



دخترچه سوالات به همراه پاسفنامه تشریحی مرحله اول بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۶

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
۲۷۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

- کد برگه سوالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سوالات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سوالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- در سوال‌های چهار گزینه‌ای به هر پاسخ درست ۳ نمره مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره منفی تعلق می‌گیرد. در مساله‌های کوتاه به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.
- داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۱- همه زاویه‌های مثلثی از ۵۹ درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه درباره این مثلث همواره صحیح است؟

ماگ

- (الف) یک زاویه منفرجه دارد. (ب) یک زاویه ۶۰ درجه دارد. (ج) قائم‌الزاویه است.
(د) متساوی‌الساقین است. (ه) همه زاویه‌هایش از ۶۲ درجه کوچک‌ترند.

۲- چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بیش از ۱۵ نداشته باشد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نباشد.

ماگ

- (الف) ۶۴ (ب) ۷۲۰ (ج) ۷۲۹ (د) ۲۱۸۷ (ه) ۴۰۹۶

۳- معادله $|2 - \|a\| + 3| = 1$ چند جواب حقیقی دارد؟

ماگ

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۸ (ه) جواب ندارد.

۴- مجموع ارقام کوچک‌ترین عددی که حاصل ضرب ارقام آن برابر ۱۰۰۰ است، چیست؟

ماگ

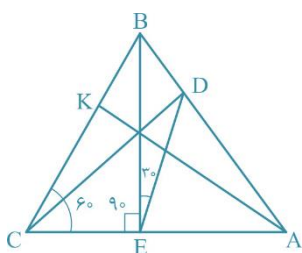
- (الف) ۱۴ (ب) ۲۱ (ج) ۲۳ (د) ۲۶ (ه) ۳۰

۵- در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $\angle ACB = 60^\circ$ باشد، نسبت

ماگ

BK به BC چند است؟ (شکل دقیق نیست).

- (الف) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{1}{3}$ (ه) $\frac{1}{2}$



۶- عددی دو رقمی در نظر بگیرید. حاصل ضرب ارقامش را محاسبه کنید. برای عدد به دست آمده همین کار را انجام دهید و این کار را

ماگ

آن قدر تکرار کنید تا به عددی یک‌رقمی برسید. با شروع از چند عدد دو رقمی به عدد ۲ می‌رسید؟

- (الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۱۰

۷- تمام اعداد طبیعی ۵ رقمی که شامل ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ و بدون رقم تکراری هستند را از کوچک‌به بزرگ مرتب کرده‌ایم. ۳۲۴۵۱

ماگ

چندمین عدد است؟

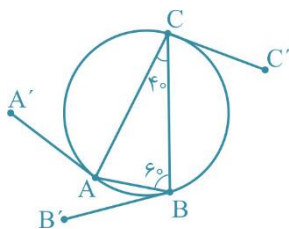
- (الف) ۴۶ (ب) ۴۹ (ج) ۵۲ (د) ۵۵ (ه) ۵۸

۸- در مثلث ABC ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 40^\circ$. AA' ، BB' و CC' هم طول و در یک جهت بر

ماگ

دایره محیطی ABC مماسند. زاویه $\angle B'A'C'$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست)

- (الف) ۳۰ (ب) ۴۰ (ج) ۶۰ (د) ۸۰ (ه) ۱۲۰



۹- عددی طبیعی را مثلثی می‌گوییم هرگاه بتوان به ازای یک عدد طبیعی n آن را به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ نوشت. چند زوج (a, b) از

ماگ

اعداد مثلثی وجود دارد که $a - b = 101$ ؟

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۱۰- بزرگ‌ترین ضریب در بسط دو جمله‌ای $(1+x)^{100}$ چند رقم دارد؟

ماگ

- (الف) کمتر از ۱۵ (ب) بین ۱۵ تا ۲۵ (ج) بین ۲۵ تا ۳۵ (د) بین ۳۵ تا ۴۵ (ه) بیشتر از ۴۵

- ۱۱- یک عدد اول را «بسیار اول» گوئیم اگر هر قطعه از ارقام متوالی آن نیز عددی اول به وجود آورند. اعداد بسیار اول دو رقمی عبارتند از ۲۳، ۳۷، ۵۳ و ۷۳. چند عدد سه رقمی بسیار اول وجود دارد؟
 الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵
- ۱۲- مجلس هشتم ۲۸۵ کرسی دارد. اگر سه حزب در انتخابات شرکت کنند به چند حالت ممکن است هیچ حزبی اکثریت مطلق را به دست نیاورد؟ (یعنی تعداد نمایندگان منتخب از آن حزب بیش از نصف نباشد).
 الف) ۱۰۱۵۳ ب) ۱۰۲۰۱ ج) ۱۱۳۲۵ د) ۱۱۴۰۰ ه) ۱۱۷۱۵
- ۱۳- دستگاه معادلات روبه‌رو در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - 1 = yz \\ y - 1 = zx \\ z - 1 = xy \end{cases}$$
 الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) جواب ندارد.
- ۱۴- به چند طریق می‌توان ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید را در یک ردیف قرار داد که دقیقاً سه بلوک سیاه داشته باشد؟ یک بلوک سیاه چند مهره سیاه کنار هم است که در دو طرف آن‌ها مهره دیگری نباشد. مثلاً آرایش روبه‌رو دو بلوک سفید و سه بلوک سیاه دارد.

