



دخترچه سوارات و پاسف تشریمی مرطه اول

سی و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

| مدت آزمون (دقیقه) | تعداد سوالات | |
|----------------------|------------------|---------------------|
| | مساله‌های تشریحی | سوالات چند گزینه‌ای |
| ۱۸۰ | - | ۳۰ |

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

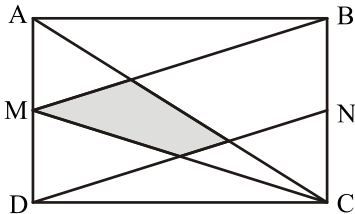
توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

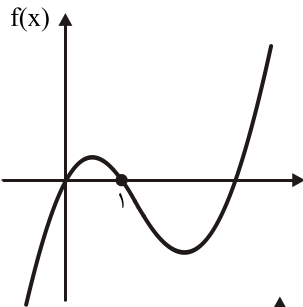
- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سوالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- در کدام گزینه هر سینا می‌خواهد برای دوره کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

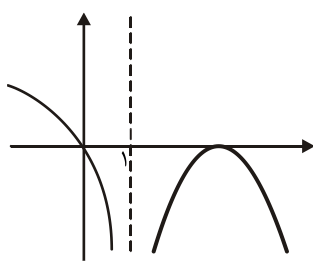
۲- x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = 6$ و $x^3 + y^3 = 6$ مقدار $x^6 + y^6$ چقدر است؟



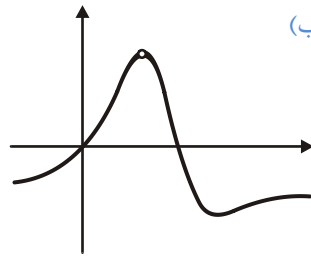
۳- در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشور خورده است؟



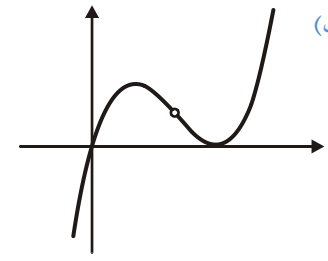
۴- فرض کنید نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودار همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند).



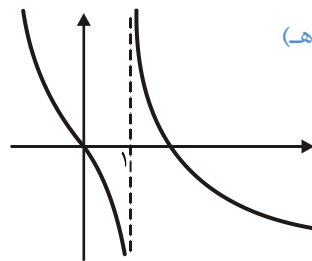
(ج)



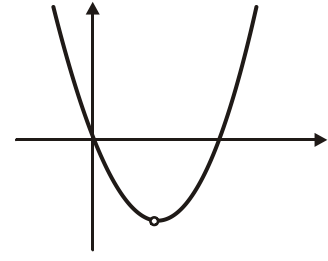
(ب)



(الف)



(ه)



(د)

۵- یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست‌کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

(ه) بی‌نهایت

(د) ۶

(ج) ۲

(ب) ۱

(الف) ۰

۶- در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های BAD ، CAD و ABC با هم برابرند و طول پاره خط‌های BD و DC ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چقدر است؟

- الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ه) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۷- دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

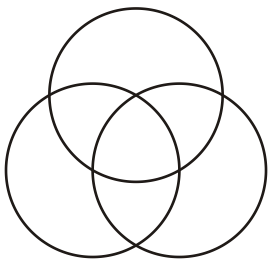
رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟

- الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۸- در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

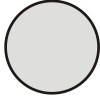



- $a = 100!$, $b = 2^{100}$, $c = 2^{2^{100}}$
- الف) $b < a < c$ ج) $a < b < c$ د) $b < c < a$
- ب) $a < c < b$ ه) $a < c < b$

۹- می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبرو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک منطقه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است.

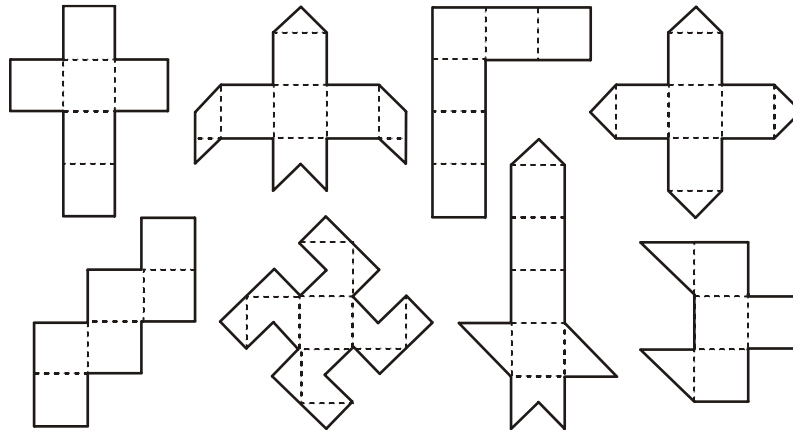


۱۰- وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $2^{19} = 524288$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه به زاهدان انتخاب شده و در نقشه وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

۱۱- چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همه قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟

- الف) تک نقطه‌ای ب)  ج)  د) 
- ه) 

۱۲- با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳- کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل دارد؟

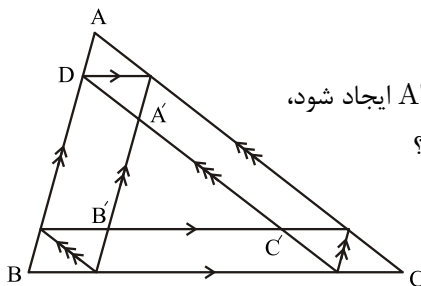
۱۴- در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysec.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود»، «عالی بود»، و «به‌تر از این نمی‌شد». پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود، به غیر از عباس چند نفر در نظرسنجی شرکت کرده‌اند؟

۱۵- چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.

