



دخترچه سوالات و پاسخ تستی مرحله اول

بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

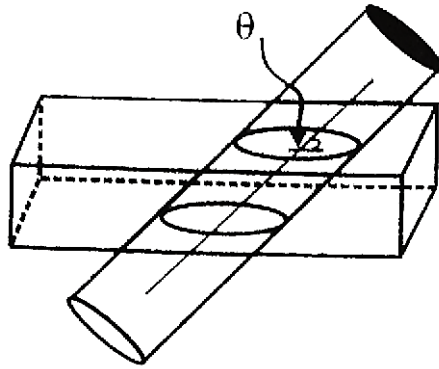
مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.



۱- ماه کیکی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد $۱۰ \times ۲۰ \times ۵۰$ داریم. به کودکی اجازه داده شده به وسیله یک استوانه که دو سر آن باز است، از کیک قطعه‌ای جدا کند، به این ترتیب که استوانه را با یکی از زوایای $۳۰^\circ, ۴۵^\circ, ۶۰^\circ, ۹۰^\circ$ نسبت به سطح بزرگ وارد آن کرده و مقدار کیکی را که درون استوانه قرار می‌گیرد برای خود بردارد. در کدام حالت بیشترین مقدار کیک را به دست می‌آورد؟

(الف) $\theta = ۳۰^\circ$ (ب) $\theta = ۴۰^\circ$

(ج) $\theta = ۶۰^\circ$ (د) $\theta = ۹۰^\circ$

(ه) در همه موارد، مقدار ثابتی کیک به دست می‌آید.

۲- ماه در یک چهاروجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. اگر از این دوازده زاویه n تای آن‌ها منفرجه باشند، آن‌گاه

(الف) n نمی‌تواند ۱ باشد. (ب) n نمی‌تواند ۲ باشد.

(ج) n نمی‌تواند ۳ باشد. (د) n نمی‌تواند ۴ باشد.

(ه) هیچ‌کدام

۳- ماه در یک ده، صد خانه ساخته شده است. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام‌هایشان هست (ممکن است روی یک بام هیچ یا چند آنتن هم باشد). هر سه تا آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

(الف) ۱۰ (ب) ۹۲ (ج) ۹۳ (د) ۹۸ (ه) ۹۹

۴- ماه اگر از یک عدد سه‌رقمی کمتر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به دست آید؟

(الف) ۴۸ (ب) ۵۰ (ج) ۵۳ (د) ۵۵ (ه) ۵۶

۵- ماه در هر مرحله ۴ خانه از جدول زیر انتخاب می‌کنیم به طوری که از هیچ سطر یا ستونی ۲ خانه انتخاب نشده باشد. عددهای هر ۴ خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می‌کنیم. با این روش به کدام یک از جدول‌های زیر می‌توان رسید؟

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

۴	۳	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۳	۲	۱	۴
۱	۳	۴	۲

(ج)

۲۰	۰	۰	۱۳
۰	۱۷	۴	۷
۱۰	۵	۱۰	۱۱
۰	۶	۱۱	۱۳

(ب)

-۲۱	۰	-۶	۳
-۶	۱۰	۲۷	۲۷
۲۰	۷	۷	۴
۳	۲۳	۱۰	۴

(الف)

۱۵	۱۷	۳	۱۵
۱۶	۱۳	۱۳	۶
۱۴	۱۳	۱۵	۸
۳	۵	۱۹	۲۱

(هـ)

۱۰	۱۷	۲	۲۱
۱۷	۱۷	۱۴	۲
۳	۱۳	۲۴	۱۰
۲۰	۳	۱۰	۱۷

(د)

۶- ماچ هر مولکول از تعدادی اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک مولکول، تعدادی پیوند وجود دارد. این تعداد می‌تواند ۰، ۱، ۲ و یا حتی بیشتر باشد. تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y در مولکول‌های مختلف عددی ثابت و وابسته به x و y است. می‌دانیم:

