بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۲

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
۲۴۰	–	۳۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

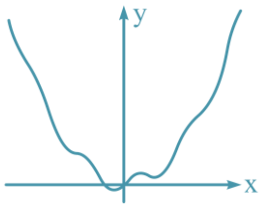
۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- نمودار روبرو مربوط به کدام یک از توابع زیر می‌باشد؟



الف) $y = \frac{x^۲}{۱۰}.\sin x$ ب) $y = \frac{(\tan x)^۲}{۱۰}$ ج) $y = \cos(\frac{x^۲}{۱۰}) - ۱$

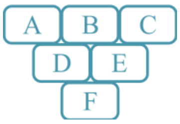
د) $y = \frac{x^۲}{۱۰} + \cos x - ۱$ هـ) $y = \frac{x^۲}{۱۰} + \sin x$

۲- معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+۱)^{۱۳۸۳} + (x+۱)^{۱۳۸۲}(x-۲) + (x+۱)^{۱۳۸۱}(x-۲)^۲ + \dots + (x+۱)(x-۲)^{۱۳۸۲} + (x-۲)^{۱۳۸۳} = ۰$$

الف) این عبارت همواره صفر است. ب) ۲ ج) ۱۳۸۳ د) ۰ هـ) ۱

۳- A، B و C سه مجموعه دل‌خواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$. کدام گزینه حتماً درست است؟



الف) $F \subseteq C$ ب) $B \subseteq F$ ج) $F \subseteq A \cap C$

د) $A \cap C \subseteq F$ هـ) $D \cap C \subseteq F$

۴- ضریب $x^۵$ در چند جمله‌ای $(۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \dots + ۱۳۸۲x^{۱۳۸۱})^۲(۱ + x^۴ + x^۸)^۲$ چند است؟

الف) ۲۰ ب) ۳۲ ج) ۴۰ د) ۶۴ هـ) ۷۰

۵- تابع دو متغیر f به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y) = y^۲ - x^۲ - ۲xy + ۲x + ۱$$

ناصر و منصور به این شکل با هم بازی می‌کنند که ابتدا ناصر یک عدد به جای x می‌گذارد و سپس منصور یک عدد به جای y قرار می‌دهد و مقدار تابع، هر چقدر که شد به عنوان امتیاز ناصر در نظر گرفته می‌شود. اگر منصور خوب بازی کند بیشترین امتیازی که ناصر می‌تواند به دست آورد چقدر است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۵}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) ۱- هـ) $-\sqrt{۲}$

۶- چند جمله‌ای $x^۳ + ax + ۱$ بر $x^۲ - ۳x + b$ بخش‌پذیر است. $a + ۲b$ چند است؟

الف) ۸ ب) $-\frac{۲۵}{۳}$ ج) ۱ د) ۰ هـ) ۳-

۷- A و B ماتریس‌هایی ۲ × ۲ به شکل زیر هستند.

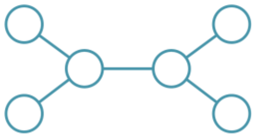
$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

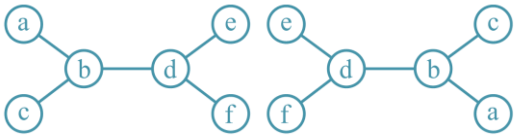
چه موقع رابطه $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ برقرار است؟

الف) همواره ب) وقتی $x + y = ۰$ ج) وقتی $x = y$

د) وقتی $xy = ۱$ هـ) هیچ‌گاه

۸- می‌خواهیم در دایره‌های شکل روبرو برچسب‌های a، b، c، d، e و f را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند. دو برچسب‌گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو حرف وجود داشته باشند که دایره‌های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیر مجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هر گاه بین آن‌ها پاره‌خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب‌گذاری‌های زیر یکسانند.





چند برچسب‌گذاری متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۸۰ ب) ۱۲۰ ج) ۹۰ د) ۶۰ هـ) ۴۵

۹- حداقل چند مستطیل ۳×۲ باید از یک صفحه شطرنجی ۸×۸ جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل ۳×۲ نتوان از شکل باقیمانده جدا کرد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۱۰- یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «خوب» می‌نامیم هرگاه جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۱۱- فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیه ما مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می‌توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۳۰ ج) ۳۵۰۰۰۰ د) ۳۷۵ هـ) ۱۰۵۰۰

۱۲- برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $p(۱) + \ldots + p(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ ب) ۲۰۷۰ ج) ۹۱۱۲۵ د) ۹۳۱۹۵ هـ) ۱۳۲۰۷۰

۱۳- دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در دو نقطه A و B متقاطع می‌باشند. طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطه A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازه وتر AM برابر ۴ باشد اندازه کدام است؟

الف) $۴ + ۳\sqrt{۳}$ ب) ۷ ج) ۸ د) $۴ + ۳\sqrt{\frac{۱۳}{۵}}$ هـ) $۴\sqrt{۵}$

۱۴- رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چندسر حرکت می‌کند. اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار چندان ساده نیست: این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر $n-$ چشم را $(n > ۱)$ قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک چشم، یک سر دو چشم، ... و یک سر $(n-۱)-$ چشم در می‌آورد!

تهمتن چو بشنید گفتار دیو برآورد چون شیر جنگی غریو

بزد بر سر دیو چون پیل مست سر و مغزش از گرز او گشت پست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ۶ و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸ ب) ۶۱ ج) ۱۶۸

د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پا درآورد! هـ) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

۱۵- توجه کنید که در این سؤال هم مثل همه سؤال‌های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است. ب) (ج) و (د) هر دو غلط‌اند. ج) (ج) صحیح است.
د) (د) صحیح است. هـ) حداقل یکی از (ج) یا (هـ) صحیح‌اند.

۱۶- یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ بـه دسـت آمـده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی <u>نیستند</u> چند تاست؟

الف) ۵۸۸ ب) ۲۹۴ ج) ۸۸۲ د) ۱۲۰۰ هـ) ۴۳۲

۱۷- در چهارضلعی $ABCD$ داریم $ABC = BDC = 90^\circ$ و $AB = CD$. اگر O محل تقاطع AC و BD باشـد و $CB = 5$ و $BO = 3$، طول CO چقدر است؟

الف) ۴ ب) $\sqrt{15}$ ج) $\sqrt{14}$ د) ۳ هـ) $3\sqrt{2}$

۱۸- فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمـل زیـر را روی ۵ ضـلعی ۱۳۸۲ بـار انجـام می‌دهیم: «نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، A در جهت خلاف حرکت عـقـربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.» در این صورت (x,y) چند می‌باشد؟

الف) (۳و۴) ب) (۱و۵) ج) (۵و۱) د) (۴و۵) هـ) (۵و۴)

۱۹- در چهارضلعی محـدب $ABCD$ نیمسـاز زاویـه ABC ضلـع CD را در نقطـه E قطـع کـرده اسـت. اگـر $\angle AEB = 90^\circ$ و $\angle CDA = \angle BCD$، کدام یک از احکام زیر همواره برقرار است؟

الف) $ABCD$ چهارضلعی محیطی است. ب) $ABCD$ چهارضلعی محاطی است. ج) $AB = AD + BC$
د) $CD = AD + BC$ هـ) $EA.EB = EC.ED$

۲۰- دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 3ab = b^3 \\ 1 + a^5 = b^5 \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) نامتناهی جواب

۲۱- بیشترین مقدار λ که برای هر $a > 0$ نامساوی زیر برقرار باشد، چند است؟

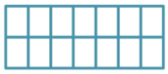
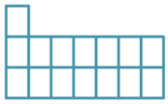
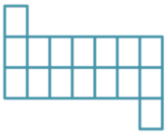
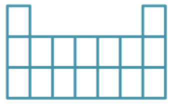
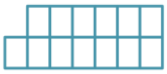
$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq \lambda\left(a + \frac{1}{a} - 2\right)$$

الف) ۰ ب) ۴ ج) ۹ د) $\frac{50}{4}$ هـ) ۶

۲۲- یک قورباغه در نقطه به مختصات $(0,1)$ از صفحه قرار دارد و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را بـه مکـان فعلـی‌اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازه فاصله همان لحظه‌اش از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطه (a,b) برسد، a چند است؟

الف) ۰ ب) ۲۵۶ ج) $-128\sqrt{2}$
د) -256 هـ) -128

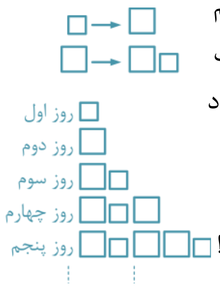
۲۳- تعداد زیادی موزاییک ۲×۱ در اختیار داریم. دو نفر به نوبت روی یک شکل شطرنجی به صورت زیر با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک موزاییک در دو خانه مجاور از شکل که قبلاً پر نشده باشد قرار می‌دهد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده بازی است. درکدام شکل نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برنده بازی باشد؟ (فرض کنید نفر اول به بهترین صورت بازی می‌کند.)