۱۶- «ضربین حساب» ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 3^{1435} \times 2^{014}$ دست کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $729 = 9 \times 9 \times 9$)



۱۷- در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)



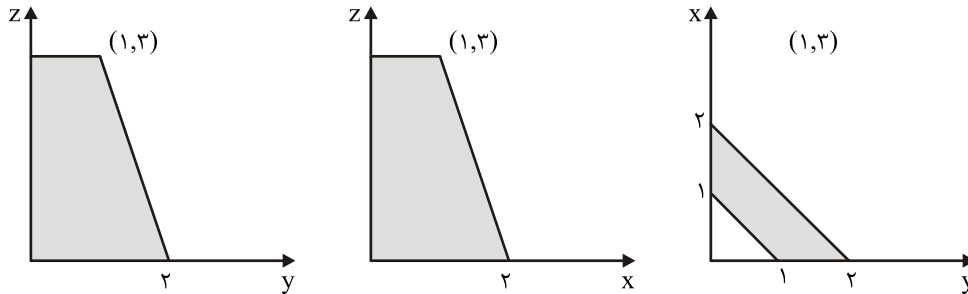
۱۸- مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C''$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟

۱۹- مجموعه S را مجموعه همه اعداد حقیقی مثل A می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

$$a(a-1) + x(x-1) + y(y-1) = \frac{3}{2}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه قدر است؟

۲۰- تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل‌های زیر است: مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه قدر است؟



۲۱- چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 \\ yz + zt + ty = x^2 \\ zt + tx + xz = y^2 \\ tx + xy + yt = z^2 \end{cases}$$

(ه) بی‌نهایت

(د) ۲۵

(ج) ۹

(ب) ۵

(الف) ۱

۲۲- تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیه شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیه، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستان شرقی، غربی، شمالی، و جنوبی به صورت زیر بوده است (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان

داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

| از | شکرستان | ن. شرقی | ن. غربی | ن. شمالی | ن. جنوبی |
|----------|---------|---------|---------|----------|----------|
| شکرستان | x | ۳ | ۱ | ۰ | ۲ |
| ن. شرقی | ۰ | x | ۲ | ۰ | ۱ |
| ن. غربی | ۱ | ۰ | x | ۳ | ۰ |
| ن. شمالی | ۲ | ۰ | ۱ | x | ۱ |
| ن. جنوبی | ۲ | ۰ | ۰ | ۲ | x |


(الف) شکرستان

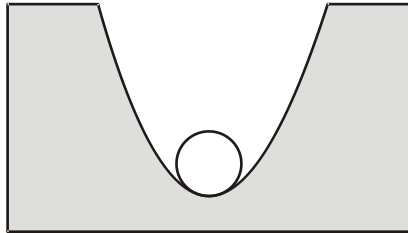
(ب) نمکستان شرقی


(ج) نمکستان غربی


(د) نمکستان شمالی

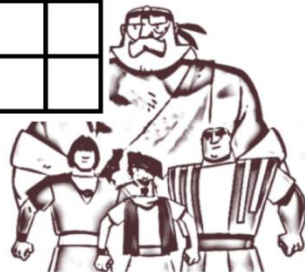
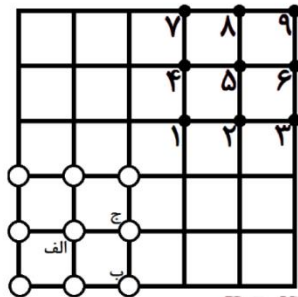
(ه) نمکستان جنوبی

۲۳-  طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۴ و $۲\sqrt{۷}$ است. خطی که از وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطه D برخورد می‌کند. طول AD چقدر است؟



۲۴-  وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی که در آن قرار دارد، سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است (سهمی نمودار یک چند جمله‌ای درجه دوم است). اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌تری لوله‌ی که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟

۲۵-  پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توپر نمایش داده شده برود، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



الف) ۲، ۳، ۵

ب) ۵، ۷، ۸

ج) ۸، ۷، ۹

د) نمی‌توان تعیین کرد.

ه) نمی‌توان تعیین کرد.

«پاسخنامه‌ی تشریحی»

۱- پاسخ ۱۶۸۰ است.

هر روش مطالعه معادل است با یک نحوه‌ی قرار دادن سه کلمه‌ی ریاضی، سه کلمه فیزیک و سه کلمه‌ی ادبیات در یک ردیف ۹ تایی. بدین منظور، برای انتخاب مکان سه کلمه‌ی ریاضی، حالت مختلف داریم. سپس از بین ۶ جایگاه باقی‌مانده، برای انتخاب مکان سه کلمه ادبیات، حالت مختلف داریم و بعد از آن، مکان کلمات فیزیک به طور یکتا مشخص می‌شود. پس جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$

۲- پاسخ ۶۳۵۲۰ است.

جواب راه حل اول: ابتدا می‌توان xy را محاسبه کرد.

$$36 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 40 + 2xy \Rightarrow xy = -2$$

حال با استفاده از اتحاد مجموع مکعب‌ها داریم:

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2) = 4(x^4 + y^4 - 4)$$

می‌توان مقدار $x^4 + y^4$ را هم به سادگی محاسبه کرد.

$$1600 = 40^2 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + 8 \Rightarrow x^4 + y^4 = 1592$$

پس در نهایت داریم:

$$x^6 + y^6 = 4(1592 - 4) = 40 \times 1588 = 63520$$

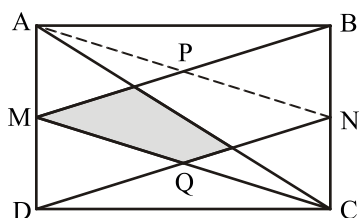
راه حل دوم: طبق قسمت اول راه‌حل بالا می‌دانیم که حاصل ضرب x و y برابر -2 است. بنابراین با توجه به این که مجموع آن‌ها هم برابر 6

است، x و y دو ریشه چندجمله‌ای $z^2 - 6z - 2$ هستند. بنابراین

$$\{x, y\} = \left\{ 3 + \sqrt{9+2}, 3 - \sqrt{9+2} \right\} = \left\{ 3 + \sqrt{11}, 3 - \sqrt{11} \right\}$$

حال با به دست آمدن مقدار x و y ، می‌توان $x^6 + y^6$ را با بسط دادن $(3 \pm \sqrt{11})^6$ به دست آورد.