- مولکول تشکیل شده از اتم‌های a ، b و c دارای ۵ پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتم‌های a ، b و d دارای ۷ پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتم‌های a ، c و d دارای ۳ پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتم‌های a ، b ، c و d دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a ، b ، c ، d چند پیوند دارد؟

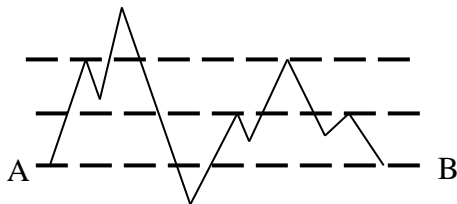
(الف) ۶ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۵ (هـ) مسئله جواب منحصر به فرد ندارد.

۷- ماچ مولکول تشکیل شده توسط ۱۰ اتم x_1, x_2, \dots, x_{10} را در نظر بگیرید. می‌دانیم این مولکول ۴۳ پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می‌گوییم سه اتم x_i, x_j, x_k تشکیل یک مثلث می‌دهند، هرگاه بین هر دو تا از

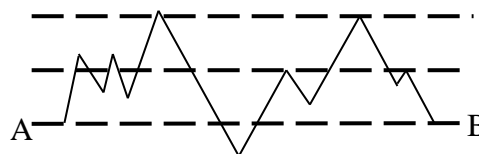
آن‌ها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث‌های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(الف) $96 \leq t \leq 98$ (ب) $99 \leq t \leq 102$ (ج) $103 \leq t \leq 105$ (د) $106 \leq t \leq 108$ (هـ) $109 \leq t \leq 112$

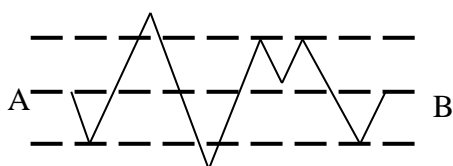
۸- ماچ شیرین در نقطه A و فرهاد در نقطه B ایستاده است. آن‌ها می‌خواهند از کوه‌ها و دره‌ها عبور کنند و به هم برسند، ولی هیچ‌کدام از آن‌ها نمی‌خواهد بالاتر از دیگری قرار گیرد. به همین منظور طوری حرکت می‌کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام یک از کوهستان‌های زیر فرهاد و شیرین به هم می‌رسند؟



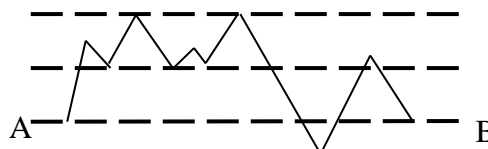
(ب)



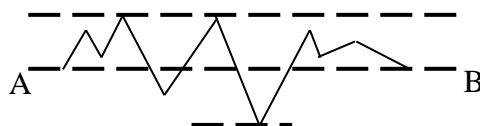
(الف)



(د)



(ج)



(هـ)

۹- فرض کنید x_1, x_2, x_3 و x_4 اعدادی صحیح و نامنفی باشند، به طوری که مجموع آن‌ها برابر ۱۶ باشد و

$$A = (2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4)(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4) \\ (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

اگر بیشترین مقدار A برابر M باشد در چند حالت داریم، $A=M$ ؟

(الف) تعداد حالات تساوی ۱ است. (ب) تعداد حالات تساوی ۶ است. (ج) تعداد حالات تساوی ۹ است.

(د) تعداد حالات تساوی نامتناهی است. (ه) A بی کران است و بیشترین مقدار ندارد.