الف) 
ب) 
ج) 
د) 
هـ) 

۲۴- ساعتی داریم که طول عقربهٔ ساعت شمار و دقیقه‌شمار آن برابر است. بین ساعت ۵ تا ۶ چند بار ممکن است عقربه‌ها به گونه‌ای قرار گیرند که ساعت دقیق مشخص نشود؟ مثلاً در حالت روبه‌رو ساعت حتماً ۵ است و نمی‌تواند ۱۲:۲۵ باشد.

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱۱
د) ۱۲ هـ) ۱۳

۲۵- بر روی یک رشته بسیار باریک و دراز تعدادی سلول که بعضی کوچک و بعضی بزرگ هستند پشت سر هم قرار گرفته‌اند. بعد از گذشتن هر روز سلول‌های کوچک، بزرگ می‌شوند و سلول‌های بزرگ، یک سلول کوچک در سمت راست خود تولید می‌کنند. اگر در روز اول تنها یک سلول کوچک داشته باشیم در روز هزار و سیصد و هشتاد و دوم دنباله‌ای طویل از سلول‌ها خواهیم داشت! سه جملهٔ وسط این دنباله کدامند؟



الف)  ب)  ج) 
د)  هـ) در این روز تعداد زوجی سلول وجود دارد و دنباله، وسط ندارد!

۲۶- فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $۲^n + ۳^n$ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است. مجموع ارقام n چند است؟

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۶ د) ۵ هـ) اصلاً چنین nای وجود ندارد.

۲۷- یک عدد طبیعی را «ریشه‌دار» می‌گوییم هرگاه مجذور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

الف) تعداد اعداد ریشه‌دار نامتناهی است. ب) عدد ریشه‌دار دو رقمی وجود ندارد. ج) عدد ریشه‌دار چهاررقمی وجود ندارد.
د) عدد ریشه‌داری به شکل $9k + ۳$ وجود دارد. هـ) عدد ریشه‌داری به شکل $9k + ۴$ وجود دارد.

۲۸- از نقطه P خارج دایره (O) دو قاطع بر دایره رسم می‌کنیم. اولی در A و B و دومی در C و D دایره را قطع می‌کند. از نقطه P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر M وسط کمان AB باشد و MD و MC، به ترتیب AB را در E و F قطع نمایند و $\angle ETF = ۷۰^\circ$، $\angle FTP = ۳۰^\circ$ آن‌گاه زاویه TPE چقدر است؟

الف) ۶۰° ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۵۰° هـ) ۷۵°

۲۹- در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، طول میانه رأس B، ۳ است و $A = ۱۵۰^\circ$، طول میانه رأس A حداقل چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳۱\sqrt{۵}}{۴}$ ج) $\frac{۳}{۲}(۳ - \sqrt{۷})$ د) ۲ هـ) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۳۰- خط متغیر D و غیر گذرنده از نقاط B و C همواره در ضلع AB و AC از مثلث ABC را، به ترتیب، در دو نقطه M و N چنان قطع می‌نماید که مساحت مثلث AMN برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌های MNB و MNC می‌باشد. کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) این خط باید همواره با ضلع BC موازی باشد.

ب) $\frac{AM}{NB}=\frac{AN}{MC}$

ج) این خط باید همواره از یک نقطه ثابت در صفحه مثلث بگذرد.

د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع AH بگذرد.

هـ) این خط باید همواره بر دایره محاطی داخلی مثلث مماس باشد.

کلید سوالات

سوال	پاسخ	سوال	پاسخ	سوال	پاسخ
۱	هـ	۲۱	ج	۴۱	
۲	هـ	۲۲	هـ	۴۲	
۳	هـ	۲۳	هـ	۴۳	
۴	د	۲۴	الف	۴۴	
۵	الف	۲۵	الف	۴۵	
۶	الف	۲۶	ب	۴۶	
۷	د	۲۷	ج	۴۷	
۸	ج	۲۸	د	۴۸	
۹	الف	۲۹	ج	۴۹	
۱۰	ب	۳۰	ج	۵۰	
۱۱	هـ	۳۱		۵۱	
۱۲	ج	۳۲		۵۲	
۱۳	الف	۳۳		۵۳	
۱۴	ج	۳۴		۵۴	
۱۵	د	۳۵		۵۵	
۱۶	الف	۳۶		۵۶	
۱۷	ج	۳۷		۵۷	
۱۸	د	۳۸		۵۸	
۱۹	ج	۳۹		۵۹	
۲۰	د	۴۰		۶۰	

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

۱- **گزینه [هـ] صحیح است.**

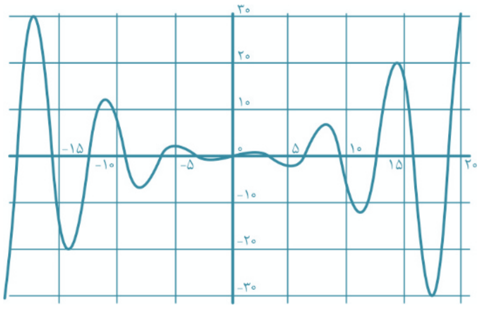
فرض کنید $y=f(x)$ تابع مورد نظر باشد. ابتدا با توجه به این که نقطه $(\circ,\circ)$ روی نمودار قرار دارد، باید $f(\circ)=\circ$ که همه گزینه‌ها این شرط را برآورده کنند. این نمودار تابعی را مشخص می‌کند که نه زوج است و نه فرد (زیرا نه نسبت به مبدأ مختصات و نه محور yها تقارن دارد.) پس گزینه‌های الف، ب و ج که به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند نمی‌توانند جواب مسئله باشند.

طبق نمودار سؤال برای هر عدد حقیقی مثبت x باید $f(x)$ مثبت باشد، اما اگر در گزینه (د) به جای x، $\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم داریم:

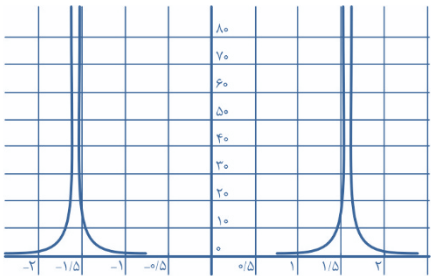
$$\frac{x^۲}{۱\circ}+\cos x-۱=\frac{\pi^۲}{۴\circ}+\cos\pi-۱=\frac{\pi^۲}{۴\circ}-۱<\circ$$

پس گزینه (د) هم نمی‌تواند جواب مسئله باشد و جواب درست گزینه (هـ) است. در زیر نمودار مربوط به چهار تابع دیگر را می‌بینید.

