جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۹

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
۱۵	۱۰	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

دانش‌آموزان عزیز، در این بخش شماباید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن راجداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شماباید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید، حتی نوشتن رقم ۶ به شکل ٦ هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱- بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳ و ... m حداکثر سه مقسوم‌علیه اول داشته باشند چند است؟

۲- دوازده کشتی‌گیر در جام جهان پهلوان تختی شرکت کرده‌اند. ممکن است دو کشتی‌گیر چند بار با هم مبارزه کنند. کسی که پنج بار ببازد از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در این جام حداکثر چند کشتی برگزار می‌شود؟ (توجه کنید که کشتی تساوی ندارد.)

۳- نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۱۱ نفره اعدادی صحیح از صفر تا ۲۰ است. فرض کنید میانگین نمرات ۱۸ و میانه نمرات ۱۹ است. کمترین نمره کلاس حداقل چند می‌تواند باشد؟ (میانه ۱۱ نمره، نمره‌ای است که پس از مرتب کردن نمرات به ترتیب نزولی، در رتبه‌ی ششم قرار می‌گیرد.)

۴- قیمت سهام شرکت «نوسان‌سازان شدید» دچار نوسانات شدیدی شده است! در ابتدای ورود شرکت به بازار بورس، هر سهم آن هزار ریال قیمت‌گذاری شد. پس از یک روز، قیمت هر سهم یک ریال کاهش پیدا کرد. سپس به مدت دو روز، هر روز یک ریال افزایش یافت. سپس به مدت سه روز، هر روز یک ریال کاهش یافت و الی آخر. بعد از گذشت ۳۶۵ روز از ورود شرکت به بازار بورس قیمت هر سهم چند ریال است؟

۵- به ازای چند عدد صحیح a، معادله $x^۲ + ax + ۱۳۸۹ = ۰$ ریشه صحیح دارد؟

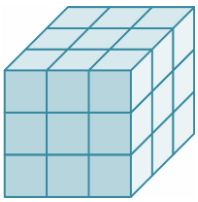
۶- فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد که برای m از ۲ تا ۶، $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی است. n چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۷- طول محفظه کامیونی ۴ متر و عرض و ارتفاع آن ۲ متر است. مقداری آب در محفظه کامیون جمع شده که در حالت افقی بودن محفظه، ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است. راننده می‌خواهد برای جلوگیری از زنگ زدن محفظه، آن را بالا بیاورد طوری که سطح تماس آب با بدنه کمترین مقدار ممکن شود. سقف و در محفظه بسته است. او باید محفظه را چند درجه بالا بیاورد؟ (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)

۸- کوچک‌ترین عدد n که $۱۷^۲$ مقسوم‌علیه $\frac{(n+۱)(n+۲)\ldots(۲n)}{۱\times۲\times\ldots\times n}$ باشد، چند است؟

۹- سه رادار بر روی زمین طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌های آن‌ها از هم ۶، ۸ و ۱۰ کیلومتر است. در یک لحظه، هر سه فاصله هواپیمایی تا خود را ۱۳ کیلومتر گزارش می‌کنند. ارتفاع هواپیما تا سطح زمین چند کیلومتر است؟ زمین را مسطح فرض کنید (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)

۱۰- مکعبی به ضلع سه در نظر بگیرید. که به مکعب‌های به ضلع یک تقسیم شده است. چند خط وجود دارد که با وجه پایینی مکعب بزرگ زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و دست‌کم از مرکز دو تا از مکعب‌های کوچک می‌گذرد؟



دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج گزینه‌ای پاسخ دهید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $BAD = ۶۰^\circ$. این متوازی‌الاضلاع را حول رأس A به اندازه ۶۰ درجه دوران می‌دهیم. دوران یافته نقاط B، C و D را به ترتیب B'، C' و D' می‌نامیم. نسبت $\frac{CC'}{AC}$ چقدر است؟

الف) $\frac{۴}{۵}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$ د) $\frac{۶}{۵}$ هـ) ۱

۲- به ازای چند عدد طبیعی k، عدد $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$ نیز طبیعی است؟

الف) ۲۴ ب) ۲۵ ج) ۳۷ د) ۴۹ هـ) ۵۰

۳- آقای فراموش‌کار، ۹۲ ساله، ساعت ۷ صبح از منزل خود که در چهارراه مرکزی شهر است خارج شده و تا کنون که ساعت ۱۰ شب است به منزل برنگشته است. خیابان‌های شهر، افقی و عمودی هستند و فاصله هر دو چهارراه مجاور یک کیلومتر است. می‌دانیم که نام برده در هر ساعت از چهارراهی به چهارراه مجاورش می‌رود. اکنون او در چند چهارراه ممکن است باشد؟

الف) ۲۴۰ ب) ۲۵۶ ج) ۴۸۰ د) ۴۸۱ هـ) ۹۶۹

۴- یک جعبه شکلات یازده ردیف یازده‌تایی دارد. شکلات‌های موجود را هر طور قرار دهیم در بیشتر ردیف‌های افقی، بیشتر خانه‌ها خالی است. تعداد شکلات‌ها حداکثر چندتاست؟