۱۰- به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول 3×3 یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را نوشت طوری که مجموع اعداد در هر سطر و هر ستون برابر ۲ شود؟

(ه) ۲۷

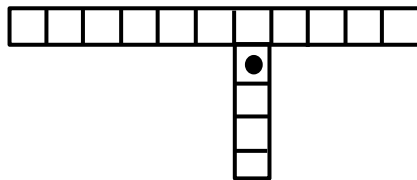
(د) ۲۴

(ج) ۲۱

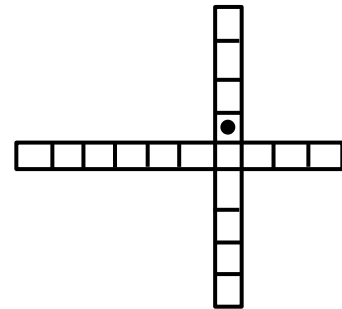
(ب) ۱۸

(الف) ۱۵

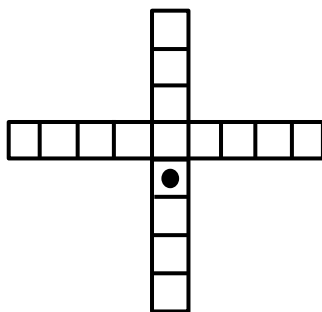
۱۱- در یک بازی دو نفره بازیکنان می‌خواهند به خانه‌ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون این بازی این است که هر بازیکن در نوبت خود خانه‌ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، برمی‌دارد. در کدام یک از زمین‌های بازی زیر بازیکن دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟



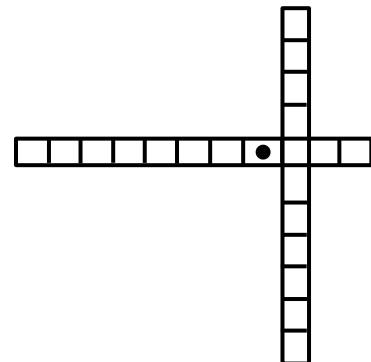
(ب)



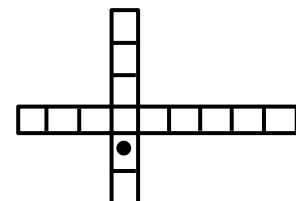
(الف)



(د)



(ج)



(ه)

۱۲- ماه زیرمجموعه اعداد طبیعی را ضعیف می‌نامیم، هرگاه مجموع هیچ دو عضوی از A بر عضوی از A بخش‌پذیر نباشد. در ضمن، یک مجموعه ضعیف را بزرگ می‌نامیم، هرگاه هیچ زیرمجموعه ضعیف دیگری شامل آن نباشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (الف) نامتناهی مجموعه ضعیف نامتناهی داریم.
 (ب) مجموعه ضعیف نامتناهی وجود دارد که بزرگ است.
 (ج) نامتناهی مجموعه ضعیف متناهی داریم که بزرگ است.
 (د) مجموعه ضعیف نامتناهی وجود دارد که همه اعضای آن بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیرند.
 (ه) مجموعه‌ای ضعیف وجود دارد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را دارا است.

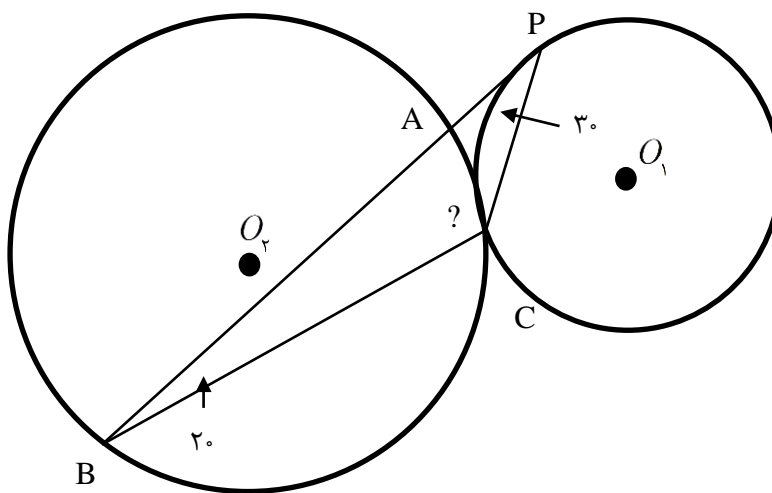
۱۳- ماه به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول 4×4 یکی از دو عدد ۰ و ۱ را نوشت به طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