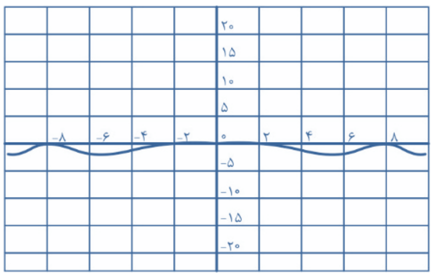
گزینه الف. $y=\frac{x^۲}{۱\circ}.\sin x$



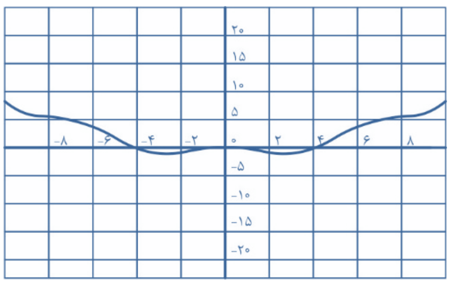
گزینه ب. $y=\frac{(\tan x)^۲}{۱\circ}$



گزینه ج. $y=\cos(\frac{x^۲}{۱\circ})-۱$

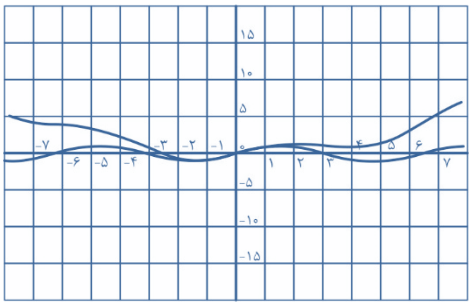


گزینه د. $y=\frac{x^۲}{۱\circ}+\cos x-۱$

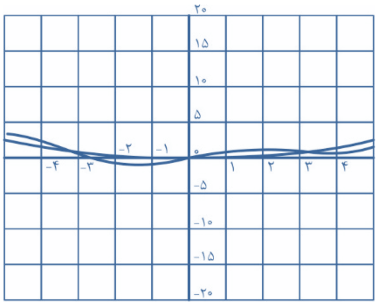


توضیح: اگر به نمودار صورت سؤال حول نقطه صفر که کسر $\frac{x^{۲}}{۲}$ در این‌جا بسیار کوچک است، دقت کنید نموداری شبیه به $\sin x$ می‌بینید.

(در شکل زیر نمودار پایینی مربوط به $y = \sin x$ و نمودار بالاتر مربوط به گزینه (هـ) است.)



توضیح: نمودار تابع $\frac{x^{۲}}{۱۰} + \sin x$ از جمع کردن نمودار دو تابع $\frac{x^{۲}}{۱۰}$ و $\sin x$ به دست می‌آید. یعنی به تعبیری کاملاً غیردقیق باید نمودار $\sin x$ روی نمودار $\frac{x^{۲}}{۱۰}$ قرار گیرد تا به نمودار $\frac{x^{۲}}{۱۰} + \sin x$ برسیم.



۲- **گزینه [هـ] صحیح است.**

صورت سؤال کاملاً ما را راهنمایی می‌کند که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. طرفین عبارت را در $(x+۱) - (x-۲) = ۳$ ضرب می‌کنیم. صرفاً برای راحتی در نوشتن از نماد a برای $x+۱$ و از b برای $x-۲$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a^{۱۳۸۴} - b^{۱۳۸۴} &= (a-b)(a^{۱۳۸۴} + a^{۱۳۸۲}b + \ldots + ab^{۱۳۸۲} + b^{۱۳۸۳}) \\ &= ۳ \times (a^{۱۳۸۳} + a^{۱۳۸۲}b + \ldots + ab^{۱۳۸۲} + b^{۱۳۸۳}) = ۰ \end{aligned}$$

پس $a^{۱۳۸۴} = b^{۱۳۸۴}$ و لذا $a = b$ و یا $a = -b$. با ترجمه این عبارت‌ها با استفاده از متغیر اصلی مسئله یعنی x، $x+۱ = x-۲$ و یا $x+۱ = ۲-x$. حالت اول به $۱ = -۲$ منجر می‌شود که امکان ندارد، اما از حالت دوم جواب $x = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید که تنها جواب مسئله است.

۳- **گزینه [هـ] صحیح است.**

$$D \cap C = (A-B) \cap C = A \cap B^c \cap C$$

$$F = D - E = D \cap E^c = (A-B) \cap (B-C)^c = (A \cap B^c) \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cap (B^c \cup C)) = A \cap B^c$$

پس به وضوح حکم مسئله برقرار است.

توضیح ۱. استفاده از نمودار ون در چنین سؤالاتی بسیار سودمند است.

توضیح ۲. $A = \{۱,۲\}$، $B = \{۲,۳\}$ و $C = \{۲\}$ مثال نقضی برای همه گزینه‌های دیگر است.

۴- **گزینه [د] صحیح است.**

برای ایجاد $x^۵$ باید از هر کدام از ۴ پرانتز مسئله یکی از جملات انتخاب شود طوری که مجموع توان‌های آن‌ها برابر ۵ باشد. از هیچ‌کدام از دو پرانتز $x^۸+x^۴+۱$، نمی‌تواند جمله $x^۸$ انتخاب شود و ضمناً نمی‌توان هم‌زمان از هر دوی آن‌ها $x^۴$ انتخاب کرد زیرا در هر دو صورت مجموع توان‌ها از ۵ بیشتر می‌شود.

اگر از یکی از دو $x^۸+x^۴+۱$، جمله‌ای $x^۴$ انتخاب شود از دیگری باید لزوماً ۱ را انتخاب کنیم و در این حالت از یکی از دو پرانتز باقی مانده و از دیگری $۲x$ باید انتخاب شود. بنابراین چهار حالت داریم که هر کدام منجر به یک جمله $۲x^۵$ و در مجموع $۸x^۵$ می‌شوند.

اگر از هر دو پرانتز $x^۸+x^۴+۱$، ۱ انتخاب شود باید از دو پرانتز دیگر دو جمله انتخاب کنیم که مجموع توان‌های آن‌ها ۵ باشد. پس در این حالت ضریب $x^۵$ برابر $۲(۱\times۶+۲\times۵+۳\times۴)=۵۶$ می‌شود. یعنی ضریب $x^۵$ در مجموع $۵۶+۸=۶۴$ است.

۵- **گزینه [الف] صحیح است.**

فرض کنید ناصر عدد α را انتخاب کرده باشد، در این صورت منصور برای این که امتیاز کم‌تری به ناصر برسد سعی می کند عددی را به جای y قرار دهد تا $f(\alpha,y)=y^۲-۲\alpha y+-\alpha^۲+۲\alpha+۱$ کمترین مقدار ممکن شود. این عبارت یک رابطه درجه دوم بر حسب y است که کمترین مقدار آن وقتی است که y برابر $-\frac{-۲\alpha}{۲}=\alpha$ باشد و این کمترین مقدار برابر است با $f(\alpha,\alpha)=-۲\alpha^۲+۲\alpha+۱$ یعنی با فرض این که منصور خوب بازی می‌کند ناصر با انتخاب α به $-۲\alpha^۲+۲\alpha+۱$ امتیاز می‌رسد. پس ناصر باید α را طوری انتخاب کند که این مقدار بیشترین مقدار ممکن خود باشد. بیشترین مقدار این عبارت زمانی است که α برابر $-\frac{۲}{۲\times(-۲)}=\frac{۱}{۲}$ و این بیشترین مقدار برابر است با $-۲(\frac{۱}{۲})^۲+۲(\frac{۱}{۲})+۱=\frac{۳}{۲}$.