 الف) ۵۴ ب) ۱۲۰ ج) ۲۰۰ د) ۴۰۰ ه) ۵۴۰
- ۱۵- بیشترین تعداد عامل ۲ در مجموع پنج عدد طبیعی که ضرب آن‌ها 2^{1386} باشد چند است؟
 الف) ۲۷۶ ب) ۲۷۷ ج) ۲۷۸ د) ۲۷۹ ه) ۲۸۰
- ۱۶- نقطه A روی دایره C ثابت است و نقطه‌های M و N طوری روی دایره حرکت می‌کنند که مقدار زاویه $\angle MAN$ همواره ۳۳ درجه است. کدام گزینه صحیح است؟
 الف) همه خطوط MN از نقطه ثابتی می‌گذرند.
 ب) همه خطوط MN به دایره ثابتی مماس هستند.
 ج) تفاضل طول AM و AN مقداری ثابت است.
 د) نسبت طول AM و AN مقداری ثابت است.
 ه) اندازه شعاع دایره محاطی مثلث AMN عددی ثابت است.
- ۱۷- بیشترین مقدار $ab + bc + cd$ برای $a, b, c, d \geq 0$ با شرط $a + b + c + d = 1$ چند است؟
 الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{2}{9}$ ه) $\frac{3}{16}$
- ۱۸- الاغی می‌خواهد از نقطه A به نقطه B برود. ولی دقیقاً در وسط راه دریاچه‌ای دایره‌ای شکل به قطر دو کیلومتر قرار دارد. اگر فاصله A و B چهار کیلومتر باشد، کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟

 الف) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ب) $2 + \pi$ ج) ۵ د) $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ ه) ۶
- ۱۹- تعداد مثلث‌های غیرهم‌نهشت که رئوسشان از بین رئوس ده ضلعی منتظم انتخاب شده باشند برابر است با:
 الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۲۰ دو مثلث کاغذی را روی هم قرار می‌دهیم. مرز بیرونی شکلی که به وجود می‌آید چند ضلع نمی‌تواند داشته باشد؟

ماف

الف) ۸

ب) ۹

ج) ۱۰

د) ۱۱

ه) ۱۲



۲۱ شش جعبه خالی با اندازه‌های مختلف داریم. ابعاد جعبه‌ها طوری است که درون هر جعبه می‌توان همه جعبه‌های کوچک‌تر از آن را، جدا از هم، جا داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را درون بزرگ‌ترین جعبه جاسازی کرد؟ (توجه کنید که می‌شود بعضی از جعبه‌ها را درون بعضی دیگر قرار داد.)

ماف

الف) ۶۴

ب) ۱۲۰

ج) ۱۲۸

د) ۲۰۰

ه) ۲۴۰

۲۲ فرض کنید $f(x) = ax + b$. اگر $f(0) \leq 2$ ، $f(1) \geq 0$ ، بیشترین مقدار ممکن برای $f(10)$ چند است؟

ماف

الف) ۱۰

ب) ۱۲

ج) ۲۰

د) ۳۶

ه) ۴۰

۲۳ مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع به ضلع یک چقدر است؟

ماف

الف) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج) $\frac{4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$

د) $25\sqrt{3} - 48$

ه) $\frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

۲۴ فرض کنید $ABCD$ مستطیلی 1×2 باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط P و Q قطع کند طول PQ چقدر است؟

ماف

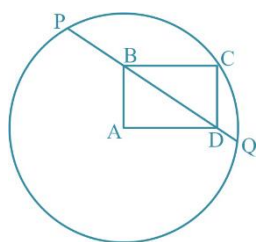
الف) $\sqrt{\frac{84}{5}}$

د) $\sqrt{6\pi}$

ب) $\sqrt{\frac{35}{2}}$

ه) $\sqrt{20}$

ج) $\sqrt{\frac{92}{5}}$



۲۵ معادله $2^x + 2x^2 = y^2$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

ماف

الف) ۱

ب) ۲

ج) ۴

د) ۶

ه) جواب ندارد.

۲۶ در شکل روبه‌رو M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 به ترتیب، وسط AD, BC, PQ, CA هستند و $\angle ANQ = 40^\circ$. زاویه بین دو خط گذرنده از M_1M_2 و M_3M_4 چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

ماف

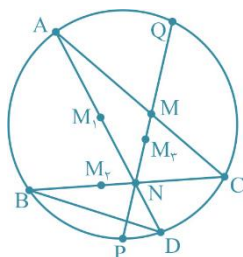
الف) ۲۰

ب) ۴۰

ج) ۵۰

د) ۶۰

ه) ۸۰



۲۷ a عددی طبیعی بزرگ‌تر از 10 و x_n رقم دهگان a^n است. بسط اعشاری $x_1 x_2 x_3 \dots$

ماف

الف) به ازای هر a متناوب ساده است.

