



دفترچه سؤالات به همراه پاسفنامه تشریحی مرحله اول بیست و پنجمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۵

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
۲۴۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

۱. کد برگه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بنویسید، در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سؤالات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بنویسید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. در سوال‌های چهار گزینه‌ای به هر پاسخ درست ۳ نمره مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره منفی تعلق می‌گیرد. در مساله‌های کوتاه به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۱- A, B, C سه رقم متمایز از بین $\{0, 1, \dots, 9\}$ هستند و می‌دانیم که جمع روبه‌رو درست است. $A + B + C$ کدام است؟

الف) ۷ (ب) ۱۶ (ج) ۱۹ (د) ۲۱ (ه) ۲۴

CAAB
+BAA

۲- چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محورXها را قطع می‌کنند؟

الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۱۶ (د) ۲۱ (ه) ۲۴

۴, ۹, ۱۱, ۱۹, ۱۵, ۵, ۱, ۹, -۱, -۳, -۳, ۲, ۳, -۵, ۵, -۷, ۱۲, ۸, ۷, ۶, -۱۵

۳- مجموع مساحت و محیط مستطیلی 140° شده است. مساحت آن حداکثر چقدر است؟

الف) ۱۰۰ (ب) ۷۰ (ج) ۸۰ (د) ۶۰ (ه) هیچ کدام

۴- چند عدد چهاررقمی به شکل \overline{abab} وجود دارد که دقیقاً چهارده مقسوم‌علیه داشته باشد؟

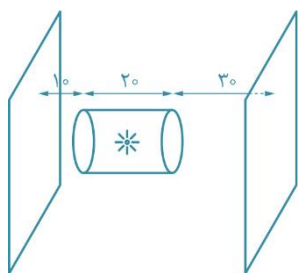
الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) چنین عددی وجود ندارد.

۵- چند عدد سه رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟

الف) ۶۴۸ (ب) ۷۲۰ (ج) ۷۲۹ (د) ۸۱۰ (ه) ۹۰۰

۶- چند خط در صفحه وجود دارد که یک مستطیل 2×5 داده شده را به دو مستطیل متشابه تقسیم کند؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵



۷- A وسط لوله‌ای استوانه‌ای شکل به طول 20 سانتی‌متر لامپی روشن است. در دو طرف لوله

دو پرده به فاصله‌های 30 و 10 سانتی‌متر قرار گرفته است. نسبت مساحت ناحیه‌های روشن روی دو پرده چند است؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۹

۸- در یک امتحان تستی 30 سؤالی، هر پاسخ صحیح چهار نمره و هر پاسخ غلط یک نمره منفی دارد. اگر نمره یکی از شرکت‌کنندگان

89 باشد، او چند سؤال را بدون پاسخ رها کرده است؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

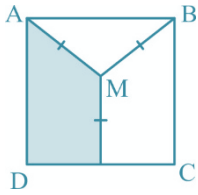
۹- حجم هشت‌وجهی‌ای که رأس‌هایش مرکزهای وجه‌های مکعبی به ضلع یک است، چند است؟

الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{1}{8}$ (ه) $\frac{1}{12}$

۱۰- کدام عدد در غربال اراتستن، برای مشخص کردن اعداد اول کوچک‌تر از 5000 ، دیرتر حذف می‌شود؟

الف) ۳۲۵۶ (ب) ۴۱۴۱ (ج) ۳۵۵۳ (د) ۳۸۰۱ (ه) ۴۱۴۵

۱۱- در شکل روبه‌رو ضلع مربع $ABCD$ ، یک است و نقطه M از رأس A ، رأس B و ضلع DC به یک فاصله است. مساحت چهارضلعی مشخص شده چند است؟



- الف) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{13}{30}$ (د) $\frac{13}{32}$ (ه) $\frac{7}{15}$

۱۲- فرض کنید $x, y, z \in [-1, 1]$ و $x + y + z = 0$. بیشترین مقدار ممکن xyz چند است؟

- الف) $\frac{1}{27}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{2}$ (ه) ۱

۱۳- $1 - 2^{\circ}$ برابر کدام گزینه است؟

- الف) ۴۲۹۴۹۶۹۲۸۵ (ب) ۴۲۹۴۹۶۴۱۵۵ (ج) ۴۲۹۴۹۶۳۳۳۵ (د) ۴۲۹۴۹۶۸۰۱۵ (ه) ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵

۱۴- به چند شکل می‌توان وجوه یک مکعب را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد. به طوری که از هر دو رنگ استفاده شود؟ دو رنگ آمیزی را که با دوران مکعب به هم تبدیل می‌شوند، یکی فرض کنید.