- (الف) ۸۳ (ب) ۴۴ (ج) ۵۴ (د) ۹۰ (ه) ۷۸

۱۴- ماه فرض کنید A یک مجموعه ۱۰ عضوی و B زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد. تعداد زیرمجموعه‌هایی (مانند C) از مجموعه A که $B \cap C$ تعداد فردی عضو داشته باشد برابر است با:

- (الف) ۵۹۶ (ب) ۵۱۲ (ج) ۴۶۴ (د) ۳۴۸ (ه) بستگی به تعداد اعضای B دارد.

۱۵- ماه در شکل مقابل BP بر دایره (O_1) مماس است. داریم: $\angle APC = 30^\circ$ و $\angle CBA = 20^\circ$. همچنین دایره (O_2) و (O_1) بر هم مماس‌اند. اندازه $\angle BAC$ کدام است؟

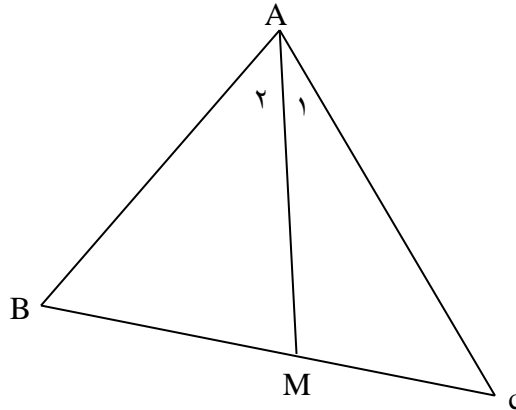


- (الف) 80° (ب) 130° (ج) 60° (د) 50° (ه) 140°

۱۶- ماه در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم: $AB = 3$ و $BC = DA = 2, CD = 4$. طول قطر BD چقدر است؟

- (الف) ۵ (ب) $\frac{7}{2}$ (ج) $2\sqrt{3}$ (د) $\frac{17}{4}$ (ه) ۴

۱۷- ماف در شکل روبرو زاویه $\angle A_1$ دو برابر زاویه $\angle A_2$ است و داریم: $AC = \sqrt{3}$ و $AB = 1$ و AM میانه BC است. طول BC کدام است؟



(ه) $\frac{3}{2}$

(د) $\sqrt{3}$

(ج) ۲

(ب) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(الف) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

۱۸- ماف در مثلث ABC ، $\angle A = 120^\circ$ و مجموع دو ضلع AB و AC برابر ۱۰ است. در مورد ضلع BC چه می توان گفت؟

(ج) $5 \leq BC \leq 9$

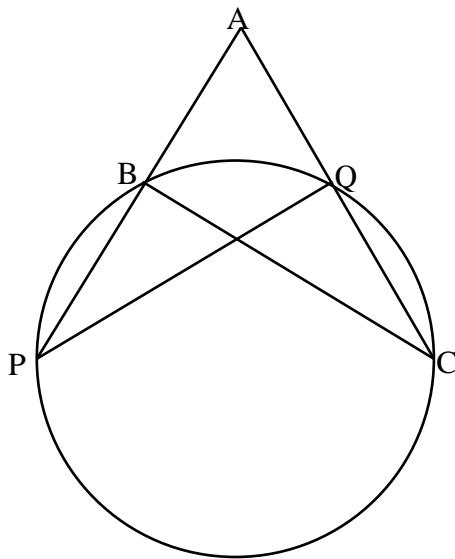
(ب) $BC \geq 5\sqrt{3}$

(الف) $BC < 9$

(ه) $\frac{11}{2} \leq BC \leq \frac{17}{2}$

(د) $5\sqrt{3} \leq BC \leq 9$

۱۹- ماف در مثلث ABC دوایری را در نظر بگیرید که از رئوس B و C می گذرند و AB و AC یا امتداد آن ها را در نقاطی مثل P و Q قطع می کنند. مکان هندسی وسط پاره خطهایی مانند PQ کدام می باشد؟



(الف) عمود منصف BC .