ب) به ازای هر a متناوب مرکب است.

ج) به ازای هر a نامتناوب است.

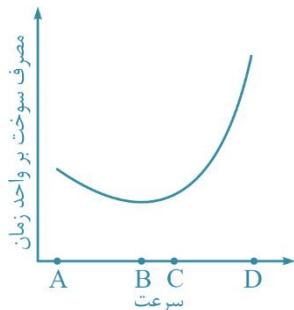
د) برای بعضی از مقادیر a متناوب و برای بعضی نامتناوب است.

ه) برای بعضی از مقادیر a متناوب ساده و برای بعضی متناوب مرکب است.

۲۸- به هر وجه و هر رأس یک مکعب عددی طبیعی نسبت داده‌ایم. می‌دانیم عدد هر رأس برابر ضرب اعداد سه وجه مجاورش است. مجموع اعداد رئوس ۲۳۱ است. مجموع اعداد وجوه چند است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۷ ج) ۲۱ د) ۳۰ ه) اطلاعات ناقص است.

۲۹- نمودار مقابل مصرف سوخت در واحد زمان یک خودرو را بر حسب سرعت آن نشان می‌دهد. اگر بخواهیم با سرعت ثابت از زنجان به قزوین برویم با چه سرعتی کل سوخت مصرف شده کمتر است؟



الف) کمترین سرعت ممکن یعنی A

ب) B

ج) بیشترین سرعت ممکن یعنی D

د) C

ه) بستگی به فاصله زنجان و قزوین دارد.

۳۰- چند سه تایی (A, B, C) از زیر مجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ داریم که $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$ ؟

ه) ۷۷۷۶

د) ۷۷۰۰

ج) ۷۶۵۶

ب) ۷۶۵۵

الف) ۷۵۰۰

کلید سوالات

۱	ه د ج ب الف	۲۱	ه د ج ب الف	۴۱	ه د ج ب الف
۲	ه د ج ب الف	۲۲	ه د ج ب الف	۴۲	ه د ج ب الف
۳	ه د ج ب الف	۲۳	ه د ج ب الف	۴۳	ه د ج ب الف
۴	ه د ج ب الف	۲۴	ه د ج ب الف	۴۴	ه د ج ب الف
۵	ه د ج ب الف	۲۵	ه د ج ب الف	۴۵	ه د ج ب الف
۶	ه د ج ب الف	۲۶	ه د ج ب الف	۴۶	ه د ج ب الف
۷	ه د ج ب الف	۲۷	ه د ج ب الف	۴۷	ه د ج ب الف
۸	ه د ج ب الف	۲۸	ه د ج ب الف	۴۸	ه د ج ب الف
۹	ه د ج ب الف	۲۹	ه د ج ب الف	۴۹	ه د ج ب الف
۱۰	ه د ج ب الف	۳۰	ه د ج ب الف	۵۰	ه د ج ب الف
۱۱	ه د ج ب الف	۳۱	ه د ج ب الف	۵۱	ه د ج ب الف
۱۲	ه د ج ب الف	۳۲	ه د ج ب الف	۵۲	ه د ج ب الف
۱۳	ه د ج ب الف	۳۳	ه د ج ب الف	۵۳	ه د ج ب الف
۱۴	ه د ج ب الف	۳۴	ه د ج ب الف	۵۴	ه د ج ب الف
۱۵	ه د ج ب الف	۳۵	ه د ج ب الف	۵۵	ه د ج ب الف
۱۶	ه د ج ب الف	۳۶	ه د ج ب الف	۵۶	ه د ج ب الف
۱۷	ه د ج ب الف	۳۷	ه د ج ب الف	۵۷	ه د ج ب الف
۱۸	ه د ج ب الف	۳۸	ه د ج ب الف	۵۸	ه د ج ب الف
۱۹	ه د ج ب الف	۳۹	ه د ج ب الف	۵۹	ه د ج ب الف
۲۰	ه د ج ب الف	۴۰	ه د ج ب الف	۶۰	ه د ج ب الف

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۶

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

با توجه به اینکه مجموع زوایای مثلث 180° درجه است، اگر یکی از زوایا بیش‌تر یا مساوی 62° درجه باشد مجموع دو زاویه دیگر کم‌تر یا مساوی 118° درجه شده، که مستوجب این است که یکی از زوایا کم‌تر یا مساوی 59° درجه شود.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

عوامل اول کوچک‌تر از ۱۵ عبارتند از ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ (شش عامل). از طرف دیگر با توجه به اینکه این اعداد نباید بر هیچ مکعب کاملی بخش‌پذیر باشند، پس نمای این عوامل باید کم‌تر از ۳ باشد ($2 \leq a < 3$). چرا که در غیر این صورت آن عامل اول به توان ۳ عددی مکعب کامل بوده که عدد مذکور را می‌شمارد. بدین ترتیب تعدد اعداد برابر است با 3^6 یعنی ۷۲۹.