- الف) ۸ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۶ (ه) ۳۲

۱۵- مثلی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ مفروض است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع فاصله‌های یک نقطه درون آن مثلث با اضلاع آن چند است؟

- الف) $\frac{7}{2}$ (ب) $\frac{12}{5}$ (ج) $\frac{6}{5}$ (د) $\frac{10}{3}$ (ه) ۳

۱۶- A, B, C, D مجموعه‌هایی هستند که در روابط روبه‌رو صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = B \cap C \cup D \end{cases}$$

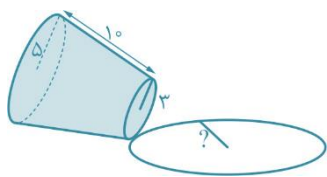
- الف) $D = \emptyset$ (ب) $C = D$ (ج) $A \subseteq B$ (د) $A = B \cup D$ (ه) $D = A \cap B$

۱۷- A ماتریسی 10×10 است که درایه‌هایش صفر یا یک هستند. می‌دانیم $A^2 = 0$. ماتریس A حداکثر چند یک دارد؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۹ (د) ۲۵ (ه) ۴۵

۱۸- به چند راه می‌توان ۱۱ خانه جدولی 2×12 را سیاه کرد که دو خانه سیاه، ضلع مشترک نداشته باشند؟

- الف) ۴۲ (ب) ۴۴ (ج) ۴۶ (د) ۴۸ (ه) ۵۰



۱۹- مخروط ناقصی به شکل روبه‌رو روی زمین می‌غلطد و به جای اولیه‌اش برمی‌گردد. اگر شعاع قاعده‌های مخروط ۳ و ۵ و طول یال آن 10° باشد، شعاع دایره‌ای که قاعده کوچک‌تر مخروط طی می‌کند چقدر است؟

- الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۱۰ (د) ۱۵ (ه) ۲۰

۲۰- معادله $\sin^2(24x) + \sin^2(32x) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۲۱- 3^4 در مبنای ده چند رقمی است؟

ماف

الف) ۱۷ (ب) ۱۸ (ج) ۱۹ (د) ۲۰ (ه) ۲۱

۲۲- فاصله نقطه‌ای روی دایره محاطی یک مربع، از دو ضلع نزدیک‌تر مربع برابر ۱ و ۲ است. طول ضلع مربع چند است؟ (دایره‌ای محاطی

ماف

دایره‌ای است که از داخل بر اضلاع مربع مماس است.)

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۲۳- تعداد جواب‌های معادله $x^2 + x + 8 = y^2$ در مجموعه اعداد طبیعی چند است؟

ماف

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۲۴- در اتاقی 5×5 حداکثر چند کاشی 1×3 می‌توان قرار داد؟

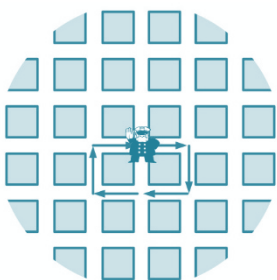
ماف

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

۲۵- A و B دو ماتریس هستند که $AB = B$ و $BA = A$. کدام گزینه برابر $(A + B)^2$ است؟

ماف

الف) $2A + 2A^2$ (ب) $4A^2$ (ج) $4A$ (د) $2(A + B)$ (ه) $A^2 + 2AB + B^2$



۲۶- پاسبانی می‌خواهد با شروع از تقاطعی که کلانتری در نبشش واقع شده است، یک ساعت در خیابان‌ها قدم بزند و در نهایت به کلانتری برگردد. اگر خیابان‌ها به شکل یک شبکه مربعی، مانند تصویر رو به

ماف

رو، باشد و طی کردن هر خیابان ده دقیقه طول بکشد، این کار به چند طریق ممکن است؟ پاسبان تنها سر تقاطع ممکن است مسیرش را تغییر دهد و ممکن است از جلوی کلانتری و یا از یک خیابان چند بار عبور کند.