۳- پاسخ ۸ است.

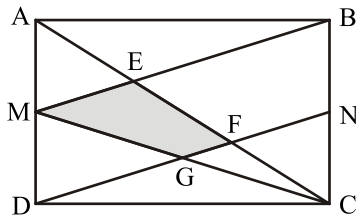


راه حل اول: مطابق شکل زیر اگر با پاره‌خطی نقطه‌ی A را به N وصل کنیم، با توجه به این که $AN \parallel MC$ و $MB \parallel DN$ ، چهارضلعی $PNQM$ یک متوازی‌الاضلاع است. مرکز این چهارضلعی وسط قطرهای آن یعنی وسط MN است که همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. دقت کنید که خط AC از مرکز این متوازی‌الاضلاع عبور می‌کند و بنابراین مساحت آن را نصف می‌کند.

پس مساحت چهارضلعی هاشور خورده، نصف مساحت چهارضلعی $MPNQ$ است که برابر مساحت مثلث MQN است. برای به دست

آوردن مساحت این مثلث دقت کنید که ارتفاع نظیر Q ، $\frac{1}{4}$ ضلع AD و قاعده‌ی آن یعنی MN برابر طول ضلع AB است. پس در کل

مساحت مستطیل 8 برابر مساحت مثلث MNQ و بنابراین 8 برابر مساحت چهارضلعی هاشور خورده است.



راه حل دوم: مطابق شکل زیر این بار سه رأس دیگر چهارضلعی هاشور خورده را E، F و G می‌نامیم. هم‌چنین مساحت مستطیل را با S نمایش می‌دهیم.

$$\text{مساحت } AMC = \frac{1}{2} AM \cdot CD = \frac{1}{2} \times \frac{AD}{2} \times DC = \frac{1}{4} S$$

دقت کنید که دو مثلث AEM و CEB متشابه هستند. پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث برابر

نسبت $\frac{AM}{BC}$ است که برابر $\frac{1}{2}$ است. از طرفی می‌دانیم مجموع طول ارتفاع‌های این دو مثلث برابر طول ضلع AB است. پس طول ارتفاع

AEM برابر $\frac{1}{3} AB$ است و در نتیجه:

$$\text{مساحت } AME = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times AM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} AB \times \frac{1}{2} AD = \frac{1}{12} S$$

پس مساحت مثلث EMC که تفاضل مساحت مثلث‌های AMC و AME است، برابر $\frac{1}{4} S - \frac{1}{12} S = \frac{1}{6} S$ است.

در نهایت توجه کنید که چون مثلث‌های CFG و CEM متشابه هستند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $\left(\frac{CG}{CM}\right)^2$ است. پس:

$$\text{مساحت } MEC = \frac{3}{4} \times \text{مساحت } MEF = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} S = \frac{1}{8} S$$

۴- پاسخ ۴ است.

از آنجا که برای اعداد کمتر از صفر $f(x)$ و $x-1$ هر دو منفی هستند، حاصل تقسیم آن‌ها عددی مثبت خواهد شد. بنابراین

گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ باشند. فرض کنید f به جز نقاط صفر و یک، در نقطه c صفر شده است. برای اعداد بیشتر

از c، $f(x)$ و $x-1$ هر دو مثبت هستند. بنابراین در این محدوده نیز حاصل تقسیم آن‌ها مثبت است. به این ترتیب گزینه‌های ۳ و ۵ نیز

نمی‌توانند جواب مسأله باشند. بنابراین جواب تنها می‌تواند گزینه ۴ باشد. اگر $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ، آنگاه $\frac{f(x)}{x-1} = x(x-2)$

نموداری شبیه گزینه ۴ دارد.

۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مثبت هر عددی یک است و دومین مقسوم‌علیه کوچک عدد اولی مثل p است. سومین مقسوم‌علیه هم عدد

اول دیگری مثل q یا p^2 است. اگر n عددی کوچولو باشد، مقسوم‌علیه سوم آن نمی‌تواند p^2 باشد، چون در این صورت

$$n = 1 + p + p^2$$

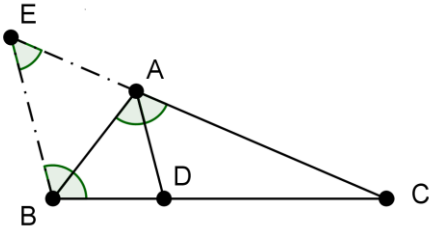
که در این صورت n نمی‌تواند بر p بخش پذیر باشد.

پس $n = 1 + p + q$ که $p < q$ دو مقسوم‌علیه اول کوچک n هستند. چون $p | n$ و $q | n$ ، نتیجه می‌شود، $q | 1 + p$ و $p | 1 + q$

. پس $q \leq 1 + p$ ، از طرف دیگر $p < q$. بنابراین $q = p + 1$ و در نتیجه p و q دو عدد اول متوالی هستند. این یعنی $p = 2$ و

$q = 3$. در این صورت n برابر ۶ می‌شود که خاصیت مورد نظر را دارد. پس تنها همین یک عدد کوچولو را داریم و پاسخ گزینه‌ی ۲ است.

۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



طول AB را x می‌نامیم. از نقطه‌ی B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند. با توجه به موازی بودن BE و AD داریم:

$$BEA = CAD, \quad EBA = BAD$$

بنابراین، $EBA = BEA$ و در نتیجه مثلث ABE متساوی‌الساقین است، یعنی $EA = BA = x$. از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس برای دو خط موازی AD و BE،

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{1}$$

بنابراین $CA = 2AE = 2x$ و نیز، $CE = 3x$.

از طرف دیگر، توجه کنید که $CBE = CAB$ ، پس دو مثلث CAB و CBE با همین ترتیب رئوس با یکدیگر متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC}$$

که با توجه به روابط قبلی به دست می‌آید:

$$\frac{2x}{3} = \frac{3}{3x}$$

که از آن به دست می‌آید $x^2 = \frac{3}{2}$ و در نتیجه $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

برای تعیین رقم یکان a_{1392} کافی است باقی‌مانده تقسیم آن به 10 را مشخص کنیم.

