



دفترچه سؤالات

مرحله اول

دومین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
-	-	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل - **مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن - **دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول دومین دوره مسابقات ریاضی
(بعضی از استان‌ها)، ۱۳۶۳

الف) استان آذربایجان شرقی

۱- تابع f و g با ضابطه‌های

$$g(x) = \sqrt[3]{-2x+1} \text{ و } f(x) = \frac{x^4-3}{x^4+3}$$

تعریف شده‌اند. دامنه تعریف تابع $(f \circ g)^{-1}$ را به دست آورید.

۲- بین رابطه‌ی زیر θ را حذف کنید و نشان دهید $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x = y \operatorname{tg} \theta + \sin \theta \\ 2y = x \operatorname{cot} \theta + \cos \theta \end{cases}$$

۳- دایره‌ی (C) و دونقطه‌ی A و B در خارج آن مفروض‌اند. نقطه‌ی M را روی محیط این دایره طوری انتخاب کنید که $MA^2 + MB^2$ کوچک‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۴- اگر $A = ax + by$ بر $x - y$ بخش‌پذیر باشد ثابت کنید که $B = (a + b)(x + y)$ نیز بر $x - y$ بخش‌پذیر است $(x > y, a, b, x, y \in \mathbb{N})$.

۵- اگر $a, b, c, a + b - c, a + c - b$ و $b + c - a$ همگی مثبت فرض شوند ثابت کنید که

$$abc \geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$$

۶- روی محور y ها نقطه‌ای تعیین کنید که اگر از این نقطه دو خط قائم بر منحنی تابع $y = \frac{-4}{x^2}$ رسم کنیم بر هم عمود باشند.

۷- حاصل عبارت

$$P = \left(1 - \tan^2 \frac{a}{2}\right) \left(1 - \tan^2 \frac{a}{4}\right) \left(1 - \tan^2 \frac{a}{8}\right) \dots \left(1 - \tan^2 \frac{a}{2^m}\right)$$

را حساب کرده و حد آن را وقتی که $m \rightarrow +\infty$ به دست آورید.

۸- اگر U یک ایده‌آل حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار R باشد و $1 \in U$ ، اولاً ثابت کنید $U = R$ و ثانیاً اگر F یک میدان باشد با استفاده از قسمت قبل ثابت کنید ایده‌آل‌های میدان F فقط $\{0\}$ و F هستند.

۹- خط D به معادله‌ی $\frac{x}{4} + \frac{y}{4}$ محور x ها را در A و محور y ها را در B قطع می‌کند. معادله‌ی دایره‌ی محاطی خارجی مثلث OAB را که نظیر ضلع OA است پیدا کنید (O مبدأ محورهای مختصات است).

۱۰- صفحه‌ی P و دو نقطه‌ی A و B در یک طرف آن مفروض اند $(AB \not\perp P)$. نقطه‌ی M را روی صفحه چنان انتخاب کنید که مثلث MAB متساوی‌الاضلاع باشد. ماگ

۱۱- با ترازوی نامتعادلی کالایی را توزین می‌کنند دفعه‌ی اول در کفه‌ی A یک کیلوگرم وزنه و در کفه‌ی B آن قدر کالا قرار می‌دهند تا تعادل ترازو برقرار شود؛ دفعه‌ی دوم عکس عمل فوق را انجام می‌دهند. معلوم کنید که در دو بار توزین مجموع کالای وزن شده بیشتر یا کمتر یا مساوی دو کیلوگرم است. ماگ

ب) استان چهارمحال و بختیاری

۱- معادله‌ی زیر را حل کنید. (x مجهول و $a \neq 0$ فرض شود). ماگ

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{x-1} + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

۲- اگر a_1, a_2, \dots, a_n جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید: ماگ

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

۳- کثیرالجمله [چندجمله‌ای] $f(x)$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم ماگ

$$f(f'(x)) = 27x^6 - 27x^4 + 6x^2 + 2$$

۴- نمودار رابطه‌ی ماگ

$$\frac{y}{|x|} + 1 = |xy| + y|y|$$

را رسم کنید.

۵- معادله‌ی ماگ

$$\frac{\operatorname{tg} x + \cot x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}$$

را حل کنید.

۶- از رابطه‌ی $\log_a 16 + \log_{\sqrt{a}} a = 9$ مقدار a را حساب کنید. ماگ

۷- الف) اگر V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی و V_1, V_2, \dots, V_n مستقل خطی باشند، ثابت کنید هر بردار این فضا را فقط به یک صورت می‌توان به صورت ترکیب خطی V_1, V_2, \dots, V_n نوشت. ماگ

ب) اگر $(A, *)$ یک گروه باشد و برای هر دو عنصر a و b از آن داشته باشیم $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ ثابت کنید این گروه آبدلی است.