الف) ۳۵ ب) ۳۶ ج) ۶۶ د) ۸۵ هـ) ۸۶

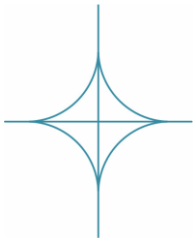
۵- در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ نقاط P، D و E را، به ترتیب، روی اضلاع BC، AB و AC طوری انتخاب می‌کنیم که $PE \perp AC$، $PD \perp AB$ و $DE \parallel BC$. نسبت $\frac{PB}{PC}$ چند است؟

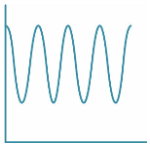
الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ هـ) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

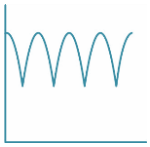
۶- q کوچک‌ترین عدد گویای مثبت است که بسط اعشاری $q^۳$ به شکل $۰ / abcabcabc...$ است. که a، b و c ارقامی از بین ۰، ۱، ۲ و ... ۹ هستند. $a+b+c$ چند است؟

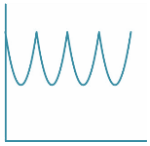
الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۷ د) ۱۸ هـ) ۲۷

۷- متحرکی از نقطه $(۱,۰)$ شروع کرده و با سرعت ثابت در جهت مثلثاتی، روی شکل روبه‌رو حرکت می‌کند.نمودار مجموع مؤلفه‌های x و y آن بر حسب زمان، شبیه کدام گزینه است؟

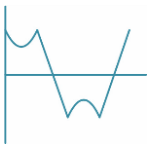


الف) 

ب) 

ج) 

د)

هـ) 

۸- بزرگ‌ترین عدد حقیقی M را طوری بیابید که برای هر $a,b \in [۰,۱]$ داشته باشیم $a^۲ + b^{۱۳۸۹} \geq Mab$.

الف) ۰ ب) $۲^{-۱۳۸۶}$ ج) ۱ د) $\frac{۱۳۹۱}{۱۳۸۹}$ هـ) ۲

۹- دانش‌آموزی می‌خواهد کتاب‌های ریاضی، فیزیک، ادبیات و عربی سال اول و دوم دبیرستان را در هشت هفته، در هر هفته یک کتاب، مرور کند. او باید کتاب سال دوم هر موضوع را زمانی مطالعه کند که کتاب سال اول آن موضوع را قبلاً خوانده باشد. این کار به چند روش ممکن است؟

الف) ۷۰ ب) ۵۷۶ ج) ۲۵۲۰ د) ۲۰۱۶۰ هـ) ۴۰۳۲۰

۱۰- برای چند زوج مرتب (a,b) از اعداد طبیعی که $۱ \leq a,b \leq ۱۰$، معادله $x^۲ = ax - b$ ریشه‌ای در $[۰,۱]$ دارد؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۲۰ د) ۴۵ هـ) ۶۲

۱۱- عدد $۲^{۱۰}۳^{۱۱}۵^{۱۲}$ روی تخته نوشته شده است. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد (غیر از خودش) را در نظر گرفته و آن را از عدد روی تخته کم می‌کنیم و حاصل را به جای عدد روی تخته می‌نویسیم. همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم. پس از چند بار به عدد ۱ می‌رسیم؟ (مثلاً اگر در ابتدا عدد ۷ روی تخته می‌بود، پس از ۴ مرحله به عدد ۱ می‌رسیدیم: ۶، ۳، ۲، ۱.)

الف) ۳۳ ب) ۴۵ ج) ۵۶ د) ۶۸ هـ) ۸۰

۱۲- سه ساعت داریم که اولی سالم است، دومی هر ساعت، ۷ دقیقه و سومی هر ساعت ۱۱ دقیقه جلو می‌افتد. اگر ساعت‌ها در ظهر امروز به درستی تنظیم شوند بعد از گذشت چند ساعت، هر دو ساعت خراب، ۶ ساعت جلوتر از ساعت سالم را نشان می‌دهند؟

الف) ۱۸ ب) ۷۷ ج) ۱۸۰ د) ۳۶۰ هـ) ۷۲۰

۱۳- فرض کنید $f(\overline{abc}) = av + bc + ca$ که $\overline{abc}$ نمایش در مبنای ۱۰ است. دقت کنید ممکن است برخی از a، b و c صفر باشند. مثلاً $f(۲۳) = ۰ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۰ = ۶$. مجموع $f(۰) + f(۱) + \ldots + f(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۲۴۳ ب) ۶۹۳۰ ج) ۶۰۷۵۰ د) ۱۲۱۵۰۰ هـ) ۴۹۹۵۰۰

۱۴- کاغذی مربعی به ضلع $۲۰cm$ از یکی از اضلاع به وسط یک میز بزرگ چسبیده و می‌تواند حول آن ضلع دوران بکند. دو طرف این کاغذ کاملاً جوهری شده است و به هر جایی که مالیده شود آن را جوهری می‌کند. می‌خواهیم تنها با تا کردن وخم کردن کاغذ و مالیدن و تکان دادن آن بیشترین سطح ممکن از میز را رنگی کنیم. حداکثر چند سانتی‌متر مربع از میز را می‌توان رنگی کرد؟