(ب) خطی که از A می گذرد.

(ج) قسمتی از دایره ای که از B و C می گذرد.

(د) دایره ای که از A می گذرد.

(ه) هیچ کدام

۲۰- ماف معادله زیر در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

$$x^2 + y^5 = 1381 + z^2$$

(ه) بی نهایت

(د) ۸

(ج) ۴

(ب) ۲

(الف) صفر

۲۱- ماگ فرض کنید n عددی طبیعی باشد، مقسوم‌علیه d از n را خوب می‌گوییم، اگر $(d, \frac{m}{d}) = 1$. فرض کنید $f(m)$ نماینده مجموع

مقسوم‌علیه‌های خوب n باشد و S مجموعه اعداد طبیعی مانند m باشد که $f(m) - 2$ مضرب ۴ است و $1 \leq m \leq 1000$.

کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

(الف) عضوی از S وجود دارد که بر ۳۰ بخش پذیر است.

(ب) عضوی از S به شکل $4k + 3$ است.

(ج) هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.

(د) عضوی از S وجود دارد که تعداد عوامل اول آن ۴ است.

(ه) هیچ کدام

۲۲- ماگ فرض کنید f و g دو تابع از N و R باشند. می‌گوییم $f \triangleleft g$ اگر عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $f(n) < g(n), n > N$ اگر:

$$f_1(n) = (10^n)! \quad f_2(n) = 2^{n!} \quad f_3(n) = \sqrt[n]{(n!)}$$

کدام گزینه صحیح است؟

(الف) $f_1 \triangleleft f_2 \triangleleft f_3$

(ب) $f_2 \triangleleft f_1 \triangleleft f_3$

(ج) $f_3 \triangleleft f_2 \triangleleft f_1$

(د) $f_1 \triangleleft f_3 \triangleleft f_2$

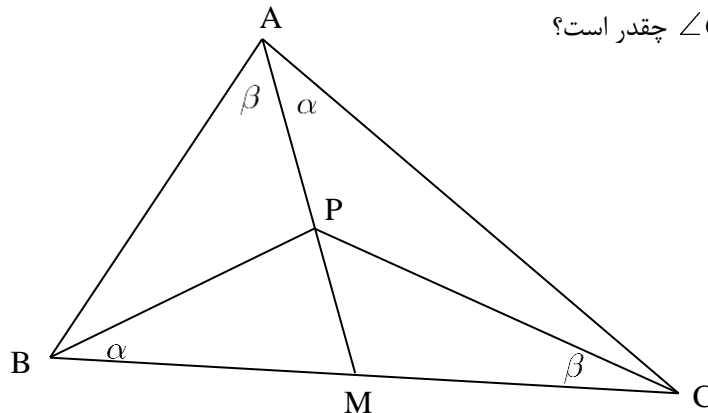
(ه) $f_2 \triangleleft f_3 \triangleleft f_1$

۲۳- ماگ در مثلث ABC ، AM میانه است. نقطه P روی AM چنان قرار گرفته است که

$$\angle PAC = \angle PBC = \alpha$$

$$\angle PAB = \angle PCB = \beta$$

اگر $\alpha + \beta = 80^\circ$ زاویه $\angle CPA$ چقدر است؟



(الف) 130°

(ب) 120°

(ج) 140°

(د) $120^\circ < \angle CPA < 30^\circ$

(ه) تمام مقادیر بین 120° و 140° می‌تواند باشد.