گزینه‌ی [الف] صحیح است.

دقت کنید از آنجا که حاصل قدر مطلق یک عدد همواره نامنفی است، پس $|a| \geq 0$ در نتیجه $|a| + 3 \geq 3$ بنابراین $|a| + 3 = |a| + 3$

پس:

$$1 = |2 - |a| + 3| = 2|2 - (|a| + 3)| = |-1 - |a|| = |1 + |a||$$

حال با توجه به رابطه $|1 + |a|| = 1$ و این که $|a| + 1$ مثبت است داریم:

$$|1 + |a|| = 1 + |a| = 1 \Rightarrow |a| = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس مسئله تنها دارای یک جواب است.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

1000 برابر است با $2^3 \times 5^3$. بنابراین ارقام عدد مورد نظر یا ۱ یا ۲ یا ۵ هستند. اگر عدد مورد نظر دارای رقم ۱ بود، می‌توان آن را حذف کرد، پس به عددی کوچک‌تر با شرایط مذکور دست خواهیم یافت. پس تنها باید از رقم‌های ۲ و ۵ استفاده کنیم. در نتیجه با توجه به اینکه می‌خواهیم کم‌ترین ارقام را داشته باشیم (چرا که عددی که دارای رقم‌های بیش‌تر است، بزرگ‌تر است) پس ارقام عبارتند از ۵ و ۵ و ۵ و ۸ که مجموعشان ۲۳ است.

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

M, L را به ترتیب محل برخورد DE, AK و BE, CD در نظر می‌گیریم.

$$\angle CBE = 90^\circ - \angle ECB = 30^\circ \Rightarrow DE \parallel CB$$

$$BKM \sim ELM \Rightarrow \frac{EL}{BK} = \frac{ME}{MB} \quad (I)$$

$$BCM \sim EDM \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{DE}{BC} \quad (II)$$

$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \begin{cases} \frac{EL}{CK} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{EL}{CK} \quad (III)$$

$$\stackrel{I, II, III}{\Rightarrow} \frac{EL}{BK} = \frac{EL}{CK} \Rightarrow BK = CK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$$

گزینه‌ی [د] صحیح است.

-۶

اگر در یک مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم، ارقام باید ۱ و ۲ باشند. پس اعداد ۱۲ و ۲۱ می‌باشند.

حال فرض کنید دو مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم. پس حاصل ضرب ارقام یا به ۱۲ رسیده یا به ۲۱. (چرا که حاصل ضرب ارقام هر عدد دو رقمی، خود عددی حداکثر دو رقمی است) در این حالت باید این دو عدد را به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی بنویسیم. لذا داریم:

$$\text{اعداد } ۳۴ \text{ و } ۴۳ \text{ به } ۱۲ \text{ می‌رسند. } \Rightarrow ۱۲ = ۳ \times ۴$$

$$\text{اعداد } ۲۶ \text{ و } ۶۲ \text{ به } ۱۲ \text{ می‌رسند. } \Rightarrow ۱۲ = ۲ \times ۶$$

$$\text{اعداد } ۳۷ \text{ و } ۷۳ \text{ به } ۲۱ \text{ می‌رسند. } \Rightarrow ۲۱ = ۳ \times ۷$$

تا اینجا ۸ عدد حاصل شده است. اکنون با توجه به اینکه هیچکدام از ۶ عدد مرحله قبل را نمی‌توان به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی نوشت، پس حالت دیگری نمی‌ماند و کار خاتمه یافته است.

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

-۷

یعنی $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ عدد داریم که رقم اولشان ثابت باشد. به همین ترتیب $۳ \times ۲ \times ۱$ یعنی ۶ عدد نیز داریم که رقم اولشان ثابت باشد. رقم اول از سمت چپ عدد ۳ است بنابراین ۲×۲۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم (اعدادی که رقم اولشان ۲ و ۱ بوده) برای رقم دوم از سمت چپ که رقم ۲ می‌باشد نیز ۶ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. پس ۵۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. از میان سه رقم باقی‌مانده هم به ترتیب ۱۴۵ و ۱۵۴ و ۴۱۵ و ۴۵۱ یعنی ۴ عدد دیگر باید جلو برویم. پس ۵۸، ۳۲۴۵۱، ۵۸ امین عدد است.

گزینه‌ی [د] صحیح است.