الف) $۲۰۰\pi + ۴۰۰$ ب) $۳۰۰\pi + ۲۰۰$ ج) ۴۰۰π د) ۶۰۰π هـ) $۶۰۰\pi - ۴۰۰$

۱۵- فرض کنید H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. از H خطی به موازات ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه D قطع کند. نقطه E را روی دایره محیطی مثلث بین A و C طوری انتخاب می‌کنیم که $HDB = EDC$. اگر $DH = ۱$، $HB = ۳$ و $BA = ۸۹$، AE چقدر است؟

الف) ۳۰ ب) $\frac{۸۹}{۳}$ ج) $\frac{۸۶}{۳}$ د) $\frac{۸۵}{۳}$ هـ) $\frac{۴۵}{۲}$

کلید سوالات

۱ الف ب ج د هـ	۲۱ الف ب ج د هـ	۴۱ الف ب ج د هـ
۲ الف ب ج د هـ	۲۲ الف ب ج د هـ	۴۲ الف ب ج د هـ
۳ الف ب ج د هـ	۲۳ الف ب ج د هـ	۴۳ الف ب ج د هـ
۴ الف ب ج د هـ	۲۴ الف ب ج د هـ	۴۴ الف ب ج د هـ
۵ الف ب ج د هـ	۲۵ الف ب ج د هـ	۴۵ الف ب ج د هـ
۶ الف ب ج د هـ	۲۶ الف ب ج د هـ	۴۶ الف ب ج د هـ
۷ الف ب ج د هـ	۲۷ الف ب ج د هـ	۴۷ الف ب ج د هـ
۸ الف ب ج د هـ	۲۸ الف ب ج د هـ	۴۸ الف ب ج د هـ
۹ الف ب ج د هـ	۲۹ الف ب ج د هـ	۴۹ الف ب ج د هـ
۱۰ الف ب ج د هـ	۳۰ الف ب ج د هـ	۵۰ الف ب ج د هـ
۱۱ الف ب ج د هـ	۳۱ الف ب ج د هـ	۵۱ الف ب ج د هـ
۱۲ الف ب ج د هـ	۳۲ الف ب ج د هـ	۵۲ الف ب ج د هـ
۱۳ الف ب ج د هـ	۳۳ الف ب ج د هـ	۵۳ الف ب ج د هـ
۱۴ الف ب ج د هـ	۳۴ الف ب ج د هـ	۵۴ الف ب ج د هـ
۱۵ الف ب ج د هـ	۳۵ الف ب ج د هـ	۵۵ الف ب ج د هـ
۱۶ الف ب ج د هـ	۳۶ الف ب ج د هـ	۵۶ الف ب ج د هـ
۱۷ الف ب ج د هـ	۳۷ الف ب ج د هـ	۵۷ الف ب ج د هـ
۱۸ الف ب ج د هـ	۳۸ الف ب ج د هـ	۵۸ الف ب ج د هـ
۱۹ الف ب ج د هـ	۳۹ الف ب ج د هـ	۵۹ الف ب ج د هـ
۲۰ الف ب ج د هـ	۴۰ الف ب ج د هـ	۶۰ الف ب ج د هـ

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۹

۱- کوچک‌ترین عدد طبیعی که چهار مقسوم‌علیه اول دارد برابر است با $۲۱۰ = ۷ \times ۵ \times ۳ \times ۲$. بنابراین $۱۱ \times n$ باید کوچک‌تر از ۲۱۰ باشد که نتیجه می‌دهد n کمتر از ۲۰ باشد. پس پاسخ ۱۹ است.

۲- در هر کشتی یک نفر می‌بازد؛ پس تعداد باخت‌ها برابر تعداد مبارزه‌ها است. ابتدا نشان می‌دهیم که تعداد کشتی‌های برگزار شده (یا همان تعداد باخت‌ها) نمی‌تواند از $۵ \times ۱۲ - ۱ = ۵۹$ بیش‌تر باشد:

اگر بیش از ۵۹ کشتی برگزار شده باشد؛ بیش از ۵۹ باخت صورت گرفته (حداقل ۶۰ تا). هم‌چنین هیچ کشتی‌گیری نمی‌تواند بیش از ۵ باخت کسب کند(با باخت پنجم حذف شده و دیگر بازی نخواهد کرد) بنابراین همه کشتی‌گیرها حداقل ۵ باخت خواهند داشت $(۶۰ > ۴ + ۵ \times ۱۱)$ که نتیجه می‌دهد همه آن‌ها از دور رقابت‌ها حذف شده‌اند ولی این نتیجه غیرممکن است چون در بازی آخر ۲ نفر که حذف نشده‌اند با هم مسابقه می‌دهند و حداکثر یکی از آن‌ها حذف می‌شود (چون یکی می‌برد و به باخت‌هایش اضافه نمی‌شود). با توجه به اینکه به تناقض رسیدیم (اینکه همه کشتی‌گیرها حذف می‌شوند) تعداد بازی‌ها نمی‌تواند از ۵۹ بیش‌تر باشد.