۶- **گزینه [الف] صحیح است.**

با تقسیم کردن خواهیم داشت:

$$x^۳+ax+۱=(x+۳)(x^۲-۳x+b)+(a-b+۹)x+۱-۳b$$

اگر طبق فرض مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده باید متحد با صفر باشد.

$$(a-b+۹)x+(۱-۳b)=\circ\Rightarrow\begin{cases}a-b+۹=\circ\Rightarrow a=-۹+b\\ ۱-۳b=\circ\Rightarrow b=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+۲b=(-۹+b)+۲b=-۹+۳b=-۹+۳(\frac{۱}{۳})=-۹+۱=-۸$$

۷- **گزینه [د] صحیح است.**

می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها روی جمع پخش می‌شود اما خاصیت جابه‌جایی ندارد (لزوماً AB و BA با هم برابر نیستند.)، پس $(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B$ با مقایسه این رابطه با فرض مسئله می‌فهمیم $AB=BA$ و لذا

$$\left.\begin{array}{l}AB=\begin{bmatrix}۱&x\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\y&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+xy&۱+x\\۱+y&۲\end{bmatrix}\\ BA=\begin{bmatrix}۱&۱\\y&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&x\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&x+۱\\y+۱&xy+۱\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow xy+۱=۲\Rightarrow xy=۱$$

۸- **گزینه [ج] صحیح است.**

راه‌حل اول. دو دایره وسط که هر کدام با سه دایره دیگر مجاور هستند را دایره مرکزی می‌نامیم. در دو برچسب‌گذاری یکسان باید برچسب دایره‌های مرکزی یکی باشد زیرا در غیر این صورت حرفی وجود دارد که در یکی از دو برچسب‌گذاری در دایره مرکزی است و با سه حرف دیگر مجاور است اما در برچسب‌گذاری دیگر تنها با یک حرف مجاور است.

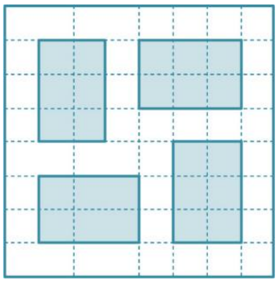
بنابراین برای مشخص کردن یک برچسب‌گذاری ابتدا به $C(۶,۲)=\frac{۶!}{۲!\times ۴!}=۱۵$ حالت دو حرف دایره‌های مرکزی را انتخاب می‌کنیم، سپس دو حرف از چهار حرف باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم که مجاور حرفی باشد که زودتر در الفبا ظاهر می‌شود (a زودتر از b، b زودتر از c و ... ظاهر می‌شود.) این کار به $c(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!\times ۲!}=۶$ حالت امکان‌پذیر است. دو حرف باقی‌مانده هم در دو دایره باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس در کل $۹۰=۶\times ۱۵$ برچسب‌گذاری داریم.

راه‌حل دوم: اگر فرض کنیم هر دو برچسب‌گذاری با هم متفاوت هستند، تعداد کل برچسب‌گذاری‌ها $۷۲۰=۶!$ تا می‌شود. برای یک برچسب‌گذاری خاص مثل شکل زیر تعداد برچسب‌گذاری‌هایی که طبق تعریف مسئله با آن یکسان هستند می‌شماریم.

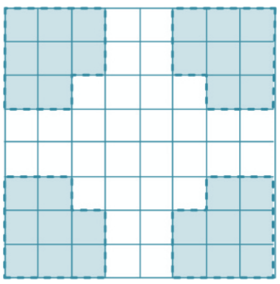
در هر برچسب‌گذاری یکسان با این برچسب‌گذاری باز هم حرف‌های a و b باید در دایره‌های مرکزی باشند. پس بسته به این که کدام حرف سمت چپ قرار می‌گیرد دو حالت داریم. در هر کدام از حالت‌ها برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره a دو حالت و برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره b هم دو حالت داریم. پس در کل ۸ برچسب‌گذاری مشابه با این برچسب‌گذاری وجود دارد (با احتساب خودش). با توجه به این که با استدلال مشابه همین هر برچسب گذاری ۸ برچسب‌گذاری مشابه دارد، تعداد کل برچسب‌گذاری‌های متفاوت $۹۰=\frac{۷۲۰}{۸}$ است.

۹- **گزینه [الف] صحیح است.**

شکل زیر چهار مستطیل ۲×۳ را در جدولی ۸×۸ مشخص می‌کند، طوری که هیچ مستطیل دیگری در جدول جای نگیرد.



حال ادعا می‌کنیم به هر صورت که سه مستطیل ۲×۳ در جدول قرار دهیم، می‌توان یک مستطیل دیگر هم در جدول قرار داد. به چهار شکلی که در گوشه جدول زیر مشخص هستند دقت کنید. هر مستطیل ۲×۳ حداکثر با یکی از این چهار شکل گوشه‌ای خانه مشترک دارد. پس اگر تنها سه مستطیل داشته باشیم یکی از این گوشه‌ها هست که هیچ‌کدام از خانه‌های آن پوشیده نشده است، و به وضوح در این شکل یک مستطیل ۲×۳ قرار می گیرد.



۱۰- **گزینه [ب] صحیح است.**

ادعا می‌کنیم هر عدد طبیعی خوب مثل n اول است. اگر این طور نباشد مقسوم‌علیه مثل a دارد که $1 < a < n$. طبق فرض مسئله

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid a+۱, ۷ \mid n+۱ \Rightarrow ۷ \mid a+n+۲ \\ \\ ۷ \mid a+n \end{array}\right\} \Rightarrow ۷ \mid ۲$$

که این یک تناقض است. حال یک عدد اول p خوب است اگر $۷ \mid p+۱$، که اعداد اول این چنینی کم‌تر از ۱۰۰، تنها $\{۱۳,۴۱,۸۳,۹۷\}$ هستند.

۱۱- **گزینه [هـ] صحیح است.**

اگر $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ تجزیه n به عوامل اول باشد، $S(n)$ را برابر مجموع $a_1+a_2+\dots+a_k$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n که در فهرست ظاهر می‌شود، $S(m)$ فرد است. ابتدا تنها اعداد اول در فهرست هستند و برای هر عدد اول p، $S(p)=۱$ و فرد است. برای این منظور ادعا می‌کنیم در هر گام این فرد بودن حفظ می‌شود. فرض کنید همه اعدادی که تا یک مرحله در فهرست قرار دارند فرد هستند و در مرحله بعدی با استفاده از سه عدد a، b و c که در فهرست قرار دارند، عددی abc را اضافه می‌کنیم. می‌دانیم $S(abc)=S(a)+S(b)+S(c)$، حال چون $S(a)$، $S(b)$ و $S(c)$ فرد هستند، $S(abc)$ هم فرد می‌شود.

حال باید دید برای اعداد هر گزینه مقدار S چقدر است.

$$S(۱۰۰۰)=S(۲^۳\times ۵^۳)=۶$$
$$S(۳۳۰)=S(۲\times ۳\times ۵\times ۱۱)=۴$$
$$S(۳۵۰۰۰۰)=S(۲^۴\times ۵^۵\times ۷)=۱۰$$
$$S(۳۷۵)=S(۳\times ۵^۳)=۴$$
$$S(۱۰۵۰۰)=S(۲^۲\times ۳\times ۵^۳\times ۷)=۷$$

پس تنها گزینه (هـ) می‌تواند صحیح باشد. با فرآیند زیر نشان می‌دهیم که با در هر گام با استفاده از اعداد اول و عدد به دست آمده در گام قبلی می‌توان به عدد ۱۰۵۰۰ در فهرست رسید.

$$۲,۳,۵ \to ۳۰,\quad ۳۰,۲,۵ \to ۳۰۰,\quad ۳۰۰,۵,۷ \to ۱۰۵۰۰$$

توضیح: با فرآیندی شبیه بالا می‌توان نشان داد غیر از اعداد اول، تنها اعداد طبیعی nای در فهرست ظاهر می‌شود که حداقل سه عامل اول داشته باشد و ثانیاً $S(n)$ فرد باشد.