۸- دو دایره از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند. از نقطه‌ی K محل برخورد آن‌ها خطی می‌گذرانیم که دایره‌ها را در M و N قطع کند و در این نقاط مماس‌هایی بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. زاویه‌ی بین این مماس‌ها را تعیین کنید. ماگ

۹- اگر داشته باشیم

$$A = 2^n \sqrt[n]{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}}}}$$

الف) A را بر حسب n و α حساب کنید.
ب) مطلوب است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

۱۰- فاصله‌ی شهر A از شهر B ، 24° کیلومتر است. اتوبوسی با سرعت متوسط 6° کیلومتر در ساعت از شهر A به طرف شهر B و همزمان با آن اتومبیلی با سرعت متوسط α کیلومتر در ساعت از شهر B به شهر A حرکت می‌کنند. اتومبیل بعد از ملاقات با اتوبوس نیم ساعت دیگر به راه خود ادامه داده و سپس به طرف شهر B برمی‌گردد. حساب کنید α را به شرطی که اتومبیل و اتوبوس باهم به شهر B برسند.

ج) استان خوزستان

۱- زاویه‌ی قائمه‌ی مفروضی طوری تغییر می‌کند که اضلاع زاویه‌ی قائمه همواره بر دو دایره‌ی ثابت مماس هستند. مکان هندسی وسط خط واصل بین دونقطه‌ی تماس را به دست آورید.

۲- بر خط d به معادلات

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه‌ی xOy زاویه‌ی 3° بسازد.

۳- تابع f به معادله‌ی

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

مفروض است. مستقیماً و با استفاده از تعریف حد ثابت کنید f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۴- ثابت کنید که هرگاه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - f'(a)$$

۵- اگر $(S, +, \times)$ یک میدان باشد ثابت کنید $(S - \{e\}, \times)$ یک گروه جابجایی است (e عضو بی‌اثر S نسبت به عمل $+$ است).

۶- معادله زیر را حل کنید.

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

۷- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید که

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

۸- تابع

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

مفروض است. ثابت کنید که f یک به یک و پوشاست.

۹- شخصی دارای a دوست است. به چند روش می‌تواند یک یا تعداد بیشتری از دوستان خود را به شام دعوت کند؟

۱۰- مطلوب است محاسبه‌ی

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin(2i-1)x}{\cos^2 ix \cdot \cos^2(i-1)x}$$

(ب) استان باختران

جبر و آنالیز

۱- دامنه و برد توابع $f(x) = \left| \frac{1}{1 + \sin^2 x} \right|$ و $g(x) = \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را مشخص کنید.

۲- توابع $y_1 = \sqrt{x+1}$ و $y_2 = \sqrt{m^2 x - 1}$ مفروض‌اند. m را به قسمی تعیین کنید که توابع معکوس آن‌ها مجانب هم باشند.

۳- پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x - |x|}{|x|}$ را در $(1, 2)$ بررسی کرده، نمودار آن را در فاصله‌ی $(-2, 0)$ رسم کنید.

۴- به ازای چه مقدار m نقطه‌ی $A(1, 1)$ مرکز تقارن $y = \frac{x^2 + x - 1}{mx + n}$ خواهد بود؟

۵- اولاً ثابت کنید $y = x^2 - 6x^2 + 12x$ در \mathbb{R} معکوس‌پذیر است. ثانیاً ضابطه‌ی تابع معکوس آن را به دست آورید.

ریاضیات جدید

۶- رقم سمت راست عدد $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ را پیدا کنید.

۷- ثابت کنید

$$9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 0 \pmod{73}$$

۸- ثابت کنید به ازای $n \geq 2$

$$\tan \alpha \tan 2\alpha + \tan 2\alpha \tan 3\alpha + \dots + \tan(n-1)\alpha \tan n\alpha = \frac{\tan n\alpha}{\tan \alpha} - n$$

۹- اگر R یک حلقه و $a \in R$ وارون پذیر باشد، ثابت کنید $a \neq 0$ و a مقسوم علیه صفر نیست.

هندسه

۱۰- چهار نقطه A, B, C و D روی یک خط راست واقع اند. بر این خط دونقطه P و Q را چنان تعیین کنید که هم نسبت به A و B و هم نسبت به C و D مزدوج توافقی باشند.

۱۱- نقاط A و B در یک طرف خط Δ واقع هستند. نقطه M را روی خط Δ چنان تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دونقطه A و B مینیمم باشد.

۱۲- مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که وسط وترهایی از دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ باشند و از مبدأ مختصات بگذرند.