الف) ۶۴ (ب) ۳۶۰ (ج) ۴۰۰ (د) ۱۲۹۶ (ه) ۴۰۹۶

۲۷- برای کدام عدد طبیعی n هیچ‌کدام از اعداد $n, 2n, 3n, \dots, 1000n$ مربع کامل نیست؟

ماف

الف) $1785 \cdot 10$ (ب) ۸۶۴۹ (ج) ۳۲۹۲ (د) ۲۶۰۷ (ه) ۲۰۳۶

۲۸- معادله $x^2 = [x^3]$ چند جواب دارد؟ ($[x]$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x)

ماف

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) بی‌نهایت

۲۹- یک مستطیل کاغذی به طول ۵ و عرض ۱ را به گونه‌ای تا می‌کنیم که دو سر یک قطر آن روی هم قرار بگیرند. مساحت ناحیه یک لایه چقدر است؟

ماف

الف) ۰ (ب) $\frac{5}{2}$ (ج) ۲ (د) $\frac{6}{5}$ (ه) $\frac{12}{5}$

۳۰- در مسابقات کشتی پهلوانی ۹ نفر دوه‌دو مسابقه داده‌اند. حداکثر چند نفر بیش از ۴ مسابقه را برده‌اند؟

ماف

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

کلید سوالات

۱	هـ د ج ب الف	۲۱	هـ د ج ب الف	۴۱	هـ د ج ب الف
۲	هـ د ج ب الف	۲۲	هـ د ج ب الف	۴۲	هـ د ج ب الف
۳	هـ د ج ب الف	۲۳	هـ د ج ب الف	۴۳	هـ د ج ب الف
۴	هـ د ج ب الف	۲۴	هـ د ج ب الف	۴۴	هـ د ج ب الف
۵	هـ د ج ب الف	۲۵	هـ د ج ب الف	۴۵	هـ د ج ب الف
۶	هـ د ج ب الف	۲۶	هـ د ج ب الف	۴۶	هـ د ج ب الف
۷	هـ د ج ب الف	۲۷	هـ د ج ب الف	۴۷	هـ د ج ب الف
۸	هـ د ج ب الف	۲۸	هـ د ج ب الف	۴۸	هـ د ج ب الف
۹	هـ د ج ب الف	۲۹	هـ د ج ب الف	۴۹	هـ د ج ب الف
۱۰	هـ د ج ب الف	۳۰	هـ د ج ب الف	۵۰	هـ د ج ب الف
۱۱	هـ د ج ب الف	۳۱	هـ د ج ب الف	۵۱	هـ د ج ب الف
۱۲	هـ د ج ب الف	۳۲	هـ د ج ب الف	۵۲	هـ د ج ب الف
۱۳	هـ د ج ب الف	۳۳	هـ د ج ب الف	۵۳	هـ د ج ب الف
۱۴	هـ د ج ب الف	۳۴	هـ د ج ب الف	۵۴	هـ د ج ب الف
۱۵	هـ د ج ب الف	۳۵	هـ د ج ب الف	۵۵	هـ د ج ب الف
۱۶	هـ د ج ب الف	۳۶	هـ د ج ب الف	۵۶	هـ د ج ب الف
۱۷	هـ د ج ب الف	۳۷	هـ د ج ب الف	۵۷	هـ د ج ب الف
۱۸	هـ د ج ب الف	۳۸	هـ د ج ب الف	۵۸	هـ د ج ب الف
۱۹	هـ د ج ب الف	۳۹	هـ د ج ب الف	۵۹	هـ د ج ب الف
۲۰	هـ د ج ب الف	۴۰	هـ د ج ب الف	۶۰	هـ د ج ب الف