حال با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم ممکن است ۵۹ بازی برگزار شود: برای ۵۹ بازی مثالی هم وجود دارد: ابتدا در ۴ بازی کشتی‌گیر ۱۲ از ۱۱ می‌بازد و سپس کشتی‌گیر ۱۲ با هر کشتی‌گیر دیگری (۱۱،...، ۳، ۲، ۱)۵ بار بازی کرده و همه را می‌برد. در انتها همه کشتی‌گیرها غیر از شماره ۱۲ حذف شده‌اند و $۵ \times ۱۱ + ۴ = ۵۹$ بازی انجام شده است.

پس پاسخ ۵۹ است.

۳- فرض کنید افراد را براساس نمره به صورت نزولی مرتب کرده‌ایم. داریم:

۱۹۸= (تعداد) ×(میانگین)=(مجموع کل نمره‌ها)

(مجموع نمرات ۱۰ نفر اول)-(مجموع کل نمره‌ها)=(نمره‌ی نفر آخر)

با توجه به رابطه بالا هر چه مجموع نمرات ۱۰ نفر اول بیشتر باشد نمره نفر آخر کمتر می‌شود. پس اگر بخواهیم نمره‌ی نفر اول کمینه باشد، باید مجموع نمرات بقیه بیشینه باشد. مجموع نمرات ۵ نفر اول حداکثر ۱۰۰ است و در حالتی به دست می‌آید که نمره‌ی همه‌ی آن‌ها ۲۰ باشد. نمره‌ی ۵ نفر بعدی باید کمتر مساوی ۱۹ باشد(زیرا نمره‌ی نفر ۶ ام ۱۹ است) پس مجموع نمرات آن‌ها حداکثر ۹۵ است و در حالتی به دست می‌آید که نمره‌ی همه‌شان ۱۹ باشد. بنابراین مجموع نمرات ۱۰ نفر اول حداکثر ۱۹۵ است که با فرض، نمره‌ی نفر آخر ۳ خواهد بود و این مقدار، حداقل نمره‌ی آخر می‌باشد. پاسخ ۳ است.

۴- دنباله‌ی متناظر با تغییرات قیمت به صورت ...،۱-، ۱-، ۱-، ۱+، ۱+، ۱- است. بعد از گذشت یک روز تغییر قیمت سهام برابر ۱- ریال خواهد بود، بعد از ۱+۲ روز قیمت سهام ۱+۲- نسبت به روز اول تغییر کرده و ... و بعد از n **روز** $۱ + ۲ + ۳ + \cdots \pm n$ $-۱ + ۲ + ۳ + \cdots \pm n$ ریال قیمت سهام تغییر می‌کند. توجه کنید که بعد از روزهای $\frac{n(n+۱)}{۲}$,$۱, ۳, ۶, \ldots$ علامت یک‌های دنباله‌ی تغییرات عوض می‌شود.

برای این که بفهمیم در روز ۳۶۵ام در چه وضعیتی هستیم، معادله $\frac{n(n+۱)}{۲} < ۳۶۵$ را حل کرده و به این نتیجه می‌رسیم که $n < ۲۷$.

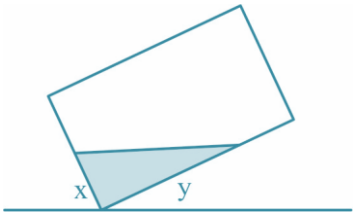
طبق گفته‌های بالا تا روز $۳۵۱ = (\frac{۲۶ * ۲۷}{۲})$اُم قیمت سهام ۲۶+...+۳-۲-۱- ریال تغییر می‌کند، یعنی ۱۳+ ریال. بعد از آن تا روز ۳۶۵ اُم هر روز یک ریال قیمت کاهش می‌یابد که تعداد این روزها ۱۴=۳۵۱-۳۶۵ است. نهایتاًبعد از گذشت ۳۶۵ روز قیمت هر سهم برابر۹۹۹=۱۴-۱۰۰۰+۱۳ می‌شود. پاسخ ۹۹۹ است.

۵- ضریب ریشه‌های عبارت $x^۲+ax+۱۳۸۹$ برابر ۱۳۸۹ است. تجزیه ۱۳۸۹ به عوامل اول به صورت $۱۳۸۹=۳\times۴۶۳$ است بنابراین ۱۳۸۹ را به ۴ طریق می‌توان به صورت ضرب دو عدد صحیح نوشت(۱۳۸۹ و۱، ۱۳۸۹- و ۱-، ۴۶۳و۳، ۴۶۳- و ۳-). که در هر حالت a به طور یکتا (منفی جمع دو ریشه) تعیین می‌شود و ۴ مقدار متفاوت برای a به دست می‌آید. پاسخ ۴ است.

۶- راه حل اول: کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد ۲ تا ۶، ۶۰ است پس عددی که ریشه ۲ تا ۶ اُم آن صحیح است باید ریشه‌ی ۶۰ اُمش هم صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی $۲^{۶۰}$ است که $۶۰+۱=۶۱$ مقسوم علیه دارد. پس پاسخ ۶۱ است.

