جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی

مرحله اول

شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۶

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۳۰	–	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۰ سوال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

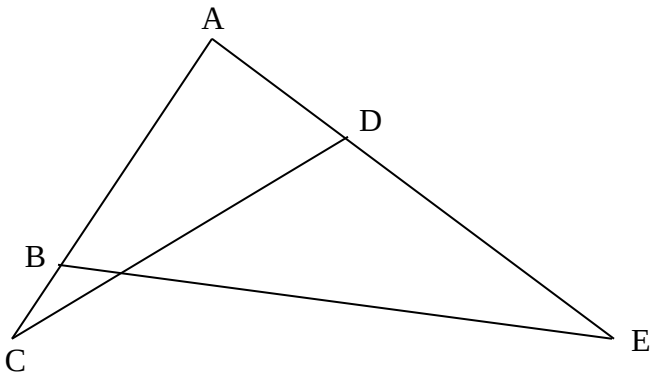
www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- ماخ معادله‌ی $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=d$ که a، b، c و d اعداد طبیعی هستند و $a<b<c$ چند جواب دارد؟

الف) جواب ندارد ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ هـ) بینهایت

۲- ماخ در شکل زیر زوایای $\angle CDE$ و $\angle CBE$ مساوی‌اند. اگر $AB=a$، $BC=b$، $AD=c$ و $DE=d$ آنگاه داریم :



الف) $b(a+b)=d(c+d)$
ب) $ab=cd$
ج) $a(a+b)=c(c+d)$
د) $ad=cb$
هـ) $c(a+b)=a(c+d)$

۳- ماخ مجموعه‌ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۴- ماخ چند عدد اول کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) بیش از ۵

۵- ماخ معادله‌ی $(x+۱)^۲=x^y+۱$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۵

۶- ماخ فرض کنید که معادله‌ی $x^۲+ax+b$ دو جواب صحیح داشته باشد. عبارت‌های زیر را در نظر بگیرید :

۱) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a و b فرد است.
۲) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
۳) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.
۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.
۵) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
۶) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a و b فرد است.

الف) ۱ و ۴ ب) ۲ و ۴ ج) ۱ و ۵ د) ۳ و ۵ هـ) ۲ و ۶

۷- معادله‌ی $n! + ۳ = ۳^{n-۱}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار هـ) بینهایت

۸- اگر ABC مثلثی باشد که $\angle A = ۴۵^\circ$ و D نقطه‌ای روی امتداد BA باشد به قسمی که $BD = BA + AC$ و نقاط K و M به‌ترتیب روی AB و BC به‌گونه‌ای قرار داشته باشند که مساحت مثلث BDM مساوی مساحت مثلث BCK باشد آنگاه $\angle BKM$ برابر است با :

الف) $۲۲/۵^\circ$ ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۱۵° هـ) ۲۰°

۹- فرض کنید $A = \{۱,۲,۳\}$. چند تابع $f : A \to A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(f(x)) = f(x)$ ؟

الف) ۱ ب) ۷ ج) ۲ د) ۱۰ هـ) ۱۳

۱۰- مثلث ABC را با اضلاعی با طول‌های صحیح a و b و c در نظر می‌گیریم و طول ارتفاع‌های آن را h_a، h_b و h_c می‌نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$ ، در این‌صورت داریم :

الف) $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.
ب) $۲(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
ج) $۳(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
د) $b^۲ + c^۲ - a^۲$ مربع کامل است.
هـ) $a^۲ + b^۲ - c^۲$ مربع کامل است.

۱۱- فرض کنید $a = ۱۰^{۲\times۱۳۷۶} - ۱۰^{۱۳۷۶} + ۱$. مقدار $\left[۲\sqrt{a}\right]$ برابر است با :
($\left[x\right]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x.)

الف) $۲\times۱۰^{۱۳۷۶} - ۲$ ب) $۲\times۱۰^{۱۳۷۶} - ۱$ ج) ۲×۱۰^{۱۳۷۶}
د) $۲\times۱۰^{۱۳۷۶} + ۱$ هـ) $۲\times۱۰^{۱۳۷۶} + ۲$

۱۲- مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. نقاط D و E را به‌ترتیب روی AB و AC می‌گیریم به‌طوری که دایره‌ی محیطی مثلث ADE در نقطه‌ی X بر BC مماس باشد. اگر D و E را طوری انتخاب کنیم که DE مینیمم شود، در این‌صورت داریم:

الف) AX میانه است.
ب) AX ارتفاع است.
ج) AX نیمساز است.
د) X بین پای نیمساز و پای میانه قرار دارد.
هـ) X بین پای نیمساز و پای ارتفاع قرار دارد.