-۸

O مرکز دایره است.

$$\begin{cases} AA' \perp OA, BB' \perp OB \\ OA = OB \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow OAA' = OBB' \Rightarrow \begin{cases} OA' = OB' (I) \\ \angle AOA' = \angle BOB' (II) \end{cases}$$

$$\angle A'OB' = \angle A'OA + \angle AOB' (III)$$

$$\angle AOB = \angle B'OB + \angle AOB' (IV)$$

(اگر دو مثلث $A'OA$ و $B'OB$ هم‌پوشانی داشته باشند، علامت جمع فوق، علامت تفریق خواهد شد)

II, III, IV

$$\Rightarrow \angle A'OB' = \angle AOB (V)$$

$$\stackrel{I}{\Rightarrow} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} (VI)$$

$$\stackrel{V, VI}{\Rightarrow} AOB \sim A'OB'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}, \frac{C'A'}{CA} = \frac{OC'}{OC}$$

$$\Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \angle B'A'C' = \angle BAC = \alpha$$

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

-۹

$$a = \frac{n(n+1)}{2} \quad b = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$a - b = ۱۰۱$$

$$\Rightarrow a - b = \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (n - m)(n + m + 1) = 202 = 2 \times 101$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - m = 1 \\ n + m + 1 = 202 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 101 \\ m = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - m = 2 \\ n + m + 1 = 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 51 \\ m = 49 \end{cases}$$

پس دو دسته جواب دارد.

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

اگر n عددی طبیعی باشد، در میان $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ ، بزرگ‌ترین اعداد $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ می‌باشند.

پس بزرگ‌ترین ضریب $\binom{100}{50}$ می‌باشد.

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!50!} = \frac{100 \times 99 \times \dots \times 1}{(50 \times 49 \times \dots \times 1)^2}$$

$$= 2^{50} \frac{99 \times 97 \times \dots \times 1}{50 \times 49 \times \dots \times 1} < 2^{50} \times \frac{100}{50} \times \frac{98}{49} \times \dots \times \frac{2}{1} < 2^{50} \times 2^{50} = 2^{100}$$

$$= 2 \times (2^3)^{33} < 2 \times 10^{33} < 10^{34}$$

برای طرف دیگر داریم:

$$\binom{100}{50} = 2^{50} \frac{99 \times 97 \times \dots \times 1}{50 \times 49 \times \dots \times 1} = 2^{50} \frac{99}{49} \times \frac{97}{48} \times \dots \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{50}$$

$$> 2^{50} \times \frac{98}{49} \times \frac{96}{48} \times \dots \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{100} = 2^{50} \times 2^{49} \times 2 \times \frac{1}{100} = \frac{2^{100}}{100}$$

$$= \frac{(2^{10})^{10}}{100} > \frac{(10^3)^{10}}{100} = 10^{28}$$

گزینه‌ی [الف] صحیح است.

با توجه به اینکه هر قطعه از آن اول است، پس هر قطعه از آن نیز باید بسیار اول باشد. پس دو رقم سمت چپ آن نیز بسیار اول است. حال در صورتی که با ۲۳ شروع شود، رقم سوم باید ۷ باشد زیرا ۳۷ تنها عدد بسیار اولی است که با ۳ آغاز می‌شود. به همین منوال، تنها اعدادی که می‌توانند بسیار اول باشند عبارتند از: ۲۷۳ و ۳۷۲ و ۵۷۳ و ۷۳۷. خود این اعداد نیز باید اول باشند که از این اعداد تنها ۳۷۳ اول است. (دو تا بر ۳ و دیگری بر ۱۱ بخش پذیر است).

گزینه‌ی [الف] صحیح است.

با توجه به اینکه هیچ یک از احزاب بیش از نصف رای نیاورده است، پس حداکثر تعداد نمایندگان هر حزب ۱۴۲ نفر است. حال اگر از حزب اول ۱۴۲ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموعاً از حزب دوم و سوم ۱۴۳ نفر رای آورده‌اند، که تعداد آراء، حزب دوم از ۱ تا ۱۴۲ می‌تواند باشد (آراء حزب سوم خود به خود تعیین می‌شود). اگر از حزب اول ۱۴۱ نفر رای آورده باشند، آنگاه مجموع آراء دو حزب دیگر ۱۴۴ رای می‌شود و حزب دوم می‌تواند از ۲ تا ۱۴۲ باشد (زیرا اگر ۱ رای داشته باشد حزب سوم ۱۴۳ رای دارد که بیش از نصف است). به همین ترتیب هر بار تعداد حالات یکی کمتر می‌شود. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$142 + 141 + \dots + 1 = \frac{142 \times 143}{2} = 10153$$

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

-۱۳

$$x - 1 = yz \Rightarrow x - yz = 1 \text{ (I)}$$

$$y - 1 = zx \Rightarrow y - zx = 1 \text{ (II)}$$

$$\stackrel{I, II}{\Rightarrow} x - yz = y - zx \Rightarrow x + zx = y + yz \Rightarrow x(1+z) = y(1+z) \stackrel{z \neq -1}{\Rightarrow} x = y$$