راه حل دوم: اگر تجزیه به عوامل اول عددی به صورت $a=p_۱^{\alpha_۱}\dots p_n^{\alpha_n}$ باشد ریشه kاُم آن برابر $p_۱^{\alpha_۱\div k}\dots p_n^{\alpha_n\div k}$ خواهد بود؛ پس برای طبیعی بودن ریشه kاُم a باید α_iها بر k بخش‌پذیر باشند؛ در این سوال نماها باید بر کوچک‌ترین مضرب مشترک ۲ تا ۶ یعنی ۶۰ بخش‌پذیر باشند؛ کوچک‌ترین عدد طبیعی با این ویژگی $۲^{۶۰}$ بوده و ۶۱ مقسوم علیه دارد. پاسخ ۶۱ است.

۷- اگر فرض کنیم آب درون محفظه به صورت روبه رو درآمده باشد رابطه‌های زیر را داریم:



حجم آب: $\frac{۱}{۲}(x\times y)\times ۲=x.y=۰/۸m^۳$

سطح آب: $۲x+۲y+۲\times(\frac{۱}{۲}x.y)=۲(x+y)+۰.۸$

برای مینیمم شدن سطح تماس آب با محفظه طبق روابط بالا باید x+y مینیمم شود. طبق نامساوی حسابی ـ هندسی داریم $x+y\geq\sqrt{xy}$، در حالی در این مسئله xy ثابت(۰.۸) است. تساوی نامساوی حسابی ـ هندسی با فرض ثابت بودن حاصل ضرب xy وقتی حاصل می‌شود که x و y برابر باشند پس در صورت برابر بودن x و y مجموع‌شان مینیمم می‌شود و در نتیجه سطح تماس آب و محفظه مینیمم می‌شود. بنابراین زاویه سطح محفظه با افق برابر ۴۵ درجه خواهد بود لذا پاسخ ۴۵ است.

۸- توجه کنید که کسر داده شده برابر $\binom{۲n}{n}$ است لذا همواره حاصل آن عددی طبیعی خواهد بود. ابتدانشان می‌دهیم در صورتی که $۲n<۱۷^۲$ جواب موجود نمی‌باشد:

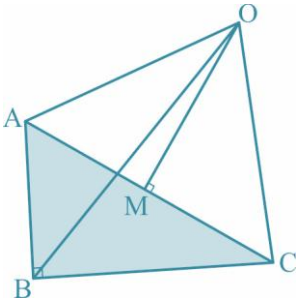
اگر $۲n<۱۷^۲$ هر مضرب ۱۷ در تجزیه به عوامل اول دقیقاً ۱ عامل ۱۷ دارد. اگر $n=۱۷k+r(۰\leq r<۱۷)$ ۱۷ مخرج کسر k عامل ۱۷ خواهد داشت، همچنین خواهیم داشت:

$$۲n=۱۷(۲k)+۲r\leq۱۷(۲k)+۳۲\leq۱۷(۲k+۱)+۱۵$$

پس در صورت کسر حداکثر $k+۱$ مضرب ۱۷ خواهیم داشت و در نتیجه صورت حداکثر $k+۱$ عامل ۱۷ خواهد داشت ولی برای اینکه کسر داده شده بر $۱۷^۲$ بخش‌پذیر باشد باید تعداد مضارب ۱۷ در صورت حداقل ۲ تا از تعداد مضارب ۱۷ در مخرج بیشتر باشد پس ۲۸۹ در صورتی که $۲n<۱۷^۲$ خواسته سؤال ممکن نخواهد بود.

تا اینجا ثابت کردیم $۲n\geq۱۷^۲=۲۸۹$. کوچک‌ترین عدد طبیعی n که این شرط را دارد ۱۴۵ است که با آزمایش کردن آن $(n=۱۴۵)$مشاهده می‌کنیم کسر داده شده بر $۱۷^۲$ بخش‌پذیر است؛ پس پاسخ ۱۴۵ است.

۹- با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای فواصل رادارها، سه رادار، مثلثی قائم الزاویه تشکیل می‌دهند (C,B,A). با توجه به برابر بودن فاصله هواپیما (نقطهO) از دو راس هر ضلع مثلث، این نقطه روی مختصات عمود منصف ضلع‌ها قرار گرفته. اشتراک این سه صفحه خطی عمود برصفحه مثلث (زمین) در وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه (نقطه M) می‌باشد؛ پس O روی آن خط قرار دارد و شرط این است که فاصله آن از رئوس مثلث ۱۳ کیلومتر است. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OMA طول ضلع OM که همان ارتفاع هواپیما از زمین است به دست می‌آید: $\sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$. پاسخ ۱۲ است.



