بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۶

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۶

۱- در مثلث ABC میانه‌ی AM را رسم کنید و نقطه‌ی وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع کند. ثابت کنید

$$S_{ABC} = ۱۲S_{AID}$$

(منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است).

۲- ثابت کنید حاصل جمع هیچ k عدد صحیح متوالی و مثبت را نمی‌توان به‌صورت ۲^n نوشت. (k و n اعداد صحیح و مثبت و $k \neq ۱$است)

۳- همه‌ی چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد.

$$xP(x-۱) = (x-۱۲)P(x)$$

۴- مثلث ABC مفروض است.

الف) ثابت کنید عده‌ی بی‌شماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به‌طوری‌که مثلث ABC در آن‌ها محاط باشد (یعنی از رئوس A، B و C روی یکی از اضلاع مثلث ساخته‌شده قرار گیرد).

ب) از میان مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته‌شده مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکزیمم باشد.

۵- چندجمله‌ای نا صفر $f(x)$ را چنان تعیین کنید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$f(۲x) = f'(x)f''(x)$$

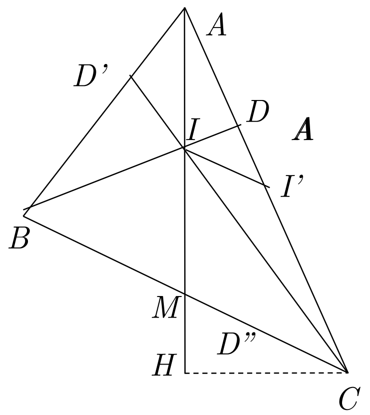
۶- اعداد صحیح و مثبت n ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... و a_n را طوری تعیین کنید که

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = ۱۳۶۶$$

و حاصل‌ضرب $a_۱a_۲\ldots a_n$ ماکزیمم باشد.

حل مسأله های مرحله‌ی اول پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن‌ماه ۱۳۶۶

۱-



مساحت مثلث AMC برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت ABC است و مساحت مثلث AIC نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت AMC است (زیرا قاعده‌ی آن $AI=\frac{۱}{۲}AM$؛ و CH ارتفاع مشترک آن‌هاست).

پس مساحت AIC برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت ABC است. حال ثابت می‌کنیم که مساحت AID برابر $\frac{۱}{۳}$ مساحت AIC است. این دو مثلث دارای ارتفاع مشترک هستند. بنابراین، باید ثابت کنیم $AC=۳AD$ یا $\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}$. برای این منظور، از I موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در I' قطع کند. چون I وسط AM است، پس $\frac{II'}{MC}=\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{II'}{BC}=\frac{۱}{۴}$. از تشابه دو مثلث DII' و DBC، داریم

$$\frac{DI}{DB}=\frac{II'}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{DB}{DI}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow\frac{DB}{BI}=\frac{۴}{۳}\qquad(۱)$$

از D خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا BC را در D'' قطع کند. دو مثلث AMC و $DD''C$ متشابه‌اند، پس

$$\frac{DC}{AC}=DD''AM=\frac{DD''}{۲IM}=\frac{۱}{۲}\times\frac{DD''}{IM}\qquad(۲)$$

اما دو مثلث BDD'' و BIM متشابه‌اند. پس بنابر (۱)،

$$\frac{DD''}{IM}=\frac{BD}{BI}\Rightarrow\frac{DD''}{IM}=\frac{۴}{۳}\qquad(۱)$$

بنابر (۱) و (۲)، داریم

$$\frac{DC}{AC}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

به‌عبارت‌دیگر

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC-DC}{AC}=۱-\frac{DC}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow AC=۳AD$$

۲- فرض کنید، p، $p+۱$، ... و $p+k-۱$، k عدد صحیح مثبت و متوالی باشند و

$$p+(p+۱)+\ldots+(p+k-۱)=۲^n$$

درنتیجه،

$$kp+(۱+۲+۳+\ldots+k-۱)=۲^n$$

$$kp+\frac{(k-۱)k}{۲}=۲^n$$

$$k(p+k-۱۲)=۲^n\qquad(۱)$$

دو حالت را بررسی می‌کنیم.

الف) اگر k فرد باشد، $p+\frac{k-۱}{۲}$ عددی صحیح است و بنابراین تساوی (۱) غیرممکن است چون ۲^n عامل فردی مانند k ندارد (k بزرگ‌تر از واحد است).