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۵

- ۱- گزینه‌ی [ب] صحیح است. 
- بنابر فرض ارقام سمت چپ دو عدد CAAB و ACBC متفاوت هستند. پس لزوماً $A = C + 1$. همچنین با توجه به ردیف‌های اول و سوم از سمت راست می‌توان گفت که $A + B = 10 + C$. از ردیف دوم (از سمت راست) هم می‌توان متوجه شد که $B = 2 \times A + 1$. حال به راحتی می‌توان این سه رقم را مشخص کرد.
- ۲- گزینه‌ی [الف] صحیح است. 
- اگر a و b طول و عرض مستطیل مفروض باشد:
- $$ab + 2(a + b) = 140, (a + b)^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow$$
- $$ab + 4\sqrt{ab} \leq 140 \Rightarrow (\sqrt{ab} + 2)^2 \leq 144 \Rightarrow ab \leq 10.$$
- ۳- گزینه‌ی [ب] صحیح است. 
- اشعه‌های نوری نواحی دایره شکل روی پرده ایجاد می‌کنند که شعاع آن‌ها بنابر رابطه‌ی تالس، به دست خواهد آمد. در نتیجه شعاع دایره‌ی تشکیل شده در پرده‌ی سمت چپ برابر دو برابر شعاع استوانه و در پرده دیگر چهار برابر شعاع استوانه است.
- ۴- گزینه‌ی [الف] صحیح است. 
- می‌دانیم $abab = 101 \times ab$ و 101 عددی اول است. پس ab ، 7 مقسوم علیه دارد و بنابر رابطه‌ی تعداد مقسوم علیه‌ها (تعداد مقسوم علیه‌های عدد به شکل $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ که P_1, P_2, \dots, P_k اعدادی اول هستند برابر است با $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$) می‌توان گفت که تنها عدد 64 این خاصیت را داراست.
- ۵- گزینه‌ی [ج] صحیح است. 
- برای رقم اول 9 حالت ممکن است. برای رقم دوم هم با توجه به انتخاب رقم اول، 9 حالت ممکن است. برای رقم سوم به همین ترتیب 9 حالت ممکن است.
- ۶- گزینه‌ی [هـ] صحیح است. 
- توجه کنید که پاره‌خط واصل بین دو نقطه یک خط را هنگامی قطع می‌کند که آن دو نقطه در دو طرف آن خط حضور داشته باشند. در این سوال در دو طرف خط بودن بدین معنا است که یکی دارای مؤلفه‌ی y منفی و دیگری دارای مؤلفه‌ی y مثبت باشد.
- ۷- گزینه‌ی [د] صحیح است. 
- دو خط هستند که یکی طول و دیگری عرض را نصف می‌کنند. همچنین دو خط موازی عرض مستطیل (یکی در سمت چپ و دیگری در سمت راست خط نصف کننده‌ی طول مستطیل که طول مستطیل را به نسبت $4:1$ تقسیم می‌کنند) وجود دارند که این خاصیت را دارند.
- ۸- گزینه‌ی [ب] صحیح است. 
- اگر a تعداد پاسخ‌های صحیح و b تعداد پاسخ‌های نادرست او باشد، می‌دانیم:
- $$4a - b = 89, a + b \leq 30, a, b \in N$$
- پس تنها جواب‌های ممکن $a = 23$ و $b = 3$ است.

۹- گزینه‌ی [ب] صحیح است.

بنابر الگوریتم غربال اراتستن، عددی که کوچک‌ترین مقسوم علیه اولش از سایر گزینه‌ها بیشتر باشد، دیرتر حذف می‌شود. کوچک‌ترین مقسوم علیه اول گزینه‌ها به ترتیب برابر ۲، ۴۱، ۱۱، ۳ و ۵ است.

۱۰- گزینه‌ی [ج] صحیح است.

به وضوح در حالتی که دو تا از این اعداد مثبت هستند، حاصل ضرب منفی است، پس می‌توان فرض کرد که دو تا از این اعداد مانند X و Y منفی هستند و Z مثبت. حال می‌توان نشان داد که $xyz \leq \frac{z^3}{4}$

۱۱- گزینه‌ی [هـ] صحیح است.

توجه کنید که $2^3 \equiv 256^4 \equiv 36^2 \equiv 96 \pmod{100}$.

۱۲- گزینه‌ی [الف] صحیح است.

در حالتی که دو وجه آبی باشند، تنها دو حالت متفاوت داریم. یکی اینکه دو وجه روبه‌رو باشند و دیگری آن که دو وجه آبی مجاور باشند. به همین ترتیب نیز دو حالت برای دو وجه قرمز داریم. اگر سه وجه آبی داشته باشیم نیز دو حالت برای آن‌ها ممکن است. یکی آن که سه وجه آبی در یک رأس مشترک باشند. در این حالت سه وجه قرمز نیز در رأس روبرو این رأس مشترک هستند. یا این که دو وجه از این سه وجه روبه‌روی هم باشند و سومی بین این دو قرار بگیرد. دو حالت هم مربوط به زمانی است که تنها یک وجه آبی یا تنها یک وجه قرمز داشته باشیم.