۱۰- خطوط مطلوب را به ۲ گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: خطوط موازی دو وجه مقابل ازمکعب که با توجه به تقارن ۴ جانبه مکعب، یک دسته از ۴ دسته آن‌ها را مشخص می‌کنیم: (شماره مکعب‌های ۱×۱ مربوط به خطوط آورده شده)

۱-۱۳ ۲-۱۴ ۳-۱۵ ۴-۱۶ ۵-۱۷ ۶-۱۸ ۱۰-۲۲ ۱۱-۲۳ ۱۲-۲۴

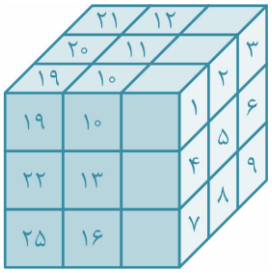
پس گروه اول ۹×۴=۳۶ خط دارد.

گروه دوم: خطوط موازی قطر اصلی مکعب. این گروه نیز با توجه به تقارن به ۴ دسته متناظر و هم اندازه تقسیم می‌شود که یک دسته را آورده‌ایم:

۱-۱۴ ۲-۱۵ ۴-۱۷ ۵-۱۸ ۱۰-۲۳ ۱۱-۲۴ ۱۳-۲۶

این گروه از ۷×۴=۲۸ خط تشکیل شده.

در مجموع ۲۸+۳۶=۶۴ خط قابل قبول وجود دارد. پاسخ ۶۴ است.



دفترچه کد ۱، سوالات تستی

۱- **گزینه [هـ] صحیح است.**

چون C' دوران ۶۰ درجه C است. مثلث ACC' متساوی الاضلاع است. درنتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر ۱ است.

۲- **گزینه [الف] صحیح است.**

با فرض طبیعی بودن کسر $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$، باید $۵۹۶+k \mid ۷۰۰-k$.

از طرف دیگر $۷۰۰-k \mid ۷۰۰-k$.

با جمع این دو رابطه خواهی داشت: $۱۲۹۶-k \mid ۷۰۰$ پس $۷۰۰-k$ باید مقسوم علیه ۱۳۹۶ باشد و هر مقسوم علیه‌های ۱۲۹۶ که کوچک‌تر از ۷۰۰ باشد یک جواب قابل قبول خواهد بود. $۱۲۹۶ = ۲^۴ \times ۳^۴$، بنابراین ۲۵ مقسوم علیه دارد که همه آن‌ها غیر از خود ۱۲۹۶ از ۷۰۰ کوچکترند و به ازای هر کدام یک جواب داریم. پس به ازای ۲۴ مقدار طبیعی برای k کسر مورد نظر طبیعی خواهد بود.

۳- **گزینه [ب] صحیح است.**

راه‌حل اول: برای دستگاه مختصات، جهت افقی(راست) را محور xها و جهت عمودی(بالا) را محور yها و مبدا مختصات را منزل آقای فراموش‌کار در نظر می‌گیریم. محل وی را با (a,b) نشان می‌دهیم. با گذشت هر ساعت مقدار یکی از a و b یک واحد تغییر می‌کند. با توجه به اینکه ۱۵ ساعت از آغاز حرکت گذشته باید داشته باشیم: $|a|+|b| \le ۱۵$ و همچنین $|a|+|b|$ باید فرد باشد(چون با گذشت هر ساعت مقدار آن دقیقاً ۱ واحد تغییر می‌کند)

پس مجموع ممکن ۱۶ است ۱، ۳، ۵، ...، ۱۵ باشد. تعداد مختصات‌های ممکن با این ویژگی‌ها عبارت است از: ۲۵۶=۳۲-(۱۶+...+۴+۲)×۴ (ضریب ۴ به خاطر ۴ ناحیه‌ی مختصات، اعداد داخل پرانتز تعداد راه‌حل‌های نوشتن ۱ تا ۱۵ به صورت مجموع دو عدد صحیح نامنفی و ۳۲ تعداد نقاط روی محورها که دوبار شمرده شده‌اند)

۴- **گزینه [الف] صحیح است.**

اگر تعداد شکلات‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ تا باشد با قرار دادن ۶ شکلات در ۶ ردیف اول فرض سوال نقض می‌شود. ادعا می‌کنیم ۳۵ شکلات هر طوری قرار بگیرند نمی‌توانند بیش‌تر خانه‌های بیشتر ردیف‌ها را پر کنند؛ در هر ردیفی که بیش‌تر خانه‌هایش پر شده، حداقل ۶ شکلات قرار دارد و حداقل ۶ ردیف باید این شرایط را داشته باشند پس برای پر کردن بیش‌تر خانه‌های ردیف‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ شکلات مورد نیاز است.

۵- **گزینه [هـ] صحیح است.**

با توجه به این که $PE \perp AC$ و $PD \perp AB$ و $DE \| BC$ داریم: $\angle EDP = ۴۰^\circ$ و $\angle DEP = ۶۰^\circ$ حال با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث PDE داریم $\frac{PE}{PD} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$. و داریم: $PC = \frac{PE}{\sin(۳۰^\circ)} = ۲PE$ و $PB = \frac{PD}{\sin(۴۵^\circ)} = \sqrt{۲}PD$.

پس داریم $\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{PD}{\sin(۴۵^\circ)}}{\frac{PE}{\sin(۳۰^\circ)}} = \frac{PD}{PE} \times \frac{\sqrt{۲}}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

۶- **گزینه [ب] صحیح است.**

داریم $q^۳ = ۰.\overline{abcabc...}$ پس $q^۳ = \overline{abc.abcabc...}$ و با کم کردن این دو عبارت داریم: $۹۹۹q^۳ = \overline{abc}$. پس $q^۳ = \frac{\overline{abc}}{۹۹۹}$.