برای این منظور دقت کنید برای هر عدد طبیعی n : $10^{a_n} \equiv 10^{10^n} \equiv 1 \pmod{10}$ (به پیمانه‌ی ۴)

یعنی هر a_n ای به شکل $4b_n + 1$ است که b_n خود یک عدد صحیح است. حال داریم:

$$a_{1392} \equiv 10^{a_{1392}} \equiv 10^{4b_{1392} + 1} \equiv (10^4)^{b_{1392}} \times 10 \equiv (10000)^{b_{1392}} \times 10 \equiv 10$$

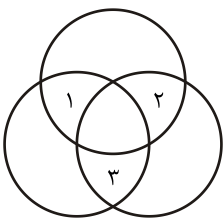
۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$b = 2^{100} = \overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{100} = 2 \times \dots \times 2 \times 2 \times 2 < (2 \times 3 \times \dots \times 99) \times 100 = 100! = a$$

$$a = 1 \times 2 \times \dots \times 100 < 100^{100} < 128^{100} = 2^{700} < 2^{3^7} < 2^{3^{17}} = c$$

پس $b < a < c$

۹- پاسخ ۸۴ است.



فرض می‌کنیم ناحیه‌های مشخص شده با اعداد ۱، ۲، ۳ در شکل زیر به ترتیب دارای رنگ‌های X، Y، Z باشند. توجه کنید که تمامی رنگ‌های X، Y، Z نمی‌توانند متمایز باشند زیرا در غیراین صورت ناحیه‌ی مرکزی را

با هیچ رنگی نمی‌توان رنگ کرد.

اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: X, Y, Z هم‌رنگ باشند. در این حالت رنگ مشترک را می‌توان به ۳ حالت انتخاب کرد. همچنین هر یک

از دیگر نواحی را می‌توان به دو صورت رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت تعداد رنگ‌آمیزی‌ها برابر $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ است.

حالت دوم: در میان X, Y, Z از یک رنگ دو بار و از یک رنگ یک بار استفاده شده باشد. برای انتخاب ناحیه‌ی با رنگ متمایز ۳، برای

انتخاب رنگ این ناحیه ۳ و برای انتخاب رنگ دیگر ۲ انتخاب داریم. پس برای مشخص نمودن رنگ ناحیه‌ی ۱، ۲، ۳ در این حالت

$18 = 3 \times 3 \times 2$ روش متمایز داریم. حال توجه کنید که رنگ ناحیه‌ی مرکزی به صورت یکتا مشخص می‌شود چرا که دو رنگ متمایز،

همسایه دارد. همچنین دو تا از نواحی گوشه‌ای نیز با هر دو رنگ مجاور هستند و رنگ این نواحی نیز به صورت یکتا مشخص می‌گردد. تنها

ناحیه‌ی نامشخص ناحیه‌ی گوشه‌ای است که با دو ناحیه‌ی هم‌رنگ مجاور است و در نتیجه می‌توان آن را به دو شیوه رنگ‌آمیزی کرد. پس

در این حالت طبق اصل ضرب تعداد شیوه‌های رنگ‌آمیزی برابر $36 = 18 \times 2$ است.

پس طبق اصل جمع تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی شکل برابر $84 = 48 + 36$ است.

۱۰- پاسخ ۲۳۰۴۰ است.



اولین چراغ در وسط آزادراه احداث می‌شود. چراغ‌های دوم و سوم به ترتیب در $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ مسیر زاهدان به مشهد احداث می‌شوند. به

همین شکل چراغ‌های چهارم تا هفتم بیت آن‌ها و در حالت کلی برای عدد طبیعی n چراغ‌های 2^n ام تا 2^{n+1} ام در میانه راه‌های بیم

چراغ‌های فعلی قرار خواهند گرفت. می‌دانیم که 1001 بین $2^9 = 512$ و $2^{10} = 1024$ است و فاصله بین چراغ‌های متوالی تا قبل از

نصب چراغ ۵۱۲ برابر $1024 = \frac{2^{10}}{2^9}$ متر است. در نتیجه فاصله مشهد تا چراغ ۱۰۰۱ ام برابر مقدار ذیل است:

$$(1023 - 1001) \times 1024 + 512 = 23040$$

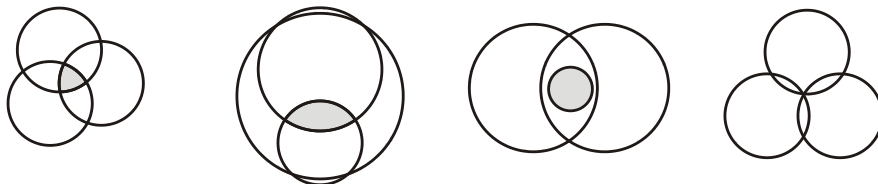
۱۱- گزینه‌ی ۵ پاسخ صحیح است.



به مرکز هر درخت، دایره‌ای به شعاع طول طنابی که به آن وصل است رسم می‌کنیم. ناحیه‌ای که گوسفند علف‌های آن را می‌خورد

دقیقاً اشتراک ناحیه درونی این سه دایره است. بنابراین باید تعیین کنیم که اشتراک ناحیه‌ی داخل سه دایره، کدام شکل نمی‌تواند باشد.