۱۳- ۵ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه داریم. به چند طریق این مهره‌ها را می‌توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم بچینیم، به‌طوری‌که بلافاصله بعد از هر مهره‌ی سفید حداقل یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد؟

الف) ۱۲۶ ب) ۱۳۲ ج) ۲۱۸ د) ۲۵۲ هـ) ۳۱۲

۱۴- ماخ فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$،
$A_n = \{ x \in \mathbb{N} \mid$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x و n بزرگتر از یک است $\}$.
عدد طبیعی $n > ۱$ را «خوب» می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A_n$ ، داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچکتر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ هـ) ۲۳

۱۵- ماخ نقطه‌ی M درون مثلث ABC قرار دارد. $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ به‌ترتیب پای عمودهای مرسوم از M بر BC، AC و AB می‌باشند.
اگرحاصل‌ضرب $MH_۱.MH_۲.MH_۳$ بیشترین مقدار ممکن خود را اختیار کند آنگاه M کدام‌یک از نقطه‌های زیر است؟

الف) مرکز ارتفاعی ب) مرکز دایره‌ی محاطی ج) مرکز دایره‌ی محیطی
د) مرکز ثقل هـ) نقطه‌ای که از آن سه ضلع به یک زاویه دیده می‌شود.

۱۶- ماخ معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{۱۳۷۶}$ با شرط $\{x \leq y\}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار هـ) جواب ندارد

۱۷- ماخ چند تابع $f : \mathbb{N} \cup \{۰\} \to \mathbb{N} \cup \{۰\}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ داشته باشیم: $f(f(n)) + f(n) = ۲n + ۳$ ؟

الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه هـ) بینهایت

۱۸- ماخ چند عدد اول سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که در آن داشته باشیم $b^۲ - ۴ac = ۹$ ؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۹- ماخ در زیرمجموعه‌ی $\{(x,y) \mid ۱ \leq x, y \leq ۵ ; x, y \in \mathbb{Z}\}$ از نقاط صفحه حداکثر چند نقطه می‌توانیم انتخاب کنیم به‌طوری که فاصله‌ی دوبه‌دوی این نقاط متمایز باشد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۲۰- ماخ تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:
۱) به‌ازای هر $x, y \in N$ داریم: $f(xy) = f(x) + f(y) - ۱$
۲) فقط به‌ازای تعداد متناهی x داریم: $f(x) = ۱$
۳) $f(۳۰) = ۶$
مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۲۱- فرض کنید $A_1، A_2، \ldots، A_n$ زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6\}$ باشند به‌طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی A_i و A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این‌صورت بیشترین مقدار n کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ هـ) ۲۵

۲۲- تعداد مقسوم‌علیه‌های هر دو عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. عدد n را «جالب» گوییم هرگاه $d(d(d(n)))$. کدام‌یک از احکام زیر نادرست است؟

الف) بینهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.
ب) بینهایت عدد جالب زوج وجود دارد.
ج) بینهایت عدد جالب فرد وجود دارد.
د) اگر n جالب باشد، n^3 نیز جالب است.
هـ) اگر n جالب باشد، $d(n)$ نیز جالب است.

۲۳- اعداد حقیقی $a_1، a_2، \ldots، a_n$ روی تخته نوشته شده‌اند. در هر «گام» دو تا از آنها مثل x و y را به دلخواه انتخاب کرده و آنها را حذف می‌کنیم و به جای آنها عدد $x+y+xy$ را می‌نویسیم. پس از $n-1$ گام عدد A روی تخته باقی مانده است.
کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

الف) می‌توان مقادیر اولیه‌ی $a_1، a_2، \ldots، a_n$ را چنان تعیین کرد که با روش‌های مختلف $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.
ب) مقدار A به‌طور منحصربه‌فرد توسط $a_1، a_2، \ldots، a_n$ تعیین می‌شود.
ج) اگر $a_1 = 2$، در این‌صورت A حتماً عددی زوج است.
د) به تعداد متناهی مقادیر $a_1، a_2، \ldots، a_n$ وجود دارد که برای آنها A می‌تواند برابر ۱ شود.
هـ) تمام گزینه‌های بالا نادرست است.

۲۴- ۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت k، سوئیچ p_k وضعیت خاموش و روشن لامپ‌هایی که شماره آنها مضربی از k است را عوض می‌کند. سوئیچ‌های $P_1, P_2, \ldots, P_{1376}$ را متوالیاً می‌زنیم. در آخر چند لامپ روشن می‌ماند؟

الف) ۱۳۷۶ ب) ۱۳۳۹ ج) ۷۶ د) ۳۹ هـ) ۳۷

۲۵- از جدول زیر ۵ عدد انتخاب می‌کنیم به‌طوری که هیچ دو عددی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند. کوچکترین این اعداد را a می‌نامیم. a حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۳۱	۲۱	۲۹	۲۲	۲۰
۷	۲۰	۱۵	۱۲	۱۴
۲۳	۱۳	۷	۹	۳
۳۱	۱۷	۱۱	۱۴	۲۳
۲۸	۴۱	۲	۲۶	۲۱

الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۲۰ هـ) ۲۱

۲۶- از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۱\}$ زیرمجموعه‌ای مانند $S\subset A$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری که اگر $x,y\in S$ آنگاه $x+y\notin S$. حداکثر تعداد اعضای S چقدر است؟

