... را طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{A_۰A_۱}=۱$ متر، $\widehat{A_۱A_۲}=\frac{۱}{۲}$ متر، ...، $\widehat{A_{n-۱}A_n}=\frac{۱}{n}$ متر و ... (تعداد نقاط نامتناهی است.)

الف) نشان دهید هیچ دونقطه‌ی A_i و A_j $(i\neq j)$ بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید اقلاً یک‌کمان یک میلی‌متری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط A_i واقع بر آن بی‌نهایت است.

دانش آموزان کشور، آذرماه ۱۳۶۸

۱- ماخ داریم

$$(a+b+c)^۲ - ۳(ab+bc+ca) = \frac{۱}{۲}((a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲ \geq ۰$$

و این همواره برقرار است. بنابراین،

$$۳(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^۲$$

برای اثبات قسمت دوم نامساوی می‌نویسیم

$$۴(ab+bc+ca)-(a+b+c)^۲ = \\ a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b+c)$$

چون در مثلثی به اضلاع a، b و c داریم

$$b+c>a \Rightarrow b+c-a>۰$$
$$c+a>b \Rightarrow c+a-b>۰$$
$$a+b>c \Rightarrow a+b-c>۰$$

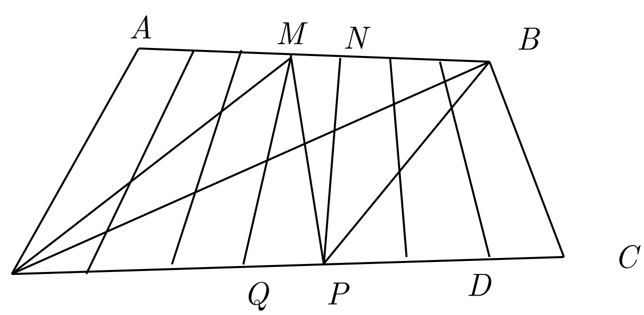
بنابراین؛

$$(a+b+c)^۲ < ۴(ab+bc+ca)$$

۲- ماخ داریم

$$\left.\begin{aligned} S_{MPN} &= \frac{۱}{۴}S_{MBP} \\ S_{MPQ} &= \frac{۱}{۴}S_{MPD} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{۱}{۴}S_{MBPD}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{BDP} &= \frac{۴}{۷}S_{BDC} \\ S_{DMB} &= \frac{۴}{۷}S_{DBA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{MBPD} = \frac{۴}{۷}S_{ABCD}$$



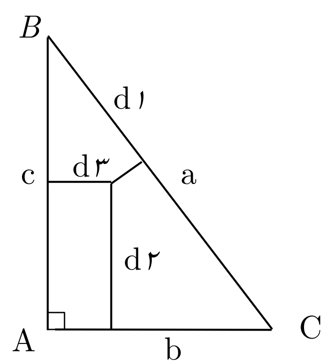
درنتیجه، $S_{MNPQ} = \frac{۱}{۷}S_{ABCD}$.

۳- فرض کنیم $x,y,z,t\in\mathbb{N}$ جوابی از این معادله باشد. واضح است که x، y و z باید زوج باشند. زیرا اگر فقط یکی از آن‌ها و یا همه فرد باشند، آنگاه سمت چپ معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=2^t xyz$ عدد فرد و سمت راست زوج خواهد بود که غیرممکن است. و اگر فقط دوتای آن‌ها فرد باشند آنگاه سمت چپ معادله بر ۴ قابل قسمت نیست ولی سمت راست‌بر ۴ قابل قسمت است.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=2^{t+1}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)$$

باهمان استدلال بالا، نتیجه می‌شود که $\frac{x}{2}$، $\frac{y}{2}$ و $\frac{z}{2}$ نیز زوج هستند. پس به همین ترتیب برای هر $k\in\mathbb{N}$، باید $\frac{x}{2^k}$ عدد صحیح باشد که غیرممکن است.

۴-



داریم

$$\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}=\sqrt{ad_1}.\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{bd_2}.\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{cd_3}.\sqrt{\frac{1}{c}}$$
$$\leq\sqrt{ad_1+bd_2+cd_3}.\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt{ad}$$

(بنابر نامساوی کوشی). اما $ad_1+bd_2+cd_3=2S=bc$ ، پس

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{d_i}\leq\sqrt{bc}.\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{abc}}$$

چون

$$ab+bc+ac<a^2+b^2+c^2=2a^2$$

پس

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{d_i}<\sqrt{bc}.\sqrt{\frac{2a^2}{abc}}$$

درنتیجه، $\sum_{i=1}^{3}\sqrt{d_i}<\sqrt{2a}$

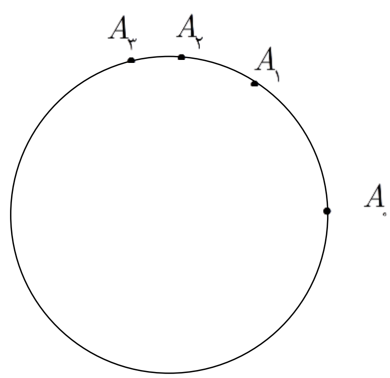
۵- ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها با A مساوی یک باشد. زیرا تمام نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها با A مساوی یک است روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دونقطه روی این دایره که فاصله‌شان حداقل یک باشد باید در دو سرکمانی به‌اندازه‌ی حداقل ۶۰ درجه واقع باشند. درنتیجه بیشتر از شش نقطه ممکن نیست.

به‌این‌ترتیب برای هر نقطه بیش از شش جفت که دارای خاصیت فوق باشد نمی‌توان تشکیل داد و چون تعداد نقطه‌ها n است پس کلاً $۶n$ جفت به دست می‌آید اما جفت (B,A) فرقی ندارد پس $\frac{۶n}{۲} = ۳n$ جفت به دست می‌آید. یعنی بیش از $۳n$ جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

۶- الف) اگر دونقطه‌ی A_i و A_j به فرض $(j > i)$ بر هم منطبق باشند خواهیم داشت

$$\frac{۱}{i+۱} + \frac{۱}{i+۲} + \ldots + \frac{۱}{j} = ۲k\pi$$

طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس تساوی نمی‌تواند برقرار باشد.



ب) چون هیچ دونقطه‌ای بر هم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است اقلاً در یک کمان یک میلی‌متری باید تعدادشان نامتناهی باشد زیرا تعداد فواصل یک میلی‌متری که می‌توان روی این دایره جدا کرد، متناهی است.