۱۲- **گزینه [ج] صحیح است.**

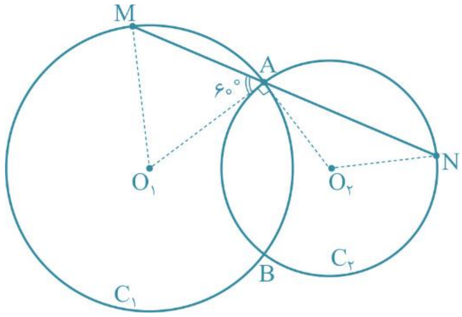
محاسبه این حاصل جمع را با توجه به تعداد ارقام به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.

$$\sum_{n=1}^{9} p(n)=\sum_{i=1}^{9} i=۴۵$$
$$\sum_{n=10}^{99} p(n)=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=0}^{9}(i\times j)=(\sum_{i=1}^{9} i)(\sum_{i=0}^{9} j)=(\sum_{i=1}^{9} i)^2=۴۵^۲$$
$$\sum_{n=100}^{999} p(n)=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=0}^{9}\sum_{k=0}^{9}(i\times j\times k)=(\sum_{i=1}^{9} i)(\sum_{i=0}^{9} j)(\sum_{k=0}^{9} k)=(\sum_{i=1}^{9} i)^3=۴۵^۳$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{999} p(n)=۴۵+۴۵^۲+۴۵^۳=۹۳۱۹۵$$

۱۳- **گزینه [الف] صحیح است.**



با توجه به شکل بالا می‌بینیم که طول AM طبق فرض مسئله برابر ۴ است. از طرف دیگر $MO_۱$ و $AO_۱$ که شعاع‌های دایره $C_۱$ هستند، طولی برابر ۴ دارند، پس مثلث $AMO_۱$ متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle MAO_۱ = ۶۰^\circ$. به علاوه طبق قضیه فیثاغورس مثلث $AO_۱O_۲$ هم قائم‌الزاویه است. $(۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲)$

بنابراین زاویه $\angle NAO_۲$ در مثلث متساوی‌الساقین $AO_۲N$ برابر ۳۰ درجه است و لذا با یک محاسبه ساده نتیجه می‌شود که $AN = ۳\sqrt{۳}$ و بنابراین $MN = MA + AN = ۴ + ۳\sqrt{۳}$.

۱۴- **گزینه [ج] صحیح است.**

فرض کنید a_k تعداد ضربات لازم برای از بین بردن یک سر با k چشم باشد. در این صورت $a_۱ = ۱$، ضمناً اگر $k > ۱$ با یک ضربه به این سر، باید تمام سرهای جدید را از بین ببرد و از آن‌جا که برای هر $i < k$ دیو یک سر i چشم درآورده است به a_i ضربه برای از بین بردن این سر احتیاج دارد. پس

$$a_k = a_{k-۱} + a_{k-۲} + \ldots + a_۱ + ۱$$

از آنجا که $a_۱ = ۱$، با استفاده از رابطه‌های بالا می‌فهمیم $a_۲ = ۲$، $a_۳ = ۴$ و با استفاده از استقرا به راحتی دیده می‌شود که $a_k = ۲^{k-۱}$.

پس برای از بین بردن یک سر k چشم، $۲^{k-۱}$ ضربه نیاز است.

سرهای دیو به ترتیب ۴، ۶ و ۸ چشم دارند، پس برای از بین بردن کامل دیو به

$$a_۴ + a_۶ + a_۸ = ۲^۳ + ۲^۵ + ۲^۷ = ۸ + ۳۲ + ۱۲۸ = ۱۶۸$$

ضربه نیاز است.

۱۵- **گزینه [د] صحیح است.**

در زیر بررسی می‌کنیم که اگر هر کدام از گزینه‌ها درست باشند چه می‌شود:

الف. این امکان ندارد زیرا در صورت درست بودن (الف) باید (ب) هم درست باشد (آنچه (الف) می‌گوید) که ممکن نیست.

ب. اگر (ب) درست باشد، چون تنها یک گزینه درست داریم باید (الف) غلط باشد، اما غلط بودن (الف) به معنی غلط بودن (ب) هست. پس این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.

ج. اگر (ج) درست باشد، گزینه (هـ) به ناچار غلط است، اما غلط بودن گزینه (هـ) یعنی هیچ‌کدام از (ج) و (هـ) درست نیستند که با فرض اولیه تناقض دارد. پس این گزینه هم نمی‌تواند گزینه درست باشد.

د. اگر (د) درست باشد. گزینه (الف) که بیان می‌کند (ب) صحیح است، غلط می‌شود. گزینه (ب) که بیان می‌کند (ج) و (د) هر دو غلط هستند به خاطر فرض درستی (د) غلط می‌شود گزینه (ج) که بیان می‌کند (ج) غلط است هم غلط می‌شود. درستی گزینه (د) تناقضی با خودش ندارد. در مورد گزینه (هـ)، غلط بودن آن نتیجه می‌دهد که (ج) و (هـ) باید هر دو غلط باشند که از قضا این درست است. پس گزینه (د) باید گزینه صحیح باشد.

هـ درستی (هـ) نتیجه می‌دهد (ب) غلط است و لذا باید یکی از (ج) و (د) درست باشند که این طور نیست پس این گزینه هم غلط است.

۱۶- **گزینه [الف] صحیح است.**

برای این که عدد طبیعی چهاررقمی $\overline{xyzt}$ مضرب ۵ باشد باید $t \in \{۰,۵\}$. به علاوه اگر یکی از اعداد x، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ مضرب سه باشند این عدد تقسیمی می‌شود. بنابراین عدد $\overline{xyzt}$ غیرتقسیمی است اگر $t \in \{۰,۵\}$ و $\overline{x}$، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ بر سه بخش‌پذیر نباشند. معادله x، $x+y$ و $x+y+z$ بر سه بخش‌پذیر نباشد. (یک عدد طبیعی بر ۳ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.) بنابراین می‌توان از روی باقی‌مانده تقسیم x، y و z تشخیص داد که یک عدد تقسیمی هست یا نه. با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌های x، yو z می‌تواند داشته باشد می‌بینیم که تنها حالت‌های زیر منجر به یک عدد غیرتقسیمی می‌شوند.

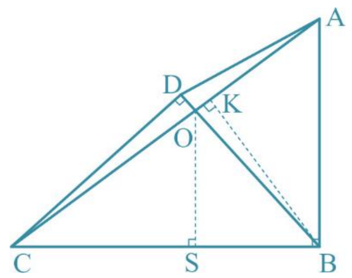
باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۳	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
باقی‌مانده تقسیم y بر ۳	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۲	۲
باقی‌مانده تقسیم z بر ۳	۰	۱	۰	۲	۰	۲	۰	۱
تعداد حالت‌ها برای x	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای y	۴	۴	۳	۳	۴	۴	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای z	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳
تعداد حالت‌ها	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷

با توجه به این که برای t هم دو حالت داریم، تعداد کل اعداد مضرب ۵ غیرتقسیمی ۵۸۸ تا است.

$$۲(۲۷+۳۶+۳۶+۴۸+۲۷+۳۶+۳۶+۴۸)=۵۸۸$$

۱۷- **گزینه [ج] صحیح است.**

از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم و پای این عمود را K می‌نامیم. در این صورت $\angle CDB = \angle CKB$ و لذا چهارضلعی $CDKB$ محاطی است و در نتیجه دو مثلث ODC و OKB متشابه هستند. بنابراین



$$\frac{DC}{KB}=\frac{CO}{OB}=\frac{CO}{۳}\Rightarrow CO=۳\frac{DC}{KB}=۳\frac{AB}{KB}(*)$$

از طرف دیگر دو مثلث AKB و ABC هم متشابه هستند و لذا

$$\frac{AB}{KB}=\frac{AC}{BC}=\frac{AC^{*}}{۵}\Rightarrow CO=\frac{۳}{۵}AC$$

حال از O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را S می‌نامیم. OS و AB هر دو بر BC عمود هستند و لذا با هم موازی‌اند. بنابراین طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{CO}{AC}=\frac{CS}{AB}\Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{CS}{۵}\Rightarrow CS=۳, BS=۲$$

و در نهایت با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه OBS و OSC خواهیم داشت:

$$OC^{۲}=OS^{۲}+SC^{۲}=BO^{۲}-BS^{۲}+SC^{۲}=۹-۴+۹=۱۴$$

و بنابراین $OC=\sqrt{۱۴}$.