۲۴- ماگ در شکل زیر $BM = BN$ اگر داشته باشیم

$$\frac{S_{BMC}}{S_{APC}} = \frac{4}{9} \text{ مطلوبست مقدار } \frac{AB}{AC}$$

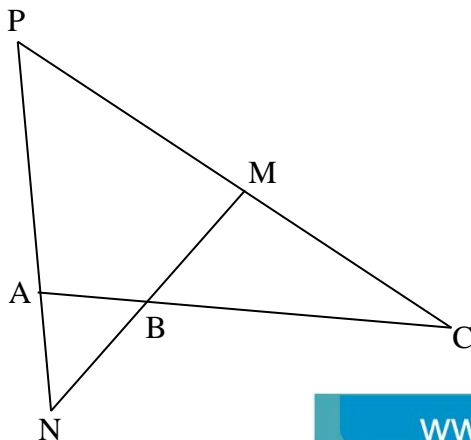
(الف) $\frac{4}{49}$

(ب) $\frac{2}{7}$

(ج) $\frac{14}{15}$

(د) $\frac{3}{7}$

(ه) $\frac{2}{3}$



۲۵- بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت یک محاط شود چه مساحتی دارد؟

- ماه
- الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{2}{3}$ ه) $\frac{3}{4}$

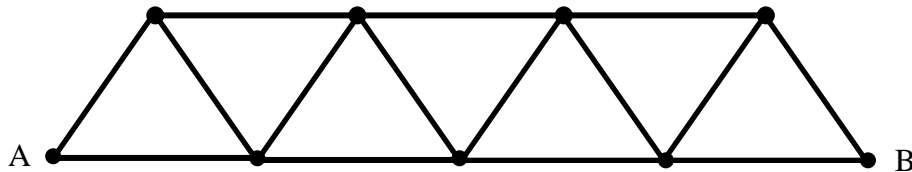
۲۶- داخل یک نیم کره و صفحه گذرنده از دایره عظیمه آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای روی نیم کره به سوی درون آن تابیده می‌شود. فرض کنید اگر پرتو به مرز دایره عظیمه برخورد کند روی همان مسیر برگردد. (توجه کنید که بردار عمود بر سطح، پرتو تابش و بازتابش همواره در یک صفحه‌اند و هر پرتو که به نیم کره برخورد می‌کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و بازتابش از مرکز کره بگذرد).

- ماه
- الف) مسیر این پرتو به مرز دایره عظیمه میل می‌کند.
 ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم کره و دایره عظیمه آن به دلخواه نزدیک می‌شود.
 ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.
 د) مسیر این پرتو به‌ازای نامتناهی جهت تابش، متناوب است.
 ه) مسیر این پرتو تنها به‌ازای متناهی جهت تابش، متناوب است.

۲۷- خرج نگهداری فیل خیلی زیاد است به همین دلیل رییس باغ وحش شهر خسیس‌ها تصمیم می‌گیرد اگر دو فیل هم شکل داشته باشد، یکی از آن‌ها را بفروشد. به نظر وی دو فیل وقتی هم شکل‌اند که در مقایسه طول خرطوم و طول دم آن‌ها با هر فیل دیگری که در باغ وحش وجود دارد، هر دو به نتایج یکسانی برسند. یعنی برای مثال، اگر با فیل خاصی مقایسه شوند طول خرطوم هر دو از خرطوم آن کوتاه‌تر باشد و طول دم هر دو از طول دم آن بلندتر باشد. پس از عملیات فروش، وقتی دیگر هیچ دو فیلی هم شکل نیستند کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

- ماه
- (توجه کنید که طول خرطوم یا دم هیچ دو فیلی برابر نیست.)
 الف) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.
 ب) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۵ فیل باقی بماند.
 ج) ممکن است ۴ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۳ فیل باقی بماند.
 د) ممکن است ۵ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.
 ه) ممکن است هر تعداد بیشتر یا مساوی ۳ فیل باقی بماند.