ب) اگر k زوج باشد، داریم $k=۲l$، پس رابطه‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$۲l\left(p+\frac{۲l-۱}{۲}\right)=۲^n$$

یعنی

$$l(۲(p+l)-۱)=۲^n$$

چون $۲(p+l)-۱$ فرد است، پس ۲^n باید دارای عامل اول فرد باشد که غیرممکن است؛ پس حکم برقرار است.

۳- فرض کنیم $P(x)=P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $P(x)$ بر x بخش‌پذیر است. بنابراین $P_n(x)=xP_{n-۱}(x)$ ($P_{n-۱}$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n-۱$ است). درنتیجه،

$$P_n(x-۱)=(x-۱)P_{n-۱}(x-۱)$$

یا

$$xP_n(x-۱)=x(x-۱)P_{n-۱}(x-۱)$$
$$(x-۱۲)P_n(x)=x(x-۱)P_{n-۱}(x-۱)$$

بنابراین، $P_n(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. پس داریم

$$P_n(x-۱)=(x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$
$$xP_n(x-۱)=x(x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$
$$(x-۱۲)P_n(x)=x(x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$

بنابراین $P_n(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است و می‌توان نوشت

$$P_n(x)=x(x-۱)(x-۲)P_{n-۳}(x)$$

با ادامه دادن این روش خواهیم داشت

$$P(x)=P_n(x)=x(x-۱)(x-۲)(x-۳)...(x-۱۱)P_{n-۱۲}(x) \qquad (۱)$$

با تبدیل x به x-۱ داریم

$$P_n(x-۱)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)...(x-۱۲)P_{n-۱۲}(x-۱)$$

یا

$$(x-۱)P_n(x)=x(x-۱)(x-۲)...(x-۱۱)(x-۱۲)P_{n-۱۲}(x-۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت

$$(x-۱۲)x(x-۱)(x-۲)...(x-۱۱)P_{n-۱۲}(x)=$$
$$x(x-۱)(x-۲)...(x-۱۱)(x-۱۲)P_{n-۱۲}(x-۱)$$

درنتیجه، $P_{n-۱۲}(x)=P_{n-۱۲}(x-۱)$. می‌گیریم $Q(x)=P_{n-۱۲}(x)$؛ داریم

$$Q(x-۱)=Q(x)$$

که $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n-۱۲$ است. اگر $Q(x)=Q.(x)=c$ (یعنی $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی صفر و برابر با یک مقدار ثابت باشد)، آنگاه رابطه‌ی $Q(x)=Q(x-۱)$ برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم که $Q(x)=c$ تنها حالتی است که رابطه‌ی $Q(x)=Q(x-۱)$ می‌تواند برقرار باشد. اگر

$$Q(x) = Q_k(x) = a_\circ x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k$$

که در آن $k \geq 1$ و $a_\circ \neq \circ$، آنگاه از $Q(x) = Q(x-1)$ نتیجه می‌شود.

$$a_\circ(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \dots + a_k = a_\circ x^k + a_1 a^{k-1} + \dots + a_k$$

با مساوی قراردادن ضریب x^{k-1} در دو طرف تساوی، خواهیم داشت

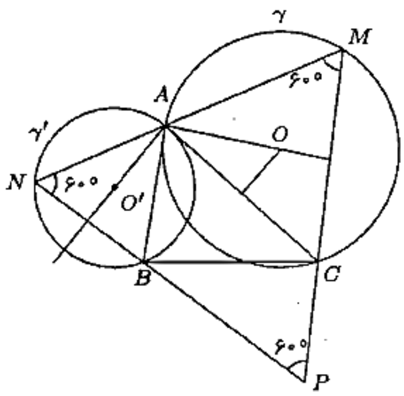
$$ka_\circ + a_1 = a_1 \Rightarrow a_\circ = \circ$$

و این متناقض با $a_\circ \neq \circ$ است. پس $k = \circ$ و بنابراین، $Q(x) = c$. درنتیجه،

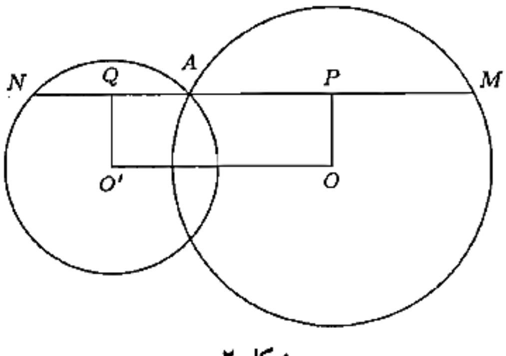
$$P(x) = cx(x-1)(x-2)\dots(x-11)$$

یعنی $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۱۲ است.