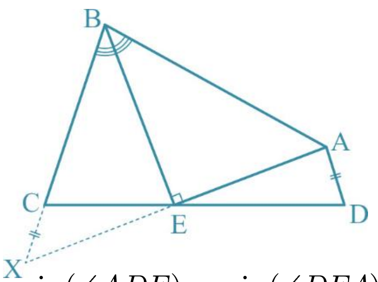
۱۸- **گزینه [د] صحیح است.**

با یک بررسی ساده می‌بینیم که ترکیب اعمال گفته شده در صورت مسئله در حقیقت همان دوران ۷۲ درجه ساعت‌گرد با مرکز مبدأ است و بنابراین انجام این عمل برای ۱۳۸۲ مرحله معادل دورانی به اندازه ۷۲×۱۳۸۲ درجه است. اما می‌دانیم که دوران ۳۶۰ درجه و مضارب ۳۶۰ درجه همان دوران صفر درجه است. پس

$$۱۳۸۲ \times ۷۲ = ۱۳۸۰ \times ۷۲ + ۲ \times ۷۲ = (۱۳۸ \times ۲) \times ۳۶۰ + ۱۴$$

کل این عمل دورانی ۱۴۴ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و لذا $x = ۴$ و $y = ۵$ است.

۱۹- **گزینه [ج] صحیح است.**



AE را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطه X قطع کند. در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه AEB و XEB به حالت وتر و یک زاویه $(\angle ABE = \angle XBE)$ با هم برابر هستند. و در نتیجه $AE = XE(*)$ و $AB = BX(**)$ حال با استفاده از قضیه سینوس‌ها در مثلث‌های XEC و ADE داریم:

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle DEA)}{AD}, \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

با توجه به این که $\angle ADE = \angle BCE$، دو زاویه $\angle ADE$ و $\angle XCE$ مکمل هستند و در نتیجه سینوس برابر دارند. این موضوع و $*$ نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} \Rightarrow \frac{\sin(\angle DEA)}{AD} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

اما دو زاویه $\angle XEC$ و $\angle DEA$ متقابل به رأس هستند و لذا سینوس برابر دارند. بنابراین $AD = XC$ و

$$(**) \Rightarrow AB = BX = BC + XC = BC + AD$$

که همان چیزی است که گزینه (د) به آن اشاره می‌کند.

۲۰- **گزینه [ج] صحیح است.**

طبق رابطه اول داریم:

$$a^۳ + (-b)^۳ + ۱^۳ = ۳a(-b)(۱)$$

این یعنی مجموع مکعب‌های سه عدد برابر حاصل‌ضرب آن‌ها شده است. طبق اتحاد اویلر این نتیجه می‌دهد این سه عدد با هم برابر هستند و یا این که مجموع آن‌ها برابر صفر است. اگر $a = -b = ۱$، $۱ + a^۵ = ۲$ در حالی که $b^۵ = -۱$ پس این حالت امکان ندارد و $a - b + ۱ = ۰$. معادلاً $b = a + ۱$. حال اگر این نتیجه را در رابطه دوم جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$۱ + a^۵ = (۱ + a)^۵ \Rightarrow (۱ + a)((۱ + a)^۴ - (a^۴ - a^۳ + a^۲ - a + ۱)) = ۰$$
$$(۱ + a)^۴ - (a^۴ - a^۳ + a^۲ - a + ۱) = ۵a^۳ + ۵a^۲ + ۵a = ۵a(a^۲ + a + ۱)$$
$$\Rightarrow ۵a(a + ۱)(a^۲ + a + ۱) = ۰$$

از آنجا که $a^۲ + a + ۱ > ۰$. تنها جواب‌های معادله اخیر $a = ۰$ و $a = -۱$ هستند که به ترتیب منجر به $b = ۱$ و $b = ۰$ می‌شوند.

پس این دستگاه در مجموع دو جواب دارد.

۲۱- **گزینه [ج] صحیح است.**

دقت کنید که $a+\frac{1}{a}-2=(\frac{a-1}{\sqrt{a}})^2$ ، $a^3+\frac{1}{a^3}-2=(\frac{a^3-1}{a\sqrt{a}})^2$. پس:

$$a^3+\frac{1}{a^3}-2\geq\lambda(a+\frac{1}{a}-2)\Leftrightarrow(\frac{a^3-1}{a\sqrt{a}})^2-\lambda(\frac{a-1}{\sqrt{2}})^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(\frac{a-1}{\sqrt{a}})^2((\frac{a^2+a+1}{a})^2-\lambda)\geq 0\Leftrightarrow(\frac{a^2+a+1}{a})^2\geq\lambda$$

یعنی باید بزرگ‌ترین مقدار λ را بیابیم که رابطه بالا را برآورده کند. این یعنی باید کمترین مقدار عبارت $(\frac{a^2+a+1}{a})^2$ را پیدا کنیم.

$$(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^2\Rightarrow a+\frac{1}{a}\geq 2\Rightarrow\frac{a^2+a+1}{a}=a+\frac{1}{a}+1\geq 3\Rightarrow(\frac{a^2+a+1}{a})^2\geq 3^2=9$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای λ، ۹ است.

۲۲- **گزینه [هـ] صحیح است.**

منظور از زاویه قورباغه، زاویه‌ای است که خط واصل بین قورباغه با جهت مثبت محور y می‌سازد. دقت کنید که زاویه را با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. در هر حرکت جدید زاویه قورباغه ۴۵ درجه افزایش پیدا می‌کند، پس بعد از ۱۵ مرحله قورباغه زاویه قورباغه $15\times 45^\circ=315^\circ$ می‌شود و بنابراین قورباغه روی قسمتی از خط $y=-x$ که درون ربع دوم مختصات قرار دارد، خواهد بود.

به علاوه اگر فاصله قورباغه تا مبدأ مختصات بعد از گام nام را d_n بنامیم. d_{n+1} طول وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی است که طول ساق آن برابر d_n است. بنابراین $d_{n+1}=\sqrt{2}d_n$ پس:

$$d_{15}=\sqrt{2}.d_{14}=(\sqrt{2})^2d_{13}=\ldots=(\sqrt{2})^{15}d_0=(\sqrt{2})^{15}=2^7\sqrt{2}=128\sqrt{2}$$

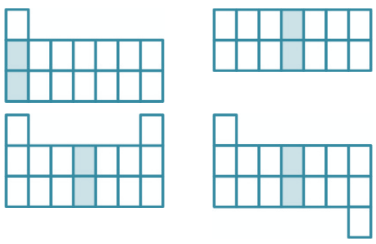
با توجه به این که (a,b) روی خط $y=-x$ قرار دارد، $b=-a>0$ و

$$2^{15}=(2^7\sqrt{2})^2=d_{15}^2=a^2+b^2=2a^2\Rightarrow a=-2^7=-128$$

توضیح: می‌توان با اندکی تلاش به دست آورد که اگر قورباغه در خانه (x,y) قرار داشته باشد، بعد از جهش از این خانه با شیوه‌ای که در صورت سؤال بیان شده است به خانه $(x+y,y-x)$ می‌رود. (در حقیقت بردار (x,y) با دوران ۹۰ درجه آن در جهت ساعت‌گرد یعنی $(y,-x)$ جمع می‌شود.)