چون q گویاست؛ هم صورت و هم مخرج $q^۳$ وقتی که حد امکان ساده شود باید مکعب کامل باشند. با توجه به اینکه $۹۹۹ = ۳^۳ \times ۳۷$ صورت q حداقل یک عامل ۳۷ دارد لذا کوچک‌ترین $q^۳$ ممکن $\frac{۱}{۲۷}$ بوده که کوچک‌ترین q را نتیجه می‌دهد. پس $q^۳ = \frac{۱}{۲۷} = \frac{۳۷}{۹۹۹}$.

نتیجه می‌شود $\overline{abc} = ۳۷$ و $a+b+c = ۱۰$.

۷- **گزینه [هـ] صحیح است.**

در ابتدا مجموع مختصات برابر ۱ است و بعد از طی کردن یک چهارم مسیر به مقدار ۱- می‌رسد و بعد از پیمودن یک چهارم دیگر این مقدار دوباره ۱- می‌شود در بعد از پیمودن یک چهارم آخر این مقدار ۱ می‌شود و سپس این مسیر دوباره تکرار می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (هـ) این خاصیت را دارد.

۸- گزینه [الف] صحیح است.

چون b بین ۰ و ۱ است $b^{۱۳۸۹}$ عددی بسیار کوچک است و با تقریب خوبی می‌توان از آن صرف‌نظر کرد ودر نتیجه می‌توان صورت مسئله را به صورت روبه‌رو ساده کرد. $a^۲ \geq Mab \rightarrow a \geq Mb \rightarrow M \leq \frac{a}{b}$. حال a را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفت در این صورت M به صفر میل می‌کند. در واقع برای هر M بزرگ‌تر از صفر a,b ای می‌توان ارائه داد که نامساوی غلط باشد. به این صورت که b طوری انتخاب می‌کنیم که $b^{۱۳۸۹}$ از Mab کم‌تر باشد و سپس a را آنقدر کوچک می‌گیریم که $a^۲$ را اگر به $b^{۱۳۸۹}$ اضافه کنیم به Mab نرسد.

۹- گزینه [ج] صحیح است.

تعداد راه‌های مطالعه‌ی این کتاب‌ها برابر تعداد راه‌های نوشتن کلمه‌ای هشت حرفی با a,b,c,d است به طوری که از هر حرف دقیقاً دو بار استفاده شود. این عدد برابر $\frac{۸!}{۲!\times ۲!\times ۲!\times ۲!} = ۲۵۲۰$ است. (بدون هیچ محدودیت ترتیبی !۸ روش داریم؛ به محدودیت ترتیبی هر دو کتاب روش‌ها نصف می‌شوند چون دقیقاً در نصف راه‌ها یک کتاب زودتر از دیگری آمده)

۱۰- گزینه [د] صحیح است.

این معادله نمی‌تواند دو ریشه در بازه‌ی [۱و ۰] داشته باشد زیرا در غیر این صورت ضرب دو ریشه که مقدار آن برابر b خواهد بود کمتر از ۱ می‌شود که متناقض با طبیعی بودن b است. پس این معادله حداکثر یک ریشه در این بازه دارد. و این هم وقتی رخ می‌دهد که مقدار $x^۲ - ax + b$ در نقطه صفر و نقطه ۱ مختلف العلامت باشد(یا یکی صفر باشد). مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر b و مقدار تابع در نقطه‌ی ۱ برابر $۱ - a + b$ است. حال برای bها از ۱ تا ۱۰ مقدار b مثبت است. پس باید مقدار $۱ - a + b$ نامثبت باشد. برای $b = ۱$، a ۹ حالت، برای $b = ۲$، a۸ حالت و ....برای $b = ۹$، a ۱ حالت دارد. پس در کل تعداد زوج مرتب‌ها برابر ۹+...+۳+۲+۱=۴۵ است.

۱۱- گزینه [د] صحیح است.

تا وقتی که عدد زوج است بزرگ‌ترین مقسوم علیه آن نصف آن است و نتیجه‌ی عملیات ما نصف کردن عدد مورد نظر است پس در ۱۰ مرحله، $۵^{۱۲} \times ۳^{۱۱}$ به دست می‌آید. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد یک سوم آن است و نتیجه‌ی عملیات ما دو سوم کردن عدد موردنظر است. حال عدد زوج شده وانجام عملیات به معنای نصف کردن آن است. پس اگر عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد بعد از دو مرحله یک سوم می‌شود؛ درنتیجه بعد از ۲×۱۱=۲۲ مرحله به $۵^{۱۲}$ می‌رسیم. حال بزرگترین مقسوم‌علیه این عدد $\frac{۱}{۵}$ آن است و نتیجه‌ی عملیات ما چهار پنجم کردن عدد است. حال عدد بر ۴ بخش‌پذیر شده و طی دو مرحله‌ی بعد دو بار بر ۲ تقسیم می‌شود. پس اگر عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد بعد از ۳ مرحله تقسیم بر ۵ می‌شود؛ لذا بعد از ۳×۱۲=۳۶ مرحله به ۱ می‌رسیم. پس در کل ۲۲+۳۶+۱۰=۶۸ مرحله انجام می‌شود.