گزینه‌های ۱ تا ۴ می‌توانند باشند، مانند شکل‌های مقابل:

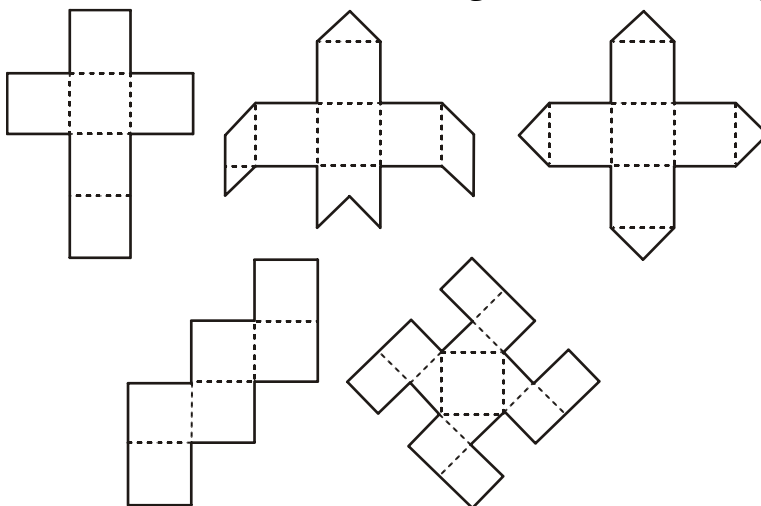


اما گزینه‌ی ۵ نمی‌تواند ناحیه اشتراک سه دایره باشد. زیرا مرز آن از ۴ کمان تشکیل شده در حالی که ما تنها سه دایره داریم پس باید دو

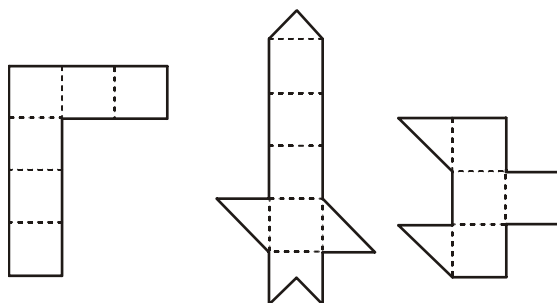
تا از کمان‌ها متعلق به یک دایره باشند اما با توجه به شکل، هیچ دوتایی متعلق به یک دایره نیستند. پس گزینه‌ی ۵ صحیح است.

۱۲- پاسخ ۵ است.

با اندکی تجسم فضایی می توان دید که شکل های زیر می توانند باز شده ی یک مکعب باشند.



اما با شکل های زیر نمی توان یک مکعب ساخت. شکل سمت چپ هفت مربع و شکل سمت راست پنج مربع دارد. در شکل وسط نیز مسیری موازی اضلاع به طول پنج وجود دارد.



۱۳- پاسخ ۶ است.

می دانیم $۱۳۹۲ = ۲۹ \times ۱۶ \times ۳$ حالت های مختلف برای عددی با ۱۳۹۲ مقسوم علیه مثبت فقط چهار حالت زیر است که در آن ها

همه p_i ها اعدادی اول هستند.

حالت اول: $p_1^{۲۸} \times p_۲^{۱۵} \times p_۳^۲$

حالت دوم: $p_1^{۲۸} \times p_۲^۷ \times p_۳^۲ \times p_۴^۱$

حالت سوم: $p_1^{۲۸} \times p_۲^۳ \times p_۳^۳ \times p_۴^۱$

حالت چهارم: $p_1^{۲۸} \times p_۲^۲ \times p_۳^۱ \times p_۴^۱ \times p_۵^۱ \times p_۶^۱$

در هر کدام از حالت های بالا برای کوچک تر شدن عدد باید از عددهای اول کوچک به ترتیب استفاده کنیم پس کافی است عددهای زیر را با هم مقایسه کنیم و کوچک ترین آن ها را بیابیم.

$$a_۱ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۱۵} \times ۵^۲ \quad ; \quad a_۲ = ۲^{۲۸} \times ۳^۷ \times ۵^۲ \times ۷^۱$$

$$a_۳ = ۲^{۲۸} \times ۳^۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲ \quad ; \quad a_۴ = ۲^{۲۸} \times ۳^۲ \times ۵^۱ \times ۷^۱ \times ۱۱^۱ \times ۱۳^۱$$

حال با انجام محاسبات جواب را پیدا می کنیم.

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{۳^۸}{۷} \Rightarrow a_۱ > a_۲$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{11 \times 13}{3 \times 5^2 \times 7} \Rightarrow a_3 > a_4$$

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{3^5 \times 5}{11 \times 13} \Rightarrow a_2 > a_4$$

پس جواب سوال a_4 است که دارای ۶ عامل اول است.

۱۴- پاسخ ۲۴ است.

فرض کنید پیش از عباس n نفر در نظرسنجی شرکت کرده باشند. از آنجایی که یکی از گزینه‌ها دقیقاً ۲۵ درصد از آرا را به دست آورده است، پس n باید بر ۴ بخش پذیر باشد. فرض کنید $n = 4k$. پس از رأی عباس گزینه‌ی آخر («بهتر از این نمی‌شد.») افزایش یافته است پس عباس به این گزینه رأی داده است. با توجه به صورت سوال پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، k نفر به گزینه‌ی آخر رأی دادند. پس بعد از رأی عباس $k+1$ نفر و در نتیجه $\frac{k+1}{4k+1} \times 100$ درصد از افراد این گزینه را انتخاب کرده‌اند. با توجه به صورت

$$\frac{k+1}{4k+1} \times 100 = 28 \Rightarrow 100k + 100 = 112k + 28 \Rightarrow 71 = 12k \Rightarrow k = 6$$

سوال این مقدار برابر ۲۸ بوده و در نتیجه داریم: $k = 6$

پس $n = 4k = 24$ پاسخ سوال است.

۱۵- پاسخ ۱ است.

به دلیل تقارن مسئله نسبت به p و q می‌توان فرض کرد $q \leq p$. حال داریم:

$$p(p-q) = (37-q)(37+q)$$

با توجه به این که سمت چپ نامنفی است، باید سمت راست هم نامنفی باشد و در نتیجه $q \leq 37$. توجه کنید که چون $(37-q)(37+q)$ بر p بخش پذیر است، $p \mid 37-q$ و $p \mid 37+q$. اگر $p \mid 37-q$ ، نتیجه می‌شود که $p < 37$ و در نتیجه $p(p-q) < 37(37-q) < (37+q)(37-q)$. پس این حالت ممکن نیست و تنها حالت $p \mid 37+q$ باقی می‌ماند. دقت کنید که اگر $p \mid 37+q$ باشد، زوجیت p و q متفاوت است، و چون $p > q$ است، $q = 2$ و $p = 39$ است. اما اول نیست. در نتیجه داریم

$$p \leq \frac{37+q}{2} \leq 37$$

چون نابرابری به تساوی تبدیل شده است، باید $p = 37$ و $q = p$ باشد. ضمناً اگر $p = q = 37$ باشد، این معادله برقرار است. بنابراین با توجه به اول بودن ۳۷، (۳۷، ۳۷) تنها جواب این معادله در اعداد اول است.