به طریق مشابه اگر $x \neq -1$ خواهیم داشت $y=z$. پس $x=y=z$. در نتیجه $x^2 = x - 1$ که در این حالت جواب حقیقی نداریم. اگر $x = -1$ در نتیجه $x = y = -1$ پس $z = 1 = -1$ پس $z = 2$ که سه تایی $(2, -1, -1)$ در معادله صدق می‌کند. حال اگر یکی از x, y, z برابر -1 نباشد، همانند فوق تنها جواب این است که آن مجهول 2 بوده و دوتای دیگر -1 باشند. پس بدین ترتیب 3 جواب زیر را داریم: $(-1, -1, 2), (-1, 2, -1), (2, -1, -1)$ پس اگر حداقل یکی از مجهولات مخالف -1 باشد جواب‌ها به صورت فوق خواهند بود. تنها می‌ماند اینکه همه -1 باشند که این به وضوح جواب نیست. پس 3 جواب داریم.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

-۱۴

ابتدا به این توجه می‌کنیم که معادله زیر چند جواب مختلف دارد:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, x_i \geq 1$$

برای حل به این نکته دقت می‌کنیم که حل این معادله به منزله این است که k شی مشابه را به n قسمت افزایش کنیم. حال فرض کنید که این k شی کنار هم قرار گرفته‌اند حال برای افزایش این اشیاء، تعداد $n - 1$ جدا کننده بین این اشیاء قرار می‌دهیم. بین این k شی، $k - 1$ جا برای قرار دادن این جداکننده‌ها وجود دارد. پس پاسخ عبارتست از:

$$\binom{k-1}{n-1}$$

حال می‌خواهیم این 5 مهره‌ی سیاه به 3 قسمت افزایش کنیم که این کار را می‌توان به 6 حالت انجام داد. اما برای قرار دادن مهره‌های سفید می‌دانیم که این مهره‌ها را در 4 جا (قبل از قسمت اول مهره‌های سیاه، بین قسمت اول و دوم، بین قسمت دوم و سوم و بعد از قسمت سوم) می‌توان قرار داد. به طوری که حتماً بین قسمت اول و دوم و قسمت دوم و سوم، حداقل یک مهره سفید قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; x_1, x_4 \geq 1; x_2, x_3 \geq 1$$

که با شرایط مطلوب ما اندکی تفاوت دارد. برای حل این مشکل ترفندی به کار می‌گیریم:

$$x'_1 = x_1 + 1; x'_4 = x_4 + 1$$

$$\Rightarrow x'_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 7; x'_1, x_2, x_3, x'_4 \geq 1$$

که شرایط مطلوب ماست. بنابراین پاسخ مساله عبارتست از:

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$$

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

-۱۵

با توجه به اینکه عدد فقط عامل 2 دارد، پس همه 5 عدد توانی از 2 هستند. داریم:

$$2^{276} \times 2^{276} \times 2^{277} \times 2^{278} \times 2^{279} = 2^{1386}$$

$$2^{276} + 2^{276} + 2^{277} + 2^{278} + 2^{279} = 2^{276}(1 + 1 + 2 + 4 + 8) = 2^{280}$$

که بیش‌ترین گزینه است.

۱۶- گزینه‌ی [ب] صحیح است. ماگ

$$\angle MAN = \angle M'AN' = 33 \Rightarrow MN = M'N'$$

P و P' را به ترتیب وسط MN و $M'N'$ می‌نامیم و O مرکز دایره است.

$$\begin{cases} \angle MON = \angle M'ON' = 66 \\ MO = M'O \\ NO = N'O \end{cases} \Rightarrow \angle MON = \angle M'ON' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ OP \perp MN, OP' \perp M'N' \end{cases}$$

پی و ترها همگی از وسط به دایره‌ای به مرکز O مماسند.

۱۷- گزینه‌ی [ج] صحیح است. ماگ

$$\begin{aligned} c = 1 - a - b - d &\Rightarrow A = ab + bc + cd = ab + (b + d)(1 - a - b - d) \\ &= -ad + (b + d)(1 - b - d) \end{aligned}$$

از طرفی با استفاده از نابرابری حسابی هندسی داریم:

$$(a + b)(1 - b - d) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = -ad + (b + d)(1 - b - d) \leq -ad + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

پس A کم‌تر مساوی با $\frac{1}{4}$ است و به ازای $a = d = 0, b = c = \frac{1}{4}$ مقدار $\frac{1}{4}$ را اتخاذ می‌کند.

در نتیجه $\frac{1}{4}$ جواب مورد نظر است.