۱۳- گزینه‌ی [د] صحیح است.

$$\begin{aligned} A \cup C = B \cup C &\Rightarrow A / C = B / C \\ A \cap C = (B \cap C) \cup D &\Rightarrow A = (A \cap C) A / C = (B / C) \cup ((B \cap C) \cup D) \\ &= B \cup D \end{aligned}$$

۱۴- گزینه‌ی [ب] صحیح است.

فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث باشد. اضلاع این مثلث در شرط فیثاغورس برای مثلث‌های قائم‌الزاویه صدق می‌کند. پس مثلث مذکور قائم‌الزاویه است. حال نقطه‌ی P را بر ضلع به طول ۳ تصویر کنید و نام نقطه را Q بگذارید. می‌توان نشان داد که مجموع فواصل Q از سه ضلع از این مجموع برای P کم‌تر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموع این فواصل برای رأس قائمه‌ی مثلث از Q کم‌تر است. پس کم‌ترین مجموع فواصل را رأس قائمه‌ی مثلث دارد.

۱۵- گزینه‌ی [ج] صحیح است.

این هشت وجهی در واقع از یک مربع به قطر ۱ و دو نقطه به فواصل $\frac{1}{4}$ از این مربع در بالا و پایین آن تشکیل شده است. در واقع اجتماع دو هرم مربع اقاعده به سطح قاعده $\frac{1}{4}$ و ارتفاع $\frac{1}{4}$ است.

۱۶- گزینه‌ی [د] صحیح است.

فرض کنید H پای عمود از M بر AB باشد. اکنون با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث BMH ، طول BM به راحتی محاسبه می‌شود. از طرفی در ذوزنقه $AMND$ مساحت برابر است با $\frac{1}{4}(1 + MN)$.

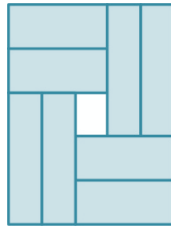
۱۷- گزینه‌ی [د] صحیح است.

بنابر شرط ماتریس A ، اگر در سطر i ام ماتریس ۱ داشته باشیم، در ستون i ام نمی‌توانیم ۱ داشته باشیم و بالعکس. فرض کنید در t سطر درایه ۱ وجود داشته باشد. پس در t ستون هیچ درایه ۱ ای وجود ندارد. پس حداکثر $t(1 - t) \leq 25$ درایه ۱ می‌توانیم داشته باشیم. برای حالت تساوی هم ماتریسی را در نظر بگیرید که تمامی خانه‌های ربع بالا سمت راست آن ۱ باشد.

۱۸- گزینه‌ی [د] صحیح است.

طبق قضیه‌ی تالس اگر شعاع خواسته شده r باشد، $\frac{3}{5} = \frac{r}{r+10}$.

۱۹- گزینه‌ی [د] صحیح است.



۲۰- گزینه‌ی [ج] صحیح است.

به وضوح اگر x ریشه‌ی این معادله باشد، $\sin(24x)$ و $\sin(32x)$ هر دو صفر باشند. به عبارتی ریشه‌ها هم به شکل $\frac{k\pi}{24}$ هستند و

هم به شکل $\frac{l\pi}{32}$. اعداد مثبت بدین شکل که از بیش‌تر نیستند، به صورت $\frac{m\pi}{8}$ هستند که m عددی صحیح است $0 \leq m \leq 8$.

۲۱- گزینه‌ی [د] صحیح است.

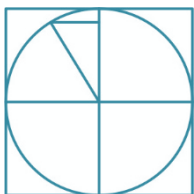
می‌دانیم $\frac{1}{9} - \frac{1}{81} = \frac{1}{81} \times 2$ و $\ln 9 > 1$ و $\log e > \frac{1}{3}$ و $\frac{467}{486} > \frac{19}{20}$ پس $\log 9 = \log e \times \ln 9 > \frac{467}{486} > \frac{19}{20}$ پس $20 \log 9 > 19$ همچنین به

وضوح $20 \log 9 < 20$ پس 9^{20} عددی 20 رقمی است.

۲۲- گزینه‌ی [ب] صحیح است.