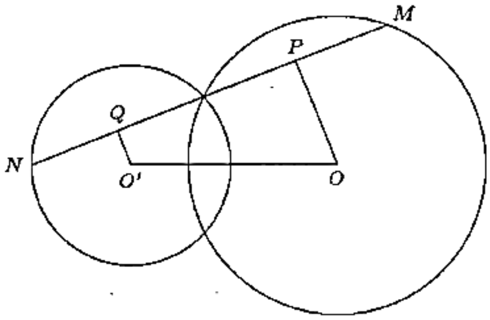
۴- کمان درخورهای ۶۰° را بر AC و AB رسم می‌کنیم و آن‌ها را دوایر γ و γ' می‌نامیم. هر خطی که از A رسم شود تا γ و γ' را در M و N قطع کند و آنگاه خطوط MC و NB همدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند، مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱). درنتیجه بی‌نهایت مثلث متساوی‌الاضلاع ماکزیمم شود کافی است ضلع آن ماکزیمم شود پس برای حل این قسمت کافی است از نقطه‌ی A خطی رسم کنیم به‌طوری‌که MN ماکزیمم شود. ثابت می‌کنیم هرگاه از A خطی به‌موازات OO' (خط المرکزین دو دایره‌ی γ و γ') رسم کنیم این خاصیت را خواهد داشت.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

اگر MN موازی OO' باشد، آنگاه واضح است که $MN = ۲OO'$ (شکل ۲).
ولی اگر MN موازی OO' نباشد، $MN < ۲OO'$ (شکل ۳). زیرا اگر از O و O' به MN عمود کنیم و پاهای عمود را P و Q بنامیم، خواهیم داشت

$$\frac{MN}{۲} = PQ < OO' \Rightarrow MN < ۲OO'$$

۵- ماخ فرض می‌کنیم

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_۱ x + a_۰$$

در این صورت، درجه‌های $f(x)$، $f'(x)$ و $f''(x)$ به ترتیب n، $n-۱$ و $n-۲$ هستند.
باید داشته باشیم:

$$f(۲x) = f'(x) f''(x)$$

پس $n = (n-۱) + (n-۲)$ و $n = ۳$. همچنین

$$\forall x, \quad ۸ax^۳ + ۴bx^۲ + ۲cx + d = (۳ax^۲ + ۲bx + c)(۶ax + ۲b)$$

از اتحاد فوق، دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} ۸a = ۱۸a^۲ \\ ۴b = ۶ab + ۱۲ab \\ ۲c = ۴b^۲ + ۶ac \\ d = ۲bc \end{cases}$$

پس از حل، $f(x) = \frac{۴}{۹} x^۳$.

۶- ماخ هر یک از a_iها را می‌توان کوچک‌تر از ۴ گرفت زیرا $a_i = (a_i - ۲) + ۲$ و اگر $a_i \geq ۴$، $۲(a_i - ۲) \geq a_i$ و اگر به‌جای a_i دو عدد $(a_i - ۲)$ و ۲ را قرار دهیم، حاصل‌ضرب بزرگ‌تر خواهد شد. حال ادعا می‌کنیم که در بین a_iها بیش از دوتا عدد ۲ نمی‌توانیم داشته باشیم زیرا

$$۳ \times ۳ > ۲ \times ۲ \times ۲, \quad ۲ + ۲ + ۲ = ۳ + ۳$$

پس به‌جای هر سه تا عدد ۲ می‌توان اعداد ۳ و ۳ را انتخاب کرد. درنتیجه با توجه به‌تساوی

$$۱۳۶۶ = ۳ \times ۴۵۴ + ۲ + ۲$$

خواهیم داشت

$$n = ۴۵۶, \qquad a_۱ = a_۲ = \ldots = a_{۴۵۴} = ۳, \qquad a_{۴۵۵} = a_{۴۵۶} = ۲$$

یعنی ماکزیمم حاصل‌ضرب، $۳^{۴۵۴} \times ۲^۲$ خواهد بود.