۲۳- **گزینه [هـ] صحیح است.**

ادعا می‌کنیم در گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نفر اول همواره می‌تواند برنده بازی باشد. به این صورت که در هر کدام از این چهار گزینه مطابق شکل زیر با قرار دادن این کاشی زمین بازی شکلی است که دارای یک خط تقارن یا یک مرکز تقارن است و به علاوه در این زمین جدید نفر دوم شروع‌کننده بازی است. حالا نفر اول در هر گام قرینه خانه‌هایی که نفر دوم با یک کاشی پر کرده است را با یک کاشی جدید پر می‌کند. با این نحوه بازی اگر نفر دوم بازی کند، نفر اول حتماً می‌تواند حرکت بعد از آن را هم انجام دهد و لذا نفر اول نمی‌تواند بازنده باشد و بنابراین حتماً برنده است.

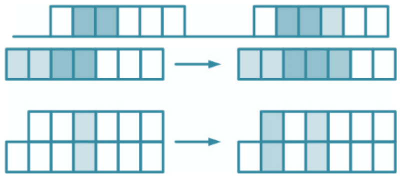


حال روشی ارائه می‌دهیم که نفر دوم می‌تواند با این روش در گزینه (هـ) برنده بازی باشد.

اگر نفر اول یک کاشی افقی را در جدول قرار دهد طوری که شامل تک‌خانه‌های پایین چپ جدول نباشد، نفر دوم یک کاشی افقی را دقیقاً پایین یا بالای کاشی نفر اول قرار می‌دهد. (اگر نفر اول در ردیف پایین گذاشته باشد، نفر دوم در ردیف بالا می‌گذارد و بالعکس.)

در زیر شکل سمت چپ حرکت نفر اول و شکل سمت راست حرکت نفر دوم را تصویر می‌کند. خانه‌های مشکی رنگ هم خانه‌هایی را نشان می‌دهند که قبلاً با کاشی پر شده‌اند.

اگر نفراول یک کاشی عمودی در جدول قرار دهد، یا این که یک کاشی افقی را مطابق شکل زیر طوری قرار دهد که تک‌خانه پایین سمت چپ جدول را بپوشاند، نفر دوم یک کاشی عمودی را در اولین ستون از سمت چپ که کاملاً خالی باشد قرار می‌دهد.



وقتی نفر اول و دوم یک دور بازی خود را انجام دهند، دو ستون از ستون‌های دوتایی جدول غیرقابل استفاده می‌شود، اگر نفر اول یک بار از حرکت‌های دوم استفاده کند، تک‌ستون یک خانه‌ای هم غیرقابل استفاده می‌گردد. بنابراین در هر دو بازی هر دو نفر اول و دوم ۲ ستون از شش ستون کامل جدول (غیر از تک‌ستون ناقص) غیرقابل استفاده می‌شود. بنابراین با ادامه این روند به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول نتواند بازی را ادامه دهد.

۲۴- ماخ گزینه [الف] صحیح است.

فرض کنید ساعت ۵ و x دقیقه باشد. در این صورت زاویه عقربه دقیقه‌شمار نسبت به نقطه صفر (همان ۱۲)، $\frac{x}{۶۰} \times ۳۶۰ = ۶x$ درجه و زاویه عقربه ساعت‌شمار برابر $۵ \times ۳۰ + \frac{x}{۶۰} \times ۳۰ = ۱۵۰ + \frac{x}{۲}$ درجه باشد. حال اگر در ساعت a و b دقیقه عقربه‌ها در وضعیت مشابهی قرار داشته باشند، در این صورت:

$$
\begin{aligned}
&۳۰a + \frac{b}{۲} = ۶x \Rightarrow ۶ \mid \frac{b}{۲} \Rightarrow ۱۲ \mid b \\
&۶b = ۱۵۰ + \frac{x}{۲} \Rightarrow ۶ \mid \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۱۲k \, (۰ \le k \le ۵) \\
&\Rightarrow ۶b = ۱۵۰ + ۶k \Rightarrow b = ۲۵ + k
\end{aligned}
$$

با توجه به این که b بر ۱۲ بخش‌پذیر است، باید $k+۱$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد که برای $k = ۰, ۱, \dots, ۵$ امکان ندارد.

۲۵- ماخ گزینه [الف] صحیح است.

رشته مرحله iام را با A_i نمایش می‌دهیم. هم‌چنین منظور ما از نماد A_iA_j این است که رشته مربوط به A_i در سمت چپ رشته A_j قرار گرفته است. به طور مثال $A_۳ = A_۲A_۱$

به استقرا نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی m، $A_{۳m+۲} = A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}A_{۳m-۱}A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}$ (با اندکی بازی کردن برای رسیدن به $A_۵$ و سپس $A_۸$ از روی $A_۵$ و با توجه به این که باقی‌مانده تقسیم ۱۳۸۲ بر ۳ برابر ۲ است می‌توان این رابطه را حدس زد.)

برای حالت $m = ۱$ که حکم به وضوح برقرار است. $(A_۵ = A_۲A_۱A_۲A_۲A_۱)$

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، یعنی:

$$A_{۳k+۲} = A_{۳k-۱}A_{۳k-۲}A_{۳k-۱}A_{۳k-۱}A_{۳k-۲}$$

حال اگر باکتری‌ها سه مرحله رشد کنند به اندیس هر A_nای سه واحد اضافه می‌گردد. پس

$$A_{۳(k+۱)+۲} = A_{۳k+۵} = A_{۳k+۲}A_{۳k+۱}A_{۳k+۲}A_{۳k+۱}A_{۳k+۲}$$

و حکم ثابت می‌شود. حال از آنجا که تعداد باکتری‌های دو رشته $A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}$ و $A_{۳m-۲}A_{۳m-۱}$ یکسان و برابر مجموع تعداد باکتری‌های رشته‌های $A_{۳m-۱}$ و $A_{۳m-۲}$ است، سه باکتری وسطی مربوط به $A_{۳m+۲}$ همان سه باکتری وسطی مربوط به $A_{۳m-۱}$ است و با استدلال مشابه سه باکتری وسطی $A_{۳m-۱}$ همان سه باکتری وسطی $A_{۳m-۴}$ است. با ادامه همین فرآیند می‌فهمیم که سه باکتری وسطی $A_{۳m+۲}$ همان سه باکتری وسطی $A_۵$ است. پس با توجه به این که $۱۳۸۲ = ۳ \times ۴۶۰ + ۲$ گزینه (الف) درست است.

۲۶- ماخ گزینه [ب] صحیح است.

ابتدا دقت کنید که n باید عددی فرد باشد. زیرا اگر n بر ۲ بخش‌پذیر شود:

$$۰ \equiv ۲^n + ۳^n \equiv ۲^n + (-۲)^n \equiv ۲^n + ۲^n \equiv ۲^{n+۱} \text{(به پیمانه ۵)}$$

که امکان ندارد. حال برای $n \geq ۳$ داریم: (حالت $n = ۱$ و $n = ۲$ به وضوح جواب نیستند.)

(دقت کنید که همه روابط زیر بالا به پیمانه ۱۲۵ هستند.)

$$۰ \equiv ۲^n + ۳^n \equiv ۲^n + (۵-۲)^n \equiv ۲^n + \binom{n}{n}۵^n(-۲)^۰ + \cdots + ۲^n + \binom{n}{n}۵^n(-۲)^{n-۱} + \binom{n}{۰}۵^۰(-۲)^n$$

$$\equiv ۲^n - \frac{n(n-۱)}{۲}۵^۲ \times ۲^{n-۲} + ۲^{n-۱} \times ۵ \times n - ۲^n \equiv ۲^{n-۳}(-۲۵n^۲ + ۴۵n)$$

حال با استفاده از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$۱۲۵ \mid ۲^{n-۳} \times ۵n(۵n-۹) \Rightarrow ۲۵ \mid ۲^{n-۳}n(۵n-۹)$$

حال با توجه به این که $(۵,۲) = ۱$ و $(۵,۵n-۹) = (۵,-۹) = (۵,۱) = ۱$ و با به کارگیری لم اقلیدس نتیجه می‌شود که باید n بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد. کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۲۵ خودش است که مجموع ارقامش برابر ۷ می‌باشد. پس گزینه (ب) صحیح است.

