



دفترچه سؤالات مرحله اول

سومین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۵	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسئله‌های مرحله‌ی اول سومین دوره‌ی مسابقات ریاضی
دانش‌آموزان کشور، ۱۳۶۴

۱- توابع زیر مفروض‌اند:

$$f(x) = \frac{1}{\|x\| - 1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{\|x\| - 1}$$

اولاً قلمرو هر یک از توابع فوق را به دست آورید. ثانیاً ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$$

۲- تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}|x|\right)$$

اولاً دوره‌ی تناوب آن را تعیین کنید و نمودار آن را در یک دوره‌ی تناوب رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که حدهای یک‌طرفه‌ی (چپ و راست) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm}$ هر دو موجودند، ولی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نیست (با روش ε و δ [با استفاده از تعریف حد]).

۳- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان تعریف شده است که به ازای هر x و y از \mathbb{R} رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

اگر $f(0) \neq 0$ و $f'(0)$ موجود و منتهای [مخالف بی‌نهایت] باشد، ثابت کنید f در هر نقطه دارای مشتق است.

۴- تعیین کنید بسط $(a+b+c)^{99}$ در حالت کلی چند جمله می‌تواند داشته باشد.

۵- اگر داشته باشیم

$$S_n = \frac{5}{9} \times \frac{14}{20} \times \frac{27}{35} \times \dots \times \frac{2n^2 - n - 1}{2n^2 + n - 1}$$

مطلوب است تعیین حد S_n ، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۶- دو خط D و D' به معادله‌های

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$$

مفروض‌اند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

۷- دونقطه‌ی ثابت B ، و C در صفحه‌ی P مفروض‌اند مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحه‌ی P را به دست آورید به طوری که داشته باشیم $MB^x + kMC^x = a^x$ ($k > 0$ و a دو عدد معلوم‌اند و $k > 0$).

۸- عمل دوتایی \oplus در مجموعه‌ی اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \oplus y = x + y - xy$$

که در آن اعمال سمت راست، جمع، تفریق و ضرب معمولی‌اند. اولاً ثابت کنید \oplus در \mathbb{R} شرکت‌پذیر است؛ ثانیاً عضو بی‌اثر در این عمل را تعیین کنید.