۱۶- پاسخ ۲۷۸۱ است.

عدد مورد نظر در صورت مسأله را A بنامید. ابتدا نشان می‌دهیم که با ۲۷۸۱ بار استفاده از دکمه‌ها می‌توان عدد A را نمایش داد:

۱۳۹۲ بار دکمه‌ی ۵ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{2013}{3}$ بار دکمه ۸ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{1434}{2}$ بار دکمه ۹ را فشار می‌دهیم و در نهایت یک بار دکمه ۶ را فشار می‌دهیم. عددی که به دست می‌آید برابر است با:

$$5^{1392} \times 8^{\frac{2013}{3}} \times 9^{\frac{1434}{2}} \times 6$$

که برابر با A است. به این ترتیب در مجموع $2781 = 1 + \frac{1434}{2} + \frac{2013}{3} + 1392$ بار از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرده‌ایم.

اکنون نشان می‌دهیم با کمتر از این تعداد نمی‌توان این کار را انجام داد. یک روش استفاده از دکمه‌ها را بهینه می‌نامیم اگر با کمترین تعداد استفاده از دکمه‌ها به عدد A برسیم. توجه کنید که ما ناگزیر هستیم که ۱۳۹۲ بار از دکمه ۵ استفاده کنیم. زیرا در بین ارقام ۱ تا ۹، تنها عددی که عامل ۵ دارد، رقم ۵ است و ما باید ۱۳۹۲ عامل ۵ را ایجاد کنیم پس باید ۱۳۹۲ بار از رقم ۵ استفاده کنیم.

ادعا می‌کنیم روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از رقم ۶ استفاده شده است، زیرا به جای هر دو بار استفاده از رقم ۶ می‌توانیم یک بار ۴ و یک بار ۹ را استفاده کنیم. به این ترتیب می‌توانیم ۶ها را دو تا دو تا با ۴ و ۹ جایگزین کنیم تا در نهایت حداکثر یک ۶ باقی بماند. از طرف دیگر روشن است که در روش بهینه، ما حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم چون اگر بیش از یک بار از ۳ استفاده کرده باشیم، می‌توانیم به جای دو تا ۳، یک بار از ۹ استفاده کنیم و به این ترتیب تعداد دکمه‌های استفاده شده را کاهش دهیم که این با بهینه بودن روش مورد نظر تناقض دارد. بنابراین حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم. مشابهاً می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک بار از ۲ استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از ۲ می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک بار از ۲ استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از ۲ می‌توان یک بار از ۴ استفاده کرد. همچنین روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از ۴ استفاده شده است. زیرا به جای هر دو بار استفاده از ۴ می‌توان یک بار از ۲ و یک بار از ۸ استفاده کرد. همچنین روشن است که امکان ندارد هم از ۲ و هم از ۴ استفاده کرده باشیم زیرا به جای آن‌ها می‌توان یک بار از ۸ استفاده کرد.

حال دقت کنید که عوامل ۲ از یکی از اعداد ۸ یا ۶ یا ۴ یا ۲ می‌آیند. اگر تعداد استفاده از این ارقام به ترتیب a_8, a_6, a_4, a_2 باشند، داریم:

$$2014 = 3a_8 + 2a_6 + a_2$$

زیرا در نهایت باید ۲۰۱۴ عامل ۲ به دست بیاوریم.

با توجه به اینکه باقی‌مانده ۲۰۱۴ بر ۳، ۱ است و $3a_8$ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس باید باقی‌مانده $a_6 + a_2$ نیز بر ۳ برابر با ۱ باشد، اما با توجه به توضیحات بالا، a_6, a_4, a_2 هر کدام صفر یا یک هستند و a_2 هر دو نمی‌توانند یک باشند، با بررسی همه حالت‌ها، به راحتی می‌توان دید که تنها حالات ممکن عبارتند از:

$$a_2 = 1, a_6 = a_4 = 0$$

$$a_6 = 1, a_2 = a_4 = 0$$

اگر حالت اول رخ دهد، از رقم ۶ استفاده نکرده‌ایم و از طرف دیگر چون از رقم ۲ استفاده کرده‌ایم با توجه به توضیحات قبل از رقم ۳ استفاده نکرده‌ایم بنابراین تنها رقمی که عامل ۳ دارد رقم ۹ است ولی این غیر ممکن است زیرا هر ۹، دو عامل ۳ دارد و حال آنکه در مجموعه به ۱۴۳۵ عامل ۳ نیاز داریم که عددی فرد است.

پس حالت اول غیرممکن است و حالت دوم رخ می‌دهد. پس یک بار از ۶ استفاده کرده‌ایم و یک عامل ۲ به دست آورده‌ایم و سایر عوامل ۲

را باید از ۸ به دست بیاوریم. پس باید $\frac{2013}{3}$ بار از ۸ استفاده کنیم.

حال چون یک بار از ۶ استفاده کرده‌ایم پس یک عامل ۳ به دست آورده‌ایم و ۱۴۳۴ عامل ۳ باقی می‌ماند که چون ۱۴۳۴ بر ۲ بخش‌پذیر

است می‌توانیم همه آن‌ها را با استفاده از ۹ به دست آوریم. پس $\frac{1434}{2}$ بار از ۹ استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب در روش بهینه، به همان تعداد ۲۷۸۱ تا استفاده از دکمه‌ها نیاز داریم.

۱۷- پاسخ ۳۱ است.

فرض کنید که این سرباز در ردیف آخر نفر سمت چپ باشد و سربازهای هر ردیف را به ترتیب از چپ به راست با شماره‌های ۰، ۱، ...