۲۸- در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم از نقطه A به نقطه B برویم به طوری که از هیچ نقطه‌ای دو بار عبور نکنیم؟



- ماه
- الف) ۸۱ ب) ۷۲ ج) ۶۱ د) ۵۲ ه) ۴۴

۲۹- ماگ دنباله x_n را به این صورت تعریف می‌کنیم $x_1 = t$ و به‌ازای $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, $n \geq 0$. چند $t \in [-1, 1]$ وجود دارد که $x_{11} = 1$ ؟

(راهنمایی: $\cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta$)

- (الف) چنین t ای وجود ندارد.
- (ب) تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.
- (ج) تعداد چنین t هایی بین صد و هزار است.
- (د) بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.
- (ه) نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.

۳۰- ماگ فرض کنید $p(x) = x^2 + a$ که a یک عدد حقیقی و ثابت است. معادله $p(p(x)) = x$ را در نظر بگیرید.

- (الف) این معادله چهار جواب دارد اگر و تنها اگر $a < \frac{-3}{4}$.
- (ب) این معادله همواره جواب دارد.
- (ج) به‌ازای $a = \frac{1}{4}$ این معادله دو جواب دارد.
- (د) به‌ازای $a > 0$ این معادله جواب ندارد.
- (ه) الف و ب

«کلید سؤالات»

- ۱ هـ د ج ب
- ۲ الف ب ج د هـ
- ۳ الف ب ج د هـ
- ۴ الف ب ج د هـ
- ۵ الف ب ج د هـ
- ۶ الف ب ج د هـ
- ۷ الف ب ج د هـ
- ۸ هـ د ج ب
- ۹ الف ب ج د هـ
- ۱۰ الف ب ج د هـ
- ۱۱ الف ب ج د هـ
- ۱۲ الف ب ج د هـ
- ۱۳ الف ب ج د هـ
- ۱۴ الف ب ج د هـ
- ۱۵ هـ د ج ب
- ۱۶ الف ب ج د هـ
- ۱۷ الف ب ج د هـ
- ۱۸ الف ب ج د هـ
- ۱۹ الف ب ج د هـ
- ۲۰ الف ب ج د هـ

- ۲۱ الف ب ج د هـ
- ۲۲ هـ د ج ب
- ۲۳ هـ د ج ب
- ۲۴ الف ب ج د هـ
- ۲۵ الف ب ج د هـ
- ۲۶ الف ب ج د هـ
- ۲۷ الف ب ج د هـ
- ۲۸ هـ د ج ب
- ۲۹ الف ب ج د هـ
- ۳۰ هـ د ج ب
- ۳۱ الف ب ج د هـ
- ۳۲ الف ب ج د هـ
- ۳۳ الف ب ج د هـ
- ۳۴ الف ب ج د هـ
- ۳۵ الف ب ج د هـ
- ۳۶ الف ب ج د هـ
- ۳۷ الف ب ج د هـ
- ۳۸ الف ب ج د هـ
- ۳۹ الف ب ج د هـ
- ۴۰ الف ب ج د هـ

- ۴۱ الف ب ج د هـ
- ۴۲ الف ب ج د هـ
- ۴۳ الف ب ج د هـ
- ۴۴ الف ب ج د هـ
- ۴۵ الف ب ج د هـ
- ۴۶ الف ب ج د هـ
- ۴۷ الف ب ج د هـ
- ۴۸ الف ب ج د هـ
- ۴۹ الف ب ج د هـ
- ۵۰ الف ب ج د هـ
- ۵۱ الف ب ج د هـ
- ۵۲ الف ب ج د هـ
- ۵۳ الف ب ج د هـ
- ۵۴ الف ب ج د هـ
- ۵۵ الف ب ج د هـ
- ۵۶ الف ب ج د هـ
- ۵۷ الف ب ج د هـ
- ۵۸ الف ب ج د هـ
- ۵۹ الف ب ج د هـ
- ۶۰ الف ب ج د هـ