۱۷- گزینه‌ی [د] صحیح است. ماگ

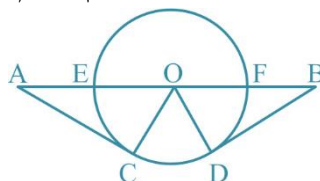
بهترین مسیر آن است که به دریاچه مماس باشد. در این حالت داریم:

$$AB = 4 \Rightarrow AO = 2, OC = 1$$

$$AC^2 = AO^2 - OC^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} OC = 1, AO = 2 &\Rightarrow OC = \frac{1}{2}AO \Rightarrow \angle OAC = 30 \Rightarrow \angle AOC = 60 \Rightarrow \angle DOB = 60 \\ &\Rightarrow \angle COD = 60 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{کمان } DC = 2\pi \times \frac{60}{360} = 2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{جواب} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$



۱۹- گزینه‌ی [ج] صحیح است. ماگ

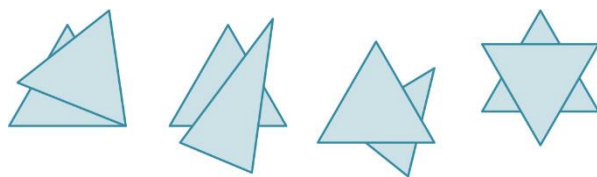
اضلاع هر مثلث شامل وترهایی می‌شود که رئوس آن‌ها روی دایره‌اند. از طرفی می‌توان هر ضلع مثلث را با تعداد اضلاعی از 10° ضلعی که

میان دو راس آن ضلع قرار دارند، مقایسه کرد. پس مثلث‌ها به صورت زیر هستند: $(1, 10, 10)$ ، $(1, 10, 20)$ ، $(1, 20, 20)$ ، $(1, 20, 30)$ ، $(1, 30, 30)$ ، $(1, 30, 40)$ ، $(1, 40, 40)$ ، $(2, 20, 20)$ ، $(2, 30, 30)$ ، $(2, 40, 40)$ ، $(3, 30, 30)$ (اعداد نشان‌گر تعداد اضلاعی از 10° ضلعی هستند که میان دو راس مثلث قرار گرفته‌اند).



گزینه‌ی [د] صحیح است.

-۲۰



اشکال فوق مثال‌هایی برای ۸ و ۱۲، ۹، ۱۰، ۱۰ ضلع می‌باشند.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

-۲۱

جعبه‌ها را از کوچک به بزرگ به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. جعبه شماره ۵ به یک صورت درون جعبه ۶ قرار می‌گیرد. حال برای قرار دادن جعبه ۴، دو حالت داریم، یکی درون جعبه ۵ و یکی بیرون آن. به همین ترتیب هر جعبه‌ای که اضافه می‌شود، یک فضا به فضاهای ممکن برای قرار دادن جعبه بعدی اضافه می‌کند. پس در کل $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ حالت داریم.

گزینه‌ی [د] صحیح است.

-۲۲

$$f(0) \leq 2 \Rightarrow b \leq 2$$

$$f(1) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a + b(I)$$

$$f(2) \leq 4 \Rightarrow 2a + b \leq 4(II)$$

$$(I), (II) \quad (II)$$

$$\Rightarrow a \leq 4 \Rightarrow 8a \leq 32 \Rightarrow 10a + b \leq 36 \Rightarrow f(10) \leq 36$$

حالت تساوی به ازای $a = 4$ و $b = -4$ حاصل می‌شود.

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

-۲۳

$$\begin{cases} \angle A = \angle C = 90^\circ \\ BE = BF \Rightarrow \triangle ABE = \triangle CBF \Rightarrow AE = CF \Rightarrow DF = DE \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\angle ABE = \angle CBF = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{4} BE$$

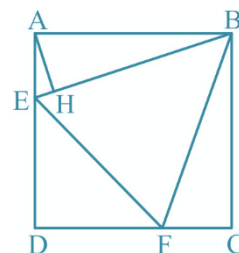
$$BE = BF = EF = l$$

$$DE = DF = \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABE} + S_{BEF} + S_{DEF}$$

$$\Rightarrow 1 = AH \cdot BE + \frac{\sqrt{3}}{4} BE^2 + \frac{1}{2} DE^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + \frac{1}{4} l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{4}{2 + \sqrt{3}}$$

$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \Rightarrow S_{BEF} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$



گزینه‌ی [الف] صحیح است.

-۲۴

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

H را پای ارتفاع A می‌گیریم

$$S_{ABCD} = AB \times AD = AH \times BD \Rightarrow AH = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AP = AC = BD = \sqrt{5}$$

$$AH^2 + PH^2 = AP^2 \Rightarrow PH = \sqrt{\frac{21}{5}}$$

$$PQ = 2PH = PQ = \sqrt{\frac{84}{5}}$$

گزینه‌ی [ج] صحیح است.