و ۹۱ مشخص کنیم. به وضوح سرباز آخر، سرباز شماره ۰ از ردیف اول را نمی‌بیند. اما برای هر $i \in \{1, 2, \dots, 91\}$ سرباز شماره i دیده

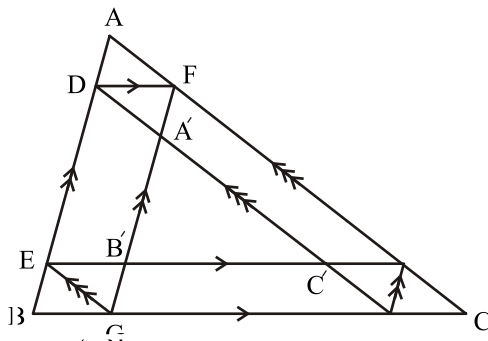
می‌شود، هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه i و ۱۲ برابر ۱ باشد. زیرا اگر i و ۱۲ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از ۱ مثلاً j داشته باشند، سرباز شماره $\frac{i}{j}$ که در $\frac{۱۲}{j}$ ردیف جلوتر از ردیف آخر ایستاده است، بین آن‌ها قرار دارد و بنابراین سرباز شماره i از ردیف اول دیده نمی‌شود.

بنابراین باید، تعداد اعدادی در $\{۱, ۲, \dots, ۹۱\}$ را بشماریم که نسبت به ۱۲ اول هستند، یعنی معادلاً بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند. باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند. باقی‌مانده‌ی تقسیم چنین اعدادی بر ۶ برابر ۱ یا ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۶ عدد $\{۱ و ۷ و \dots و ۹۱\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۱ است. باقی‌مانده تقسیم ۱۵ عدد $\{۵ و ۱۱ و \dots و ۸۹\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۵ است.

پس در کل $۱۵ + ۱۶ = ۳۱$ عدد در این مجموعه وجود دارند که نسبت به ۱۲ اول هستند و بنابراین ۳۱ سرباز از ردیف اول دیده می‌شوند.

۱۸- پاسخ ۶ است.

نقطه‌های E, F و G را مطابق شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



در این صورت چهارضلعی‌های $BDFG, EDA'G, EAFG, DAFA'$ و $EDFB'$ و $BEB'G$ همگی متوازی‌الاضلاع هستند و در نتیجه $FB' = DE$ و $FB' = DE = A'G$ پس $FA' = B'G$ و این مقدار برابر طول AD و همین‌طور طول BE است.

$$AB = AD + DE + EB =$$

$$DE + 2AD = FB' + 2AD = A'B' + 3AD$$

با توجه به این که اضلاع $A'B'C'$ و ABC موازی هستند. این دو مثلث متشابه هستند و چون محیط ABC دو برابر $A'B'C'$ است داریم $AB = 2A'B'$ و با توجه به بالا $A'B' = 3AD$ پس در نهایت: $AB = 6AD$ پس طول AB شش برابر AD است.

۱۹- پاسخ ۳ است.

توجه کنید که معادله‌ی صورت سوال را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(a^2 - a + \frac{1}{4}) + (x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

و در نتیجه:

$$(a - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

حال توجه کنید که $(x - \frac{1}{2})^2, (y - \frac{1}{2})^2$ عباراتی نامنفی هستند پس همواره $(a - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$ پس a همواره در بازه $[-1, 2]$ قرار دارد.

همچنین به سادگی دیده می‌شود که به ازای هر a در بازه $[-1, 2]$ با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ و با توجه به پوشا بودن $(y - \frac{1}{2})^2$ روی بازه $[0, \infty)$ معادله می‌تواند برقرار باشد. پس طول بازه مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰- پاسخ ۲۸ است.

چون تصویر این چهارضلعی روی هر یک از صفحه‌ها خود یک چهارضلعی مسطح است، رأس‌های آن باید به رأس‌های چهارضلعی تصویر برود. به این ترتیب رأسی که تصویرش در صفحه xy تنها می‌تواند به $(1, 3)$ برود و در نتیجه مختصات آن در فضا برابر $(1, 9, 3)$ است. به همین شکل سه رأس دیگر چهارضلعی نقاط $(1, 9, 3)$ و $(0, 0, 2)$ و $(0, 2, 0)$ است. بنابراین مجموع مربع‌های قطرهای این چهارضلعی برابر $2(1^2 + 2^2 + 3^2) = 28$ است.

۲۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

با کم کردن رابطه دوم از اول داریم:

$$z(x-t) + y(x-t) = (t-x)(t+x) \Rightarrow (x-t)(x+y+z+t) = 0$$

و مشابه آن با کم کردن رابطه سوم از دوم، چهارم از سوم و اول از چهارم:

$$(y-x)(x+y+z+t) = 0, (z-y)(x+y+z+t) = 0, (t-x)(x+y+z+t) = 0$$

بنابراین اگر $x+y+z+t \neq 0$ ، چهار عدد با هم برابر می‌شوند که با جایگذاری در معادله هر چهار متغیر برابر صفر می‌شوند.

اما اگر $x+y+z+t = 0$ آنگاه $t = -x-y-z$ و در نتیجه با جایگذاری در معادله اول:

$$xy + yz + zx = (-x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 0 \Rightarrow x = -y, y = -z, z = -x \Rightarrow x = y = z = 0$$

و در نتیجه t هم صفر می‌شود. پس در این حالت به همان جواب $(0, 0, 0)$ می‌رسیم. بنابراین این چهارتایی تنها جواب معادله است.

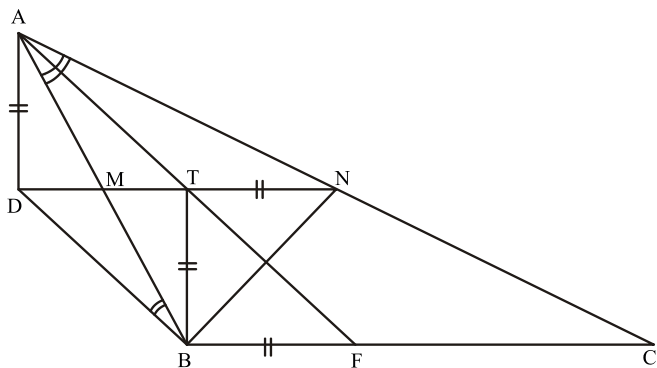
۲۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

جدول زیر نشان می‌دهد که این دزد از هر کدام از شهرها چند بار خارج شده است و چند بار به هر کدام از شهرها وارد شده است.

| نام شهر | شکرستان | ن. شمالی | ن. جنوبی | ن. غربی | ن. شرقی |
|------------|---------|----------|----------|---------|---------|
| تعداد خروج | ۵ | ۵ | ۴ | ۴ | ۳ |
| تعداد ورود | ۶ | ۴ | ۴ | ۴ | ۳ |

بنابراین او از شکرستان ۵ بار خارج شده است و ۶ بار به این شهر برگشته است، بنابراین اکنون در این شهر است و پاسخ گزینه‌ی (۱) است. توضیح هم چنین با استدلال مشابه می‌توان فهمید که او سفر را از نمکستان شمالی آغاز کرده است، چون ۵ بار را از این شهر خارج شده و تنها ۴ بار به آن بازگشته است.