۲۷- ماخ گزینه [ج] صحیح است.

اولاً فرض کنید $۱۰^{k-۱} \leq n < ۱۰^k$ یک عدد ریشه‌دار k رقمی باشد. در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-۱} \ldots a_۱}$. حال داریم:

$$۱۰^{k-۱} \leq n = (a_k + a_{k-۱} + \ldots + a_۱)^۲ < (۱۰k)^۲ \Rightarrow ۱۰^{k-۳} < k^۲$$

اما به سادگی به کمک استقرا می‌توان نشان داد که اگر k بزرگ‌تر از ۴ باشد، $۱۰^{k-۳} \geq k^۲$ و لذا عدد ریشه‌دار با بیش از ۴ رقم نداریم و بنابراین تعداد اعداد ریشه‌دار باید متناهی باشد.

حال ادعا می‌کنیم عدد ریشه‌دار ۴ رقمی هم وجود ندارد. اگر $n = \overline{abcd}$ یک عدد ریشه‌دار چهاررقمی باشد، این یعنی $۱۰۰۰ \leq n = (a+b+c+d)^۲ < ۴۰^۲ = ۱۶۰۰$ پس $a = ۱$ و اگر a برابر یک باشد، باید داشته باشیم $۱۰۰۰ \leq n = (۱+b+c+d)^۲ < (۱+۱۰+۱۰+۱۰)^۲ = ۳۱^۲ = ۹۶۱$ که امکان ندارد. پس عدد ریشه‌دار چهاررقمی هم نداریم.

اما به وضوح ۸۱ یک عدد ریشه‌دار دو رقمی است.

به علاوه دقت کنید که می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۹ با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ با هم برابر هستند. اگر مجموع ارقام n را با $S(n)$ نمایش دهیم، n ریشه‌دار است اگر $n = S(n)^{۲}$. پس باید

$n \equiv S(n) \equiv n \equiv S(n)^{۲} \equiv n^{۲}$ (به پیمانه ۹)

پس باید $۹ \mid n(n-۱)$، با توجه به این که n و $n-۱$ هر دو نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند این تنها در صورتی امکان دارد که $۹ \mid n$ یا $۹ \mid n-۱$. یعنی تمام اعداد ریشه‌دار به شکل $۹k$ و $۹k+۱$ هستند و غیر از این دو صورت عدد ریشه‌داری نداریم.

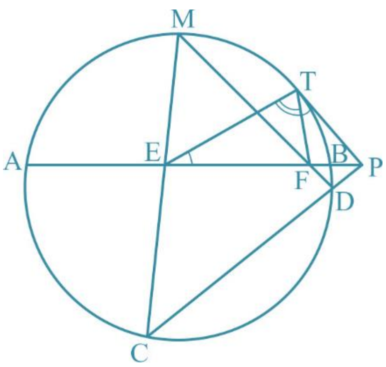
توضیح: دقت کنید که اگر n عددی ریشه‌دار باشد، از آنجا که $n < ۱۰۰۰$، $S(n) = \sqrt{n} < \sqrt{۱۰۰۰}$، پس $S(n) \leq ۳۲$ اما (به پیمانه ۹) $S(n) \equiv n \equiv ۰,۱$. پس $S(n) \in \{۱,۸,۹,۱۷,۱۸,۲۶,۲۷\}$

اما

$$S(۸^{۲}) = S(۶۴) = ۱۰ \neq ۸$$
$$S(۱۷^{۲}) = S(۲۸۹) = ۱۹ \neq ۱۷$$
$$S(۱۸^{۲}) = S(۳۲۴) = ۹ \neq ۱۸$$
$$S(۲۶^{۲}) = S(۶۷۶) = ۱۹ \neq ۲۶$$
$$S(۲۷^{۲}) = S(۷۲۹) = ۱۸ \neq ۲۷$$

بنابراین تنها عددهای ریشه‌دار ۱ و ۸۱ هستند.

۲۸- **گزینه [د] صحیح است.**



ابتدا دقت کنید که $\angle MBE = \angle BCM = \frac{AB}{۲}$، بنابراین باتوجه به این که زاویه $\angle BME$ در دو مثلث BME و BMC مشترک است، این مثلث متشابه هستند. نسبت تشابه این دو مثلث نتیجه می‌دهد $MB^{۲} = ME.MC$. با استدلال کاملاً مشابه و با توجه به مثلث‌های AMF و BAF به دست می‌آوریم $MA^{۲} = MF.MD$. از آنجا که دو کمان MA و MB با هم برابر هستند، $MA^{۲} = MB^{۲}$ و در نتیجه $ME.MC = MF.MD$ و این یعنی چهارضلعی $EFDC$ محاطی است. از محاطی بودن این چهارضلعی نتیجه می‌شود که $PF.PE = PD.PC$. اما طبق قوت P نسبت به دایره اصلی مسئله $PD.PC = PT^{۲}$ این رابطه نتیجه می‌دهد که دو مثلث PTF و PTE متشابه‌اند و لذا $\angle TEP = \angle PTF = ۳۰^{\circ}$.

در نتیجه داریم: $\angle TPE = ۱۸۰^{\circ} = ۳۰^{\circ} - ۳۰^{\circ} - ۷۰^{\circ} = ۵۰^{\circ}$.

۲۹- **گزینه [ج] صحیح است.**

M را وسط ضلع AC و G را مرکز ثقل مثلث بگیرید. در این صورت نقطه A باید روی کمان درخور زاویه ۱۵۰° نظیر پاره‌خط BM باشد. از آنجا که طول AG برابر $\frac{۲}{۳}$ میانه نظیر رأس A است، کافی است کمترین مقدار ممکن برای AG را بیابیم و آن را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم. فرض کنید O مرکز این کمان درخور باشد و نیم‌خط OG دایره را در نقطه X قطع کند. حال داریم:

$$OG + GA \geq OA = OX \Rightarrow GA \geq OX - OG = XG$$

یعنی کم‌ترین مقدار ممکن طول GX است. حال باید طول GX را بیابیم. با توجه به قوت نقطه G داریم:

$$TG.GX = GA.GM = ۲ \Rightarrow (۲R - GX)GX = ۲$$

که T و R به ترتیب محل تماس دو خط GX و دایره محیطی AMO و شعاع این دایره هستند.

$$R = \frac{۳}{۲\sin(۱۵۰^\circ)} = ۳$$

پس $GX^۲ - ۶GX + ۲ = ۰$ و بنابراین $GX = ۳ \pm \sqrt{۷}$ که چون $GX < R = ۳$ تنها حالت $GX = ۳ - \sqrt{۷}$ قابل قبول است.

۳۰- گزینه [ج] صحیح است.

T را نقطه وسط ضلع BC بگیرید و فرض کنید h_t, h_c, h_b, h_a به ترتیب طول عمودهای وارد از A، B، C و T بر MN باشند. از آنجا که قاعده هر سه مثلث همان MN است باید $h_b + h_c = h_a$ حال از آنجا که T نقطه وسط ضلع BC است، می‌توان به سادگی به کمک قضیه تالس نتیجه گرفت که $h_t = \frac{h_b + h_c}{۲} = \frac{h_a}{۲}$. حال فرض کنید خط واصل بین A و T، خط مذکور در صورت سؤال را در نقطه S قطع کند. در این صورت به دلیل قضیه تالس و توازی عمودهای وارد از T و A، $\frac{AS}{ST} = \frac{h_a}{h_t} = ۲$ پس S نقطه‌ای روی میانه نظیر ضلع BC از مثلث ABC است که این میانه را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند. پس باید مرکز ثقل مثلث باشد و بنابراین این خط همواره از مرکز ثقل مثلث که نقطه‌ای ثابت در صفحه مثلث است می‌گذرد.