۲- گزینه [د] صحیح است.

برای اینکه دو ساعت خراب هر کدام ۶ ساعت جلو بیفتند باید رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$$۱۱k \equiv ۶ \times ۶۰ (\mathrm{mod}\, ۱۲ \times ۶۰) \quad , \quad ۷k \equiv ۶ \times ۶۰ (\mathrm{mod}\, ۱۲ \times ۶۰)$$

ضرب در ۶۰ شدن پیمانه‌ها و اعداد به منظور هم واحد شدن طرفین است(همه به دقیقه). که از این رابطه‌ها به دست می‌آید $k \equiv ۳۶۰ (\mathrm{mod}\, ۷۲۰)$ که نتیجه می‌دهد کوچک‌ترین k ممکن برابر ۳۶۰ است.

۱۳- گزینه [ج] صحیح است.

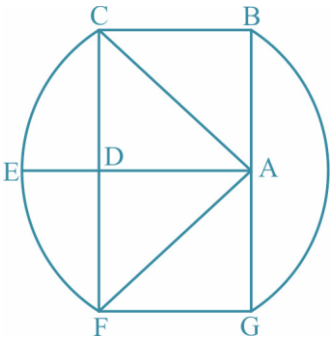
راه‌حل اول: اگر هر عدد را عددی سه رقمی تصور کنیم (با گذاشتن صفر به اندازه‌ی نیاز در اولش) از هر یک از ارقام ۰ تا ۹ بار آمده است ۳۰۰، می‌توان دید $۳۰۰ \times (۰ \times (۰ + ۱ + \ldots + ۹) + ۱ \times (۰ + ۱ + \ldots + ۹) + ۹ \times (۰ + ۱ + \ldots + ۹)) = ۶۰۷۵۰۰$ برابر مجموع مورد نظر ماست(هر جمله از جواب ده بار در این مجموع آمده است) پس حاصل ۶۰۷۵۰ خواهد بود.

راه حل دوم: مجموعه اعداد ۰ تا ۹۹۹، ... مجموعه اعدادی است که از نوشتن ۳ رقم از ارقام۰ تا ۹، ... کنار هم حاصل می‌شوند. اگر تعریف کنیم $f_۱(\overline{abc}) = ab$ و $f_۲(\overline{abc}) = bc$ و $f_۳(\overline{abc}) = ca$ تابع مورد نظر سوال حاصل جمع این سه تابع است و می‌توانیم حاصل جمع این توابع را روی مجموعه اعداد داده شده جداگانه حساب کنیم. با توجه به تقارن مجموعه اعداد ۰ تا ۹۹۹، ... نسبت به ۳ رقم (یکان، دهگان و صدگان)، محاسبه یک مجموع و ۳ برابر کردن آن کافیست(مثلاً فقط برای $f_۱$):

$$\text{جواب} = ۳ \times \sum_{i=۰}^{۹} \sum_{j=۰}^{۹} i \times j \times ۱۰$$

$$= ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} (i \times \sum_{j=۰}^{۹} j) = ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} i \times \sum_{j=۰}^{۹} j = ۳۰ \times ۴۵ \times ۴۵ = ۶۰۷۵۰$$

۱۴- گزینه [ج] صحیح است.



اگر کاغذ را چنان تا کنیم که امتداد قطر CA بر روی امتداد ضلع DA قرار گیرد آن‌گاه نقطه C بر E منطبق خواهد شد. بنابراین اگر به مرکز A کاغذ را بچرخانیم، ربع دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AC و اگر به مرکز D بچرخانیم ربع دایره‌ای به مرکز D و شعاع DB رنگ خواهد شد. تمام نقاط داخل مستطیل CBGF نیز بدون نیاز به تا کردن رنگ می‌شوند پس:

$$\text{پاسخ} = ۲(-۴\pi(\sqrt{۲} \times ۲۰)^۲ - ۲۰^۲) + ۲۰ \times ۴۰ = ۴۰۰\pi$$

۱۵- گزینه [ب] صحیح است.

داریم: $\angle HDB = \angle C$. هم‌چنین داریم: $\angle C = \angle AEB$. زاویه‌ی $\angle DBH$ برابر $۹۰ - \angle C$ است. اگر AH را امتداد داده تا دایره‌ی محیطی مثلث را در A' قطع کند، می‌دانیم که A' قرینه H نسبت به BC است. در نتیجه $\angle HA'D = \angle DHA' = ۹۰ - \angle C$:

در این صورت $\angle ABE = \angle AA'E = \frac{A\hat{E}}{۲}$. پس دو مثلث HBD و ABE با یکدیگر متشابه‌اند. در نتیجه داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DH}{AE} \rightarrow \frac{۳}{۸۹} = \frac{۱}{AE} \rightarrow AE = \frac{۸۹}{۳}$$