۲۳- پاسخ ۰ است.

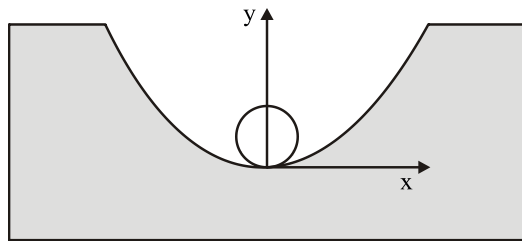


مطابق شکل زیر فرض کنید M وسط AB و N وسط AC باشد خط BN را رسم کنید چون مثلث ABN متساوی‌الساقین است پس نیم‌ساز آن ارتفاع نیز هست فرض کنید H پای ارتفاع وارد از A بر BN و T تقاطع MN با AH باشد. چهارضلعی $ADBT$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا دو مثلث AMT و BMD با هم برابر هستند در نتیجه

$AD=BT$ از طرفی چون مثلث ABH با مثلث ANH هم‌نهشت است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $BT=TN$ پس کافی است مقدار TN را حساب کنیم. فرض کنید F محل برخورد نیم‌ساز با ضلع BC باشد، در مثلث AFC چون TN میان خط (خطی موازی یک ضلع که از وسط دو ضلع دیگر عبور می‌کند) است پس $TN = \frac{1}{2} FC$ و همچنین می‌دانیم نیم‌ساز، ضلع را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند در نتیجه

$$AD = BT = TN = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} \frac{AC \times BC}{AC + AB} = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.881\dots$$

۲۴- پاسخ ۲۵ است.



ابتدا فرض می‌کنیم لوله و کانال در مبدأ با یکدیگر تماس دارند و مختصات را مانند شکل معین می‌کنیم قطر لوله در صورتی مناسب است که اگر پایین لوله (دایره) را در کف کانال (سهمی) قرار دهیم، دایره و سهمی برخورد دیگری نداشته باشند.

معادله سهمی معرفی شده در صورت سوال برابر است با: $y = 4x^2$

همچنین معادله دایره معرفی شده به قطر D و مماس بر سهمی در مبدأ برابر است با:

$$\left(y - \frac{D}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow y^2 - yD + \frac{D^2}{4} + x^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow y^2 - yD + x^2 = 0$$

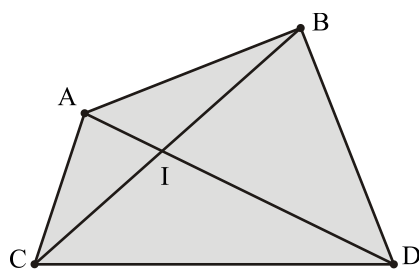
با استفاده از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $y^2 - yD + \frac{y}{4} = 0$ و معادله فوق برقرار است اگر $y = 0$ (که همان نقطه تماس است و نقطه‌ی جدیدی به حساب نمی‌آید) یا $y = D - \frac{1}{4}$. چنانچه $D \leq \frac{1}{4}$ ، y عددی نامثبت خواهد بود که نشان‌دهنده عدم برخورد

جدید است اما اگر $D > \frac{1}{4}$ در نقطه‌ی $\left(D - \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{D}{4} - \frac{1}{16}}\right)$ برخورد خواهند داشت و این نشان می‌دهد که در این صورت قطر لوله مناسب نبوده است. پس حداکثر قطر لوله برابر ۲۵ متر یا همان ۲۵ سانتی‌متر است.

۲۵- پاسخ ۵ است.

لم: در هر چهارضلعی محدب مجموع طول قطرهای آن مجموع طول دو ضلع روبرو بیشتر است. با نوشتن نامساوی مثلث برای مثلث‌های

$$ACI \text{ و } BDI \text{ مشاهده می‌کنیم که: } AD+BC > AB+CD$$



ادعا می‌کنیم اگر مجموع فواصل ۹ زوج نقطه بیشترین مقدار شود، باید هر دو مسیری بین نقاط ابتدایی و انتهایی همدیگر را قطع کنند. زیرا اگر میل نقطه A به B و میل نقطه C به D برود و AB و CD برخورد نداشته باشند، طبق لم بالا، با بردن میل نقطه A به D و میل نقطه C به B مسیر بیشتری طی می‌شود. حال به میل نقطه B در صورت سوال نگاه کنید. این میل تنها به نقطه Y می‌تواند منتقل شود تا با تمام مسیرها برخورد داشته باشد. (اگر به این نقطه نرود با مسیری که به نقطه Y می‌رسد برخورد ندارد.) پس نقطه B به نقطه Y

می‌رود. به همین شکل شمال غربی‌ترین میل نیز باید به نقطه 3 برود. به همین طریق می‌توان بررسی کرد که میل‌های نقاط J ، I ، H ، G ، F ، E ، D ، C ، B ، A به ترتیب به نقاط 4 ، 2 ، 6 و 8 بروند تا با تمام خطوط دیگر برخورد کند.

اما میل‌های روی قطر مربع باقی می‌مانند. این میل‌ها به هر ترتیبی به نقاط 1 ، 5 ، 9 منتقل شوند مجموع جابه‌جایی ثابت می‌ماند. بنابراین برای جاگذاری میل نقطه الف سه حالت وجود دارد و به طور یکتا مشخص نمی‌شود.