در واقع باید ۱۱ ستون دارای خانه‌ی سیاه باشند، زیرا در ستون نمی‌توانیم دو خانه‌ی سیاه داشته باشیم. پس در اول ما یک ستون را انتخاب می‌کنیم که فاقد خانه سیاه است. اگر این ستون یکی از دو ستون کناری جدول باشد، خانه‌های دیگر دقیقاً به ۲ روش می‌توان رنگ کرد. در غیر این صورت ۴ روش مختلف می‌توان داشت.

۲۳- گزینه‌ی [د] صحیح است.



اگر نصف ضلع مربع را r فرض کنیم، فاصله‌ی این نقطه از قطر عمودی دایره برابر $r - 2$ و از قطر افقی برابر

است با $r - 1$. پس بنابر رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت: $r^2 = (r - 1)^2 + (r - 2)^2$ پس $r = 5$.

۲۴- گزینه‌ی [د] صحیح است.

$B^v = B$ به همین ترتیب $AB = B, BA = A \Rightarrow A^v = ABA = BA = A$


۲۵- گزینه‌ی [ب] صحیح است. 

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 32 = 4y^2 &\Rightarrow (2x + 1)^2 + 31 = 4y^2 \\ \Rightarrow (2y - (2x + 1))(2y + (2x + 1)) &= 31 \\ \Rightarrow 2y - (2x + 1) = 1, (2y + (2x + 1)) &= 31 \end{aligned}$$

پس تنها جواب معادله $x = 7, y = 8$ است.
توجه کنید که ۳۱ اول است.

۲۶- گزینه‌ی [د] صحیح است. 

هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت یکتا به شکل qd^k نوشت که q حاصل ضرب چند عدد اول متمایز است. به راحتی ثابت می‌شود که اگر kn مربع کامل باشد آنگاه $q|k$. در این مسئله گزینه‌ی درست است که q در آن از ۱۰۰۰ بیش‌تر باشد.

۲۷- گزینه‌ی [هـ] صحیح است. 

خط‌هایی که ایجاد می‌شود، از نقطه‌ای واقع بر طول می‌گذرد که فاصله‌ی آن از دو رأس روبرو مستطیل به یک اندازه است. برای این فاصله x داریم: $x^2 = 1 + (5 - x)^2$ پس $x = \frac{13}{5}$. حال مساحت ناحیه یک لایه متشکل از دو مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه‌ی ۱ و $\frac{12}{5}$ است.

۲۸- گزینه‌ی [ج] صحیح است. 

ما هر حرکت پاسبان را با یکی از حروف U (بالا)، D (پایین)، R (راست) و L (چپ) مشخص می‌کنیم. به وضوح باید تعداد Uها با Dها برابر باشد. همچنین تعداد Rها و Lها. پس تعداد حالات برابر است با تعداد کلمات ۶ حرفی متشکل از این حروف به گونه‌ای که در شرط فوق صدق کنند.

۲۹- گزینه‌ی [ج] صحیح است. 

اولاً به وضوح x^2 عددی صحیح است و همچنین نامنفی است. برای $x = 0.1$ که به وضوح برابری برقرار است. اگر $x > 1$
$$x^2 = \lceil x^2 \rceil = x^2 + \lceil x^2(x-1) \rceil \Rightarrow 0 \leq x^2(x-1) \leq 1$$

که تنها $\sqrt{2}$ در این شرط صدق می‌کند.

۳۰- گزینه‌ی [د] صحیح است. 

فرض کنید تعداد این افراد a باشد. A را مجموعه‌ی بازی‌هایی در نظر بگیرید که یکی از این a نفر در آن پیروز شده باشد. به وضوح در $\binom{a}{2}$ بازی که این افراد با هم انجام می‌دهند در مجموعه‌ی A هستند. همچنین این افراد در دیدار با کشتی گیران دیگر حداکثر می‌توانند $a(9-a)$ پیروزی کسب کنند. از طرفی بنابر فرض مسئله $|A| \geq 5a$. پس
$$\frac{1}{2}a(a-1) + a(9-a) \geq |A| \geq 5a \Rightarrow \frac{1}{2}(a-1) + 9 - a \geq 5$$

$$\Rightarrow a \leq 7$$

حال یک گروه ۷ نفره را در نظر بگیرید که هر کدام در گروه خود دقیقاً ۳ نفر را برده‌اند (کافی است سه دور مجزای یالی را در نظر بگیرید که گراف کامل ۷ راسی را افراز می‌کنند) و همگی آن‌ها ۲ نفر باقی‌مانده را شکست داده‌اند.