۲۵-

$$2^x + 2x^2 = y^2$$

$$x^2, y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 + 0 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$$

حال فرض کنید $x = 2^k m$ که m عددی فرد است.

$$\Rightarrow 2^{2^k m} + 2^{2k+1} m^2 = y^2$$

$$m = 1 \Rightarrow 2^{2^k} + 2^{2k+1} = y^2$$

$$(I) 2^{2^k} > 2k + 1 \Rightarrow 2^{2k+1} (2^{2^k - 2k - 1} + 1) = y^2$$

چون 2^{2k+1} و $2^{2^k - 2k - 1} + 1$ نسبت به هم اولند، پس هر دو باید مربع کامل باشند. اما 2^{2k+1} نیست.

$$(II) 2^{2^k} \leq 2k + 1 \Rightarrow k \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 2 + 2 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2 \\ k = 1 \Rightarrow 4 + 8 = y^2 \quad \text{در اعداد صحیح جواب ندارد} \\ k = 2 \Rightarrow 16 + 32 = y^2 \quad \text{در اعداد صحیح جواب ندارد} \end{cases}$$

$$m \geq 3 \Rightarrow 2^{2^k m} \geq 3 \times 2^{2^k} > 2k + 1 \quad (III)$$

$$\Rightarrow 2^{2k+1} (2^{2^k m - 2k - 1} + m^2) = y^2$$

که همانند بالا جواب نخواهد داشت (چون $2^{2^k m - 2k - 1} + m^2$ فرد است). پس ۴ تا جواب داریم.

گزینه‌ی [ب] صحیح است.

۲۶-

مرکز دایره را O می‌نامیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} OM_1 \perp AD \\ OM_2 \perp BC \Rightarrow OM_1 M_2 N, OM_2 N M_1 \text{ محاطی} \\ OM_3 \perp PQ \end{cases}$$

با توجه به این که از هر سه نقطه یک دایره می‌گذرد.

$$\Rightarrow M_1 M_2 N M_1 \text{ محاطی} \Rightarrow \angle M_1 M_2 M_1 = \angle M_1 N M_1 \Rightarrow \angle M_1 M_2 M_1 = 40^\circ$$

گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

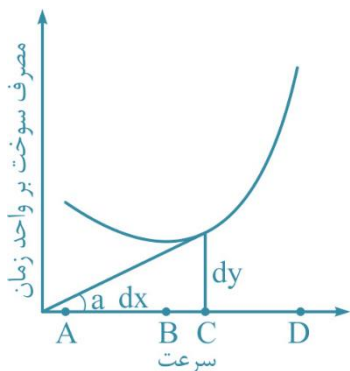
۲۷-

ابتدا ثابت می‌کنیم که این عدد حتماً متناوب است. برای این کار کفایت ثابت کنیم که دو رقم اول پس از تعدادی مرحله به تکرار می‌افتد. حال برای یافتن دو رقم اول کفایت که عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم و باقی‌مانده همان دو رقم اول خواهد بود. فرض کنید ۱۰۱ مرحله گذشته باشد. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به اینکه باقی‌مانده بر ۱۰۰ از ۰ تا ۹۹ (عدد ۱۰۰ عدد) مختلف می‌تواند باشد، پس حداقل دو عدد یکسان در این ۱۰۰ عدد پیدا می‌شود. با توجه به اینکه هر بار در عدد ثابتی ضرب می‌کنیم لذا اعداد بعدی این دو نیز برابر خواهند بود و همین‌طور دو تای بعدیشان (منظور به هنگ ۱۰۰ آنهاست) و ... پس عدد اعشاری حتماً متناوب است و با عنایت به این موضوع که این عدد اعشاری برای عدد ۲۰ متناوب مرکب و برای عدد ۱۰۰ متناوب ساده است، گزینه [هـ] صحیح خواهد بود.

۲۸- گزینه‌ی [ج] صحیح است.

دو وجه روبروی هم را در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد این وجوه یکی a و دیگری b باشد. فرض کنید اعداد چهار وجه دیگر زمانی که از وجه با عدد a به مکعب می‌نگریم، به ترتیب c, d, e, f باشد. در نتیجه مجموع اعداد رئوس روی وجه a برابر خواهد بود با $a(cd+de+ef+fc)$. به طریق مشابه مجموع اعداد رئوس روی وجه با عدد b نیز $b(cd+de+ef+fc)$ خواهد بود. پس مجموع اعداد رئوس مکعب برابر است با $(a+b)(c+e)(d+f) = (a+b)(cd+de+ef+fc) = 231$ از طرفی با توجه به اینکه 231 برابر $3 \times 7 \times 11$ است و اینکه مجموع اعداد دو وجه مقابل از ۱ بیش‌تر است، مجموع اعداد وجوه مقابل ۳ و ۷ و ۱۱ خواهد بود. پس مجموع اعداد وجوه مکعب برابر $3+7+11$ یعنی ۲۱ خواهد بود.

۲۹- گزینه‌ی [د] صحیح است.



با توجه به اینکه نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی (تانژانت زاویه) نشان‌گر مصرف سوخت بر مسافت است با عنایت به این موضوع که ما می‌خواهیم این مقدار به حداقل برسد (با توجه به شکل) بنابراین نقطه سوم بهترین نقطه می‌باشد.

۳۰- گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

سه مجموعه‌ی مورد نظر به صورت ذیل می‌باشند و هر کدام از اعداد در یکی از ۶ جای اشاره شده در شکل می‌توانند باشند.

پس پاسخ 6^5 برابر ۷۷۷۶ خواهد بود.