الف) ۴۹۹ ب) ۵۰۰ ج) ۵۰۱ د) ۵۰۲ هـ) ۵۰۳

۲۷- برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(۱۳۷۶)=۱۷$). اگر $n_۰=(۱۳)^{۷۶}$، کدام‌یک از اعداد زیر در دنباله‌ی $n_۰, f(n_۰), f(f(n_۰)),..., f(f(...(f(n_۰))...)),...$ وجود دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) هیچ‌کدام

۲۸- مثلث ABC با اضلاع $AB=۴$، $AC=۵$ و $BC=۶$ مفروض است. نقاط A',B' و C' پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B و C هستند. A'',B'' و C'' را به‌ترتیب محل تلاقی امتداد این ارتفاعها با دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گیریم. در این صورت $\frac{AA''}{AA'}+\frac{BB''}{BB'}+\frac{CC''}{CC'}$ برابر است با:

الف) ۴ ب) ۵ ج) $۳\sqrt{۲}$ د) $۲\sqrt{۳}+۱$ هـ) $۳\sqrt{۳}-۱$

۲۹- در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر عددی به صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{۵^m+۵^k \mid m,k\in\mathbb{N}\}$ ب) $\{۴^m+۴^k \mid m,k\in\mathbb{N}\}$ ج) $\{۶^m+۶^k \mid m,k\in\mathbb{N}\}$

د) $\{۷^m+۷^k \mid m,k\in\mathbb{N}\}$ هـ) هیچ‌کدام

۳۰- معادله‌ی $\frac{\overbrace{۱+۱+\cdots+۱}^{۱۳۷۶}}{a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۳۷۶}}=\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_{۱۳۷۶}}$ که در آن $۱=a_۱\le a_۲\le\cdots\le a_{۱۳۷۶}$

روی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۱۳۷۶! د) بینهایت هـ) $۲\times(۱۳۷۶!)$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=d$$

که در آن a,b,c و d عددهایی طبیعی‌اند و $a<b<c$. چون

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}<۲$$

بنابراین $d=۱$.

ادعا می کنیم که $a=۲$. توجه کنید که $a\neq ۱$ و اگر $a\geq ۳$. آنگاه،

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۲}$$

که ناممکن است. پس $a=۲$ و بنابراین،

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۲}$$

و $b\geq ۳$.

ادعا می کنیم $b=۳$. توجه کنید که اگر $b\geq ۴$. آنگاه

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\leq\frac{۱}{۵}<\frac{۱}{۲}$$

پس $b=۳$ و در نتیجه، $c=۶$ به طور یکتا به دست می آید. پس تنها جواب مسأله $a=۲,b=۳,c=۶$ و $d=۱$ است.

۲- گزینه (ج) صحیح است.

چون $\angle CDE=\angle CBE$. بنابراین چهار نقطه B,D,E و C روی یک دایره قرار دارند. پس بنابر تعریف قوت نقطه، $AB.AC=AD.AE$ و بنابراین،

$$a(a+b)=c(c+d)$$

۳- گزینه (الف) صحیح است.

فرض کنید $|A|\geq ۵$. در این صورت اگر A از هر رده مانده‌های به پیمانه ۳ دست‌کم یک عضو داشته باشد، مجموع این سه عضو بر ۳ بخش‌پذیر است. پس A دست‌کم از یکی از رده‌های مانده های به پیمانه ۳ عضوی ندارد. در این صورت، بنابر اصل لانه کبوتری، عددی مانند r وجود دارد که $۰\leq r\leq ۲$ و n دارای سه عضو متمایز مانند $x_۱,x_۲$ و $x_۳$ است که

$$x_i\overset{۳}{\equiv}r,\qquad ۱\leq i\leq ۳$$

اما در این صورت $۳\mid x_۱+x_۲+x_۳$. پس $|A|\leq ۴$. مثال $A=\{۱,۲,۴,۵\}$ نشان می دهد که $|A|=۴$ امکان پذیر است.

۴- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید n عددی با ویژگی مورد نظر باشد. چون مجموع ارقام N برابر ۲ است پس یا $N=2$ یا N دارای دو رقم ۱ است و بقیه ارقام آن صفرند. اما چون N اول است، رقم آخر باید ۱ باشد. پس n باید به شکل

$$N = ۱۰۰\ldots۰۱ = ۱۰^n + ۱$$
تا $n-۱$

باشد و چون $N < ۱۳۷۶$، پس $n < ۴$. به ازای $n=۱$ و $n=۲$ عددهای ۱۱ و ۱۰۱ به دست می‌آیند که اول‌اند. اما به ازای $n=۳$ عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۵- گزینه (ب) صحیح است.

چون $x^y + ۱ = (x+۱)^۲$، پس $x^y = x^۲ + ۲x$. در نتیجه $x^{y-۱} = x+۲$. اگر $y=۱$، نتیجه می‌شود $x+۲=۱$ که غیر ممکن است. پس $y \geq ۲$. بنابراین، $x \mid x^{y-۱}$ و چون $x \mid x$ پس $x \mid ۲$. بنابراین، $x=۱$ یا $x=۲$. اگر $x=۱$، به رابطه $۱=۱+۲$ می‌رسیم که تناقض است. اگر $x=۲$ نتیجه می‌شود $y=۳$. پس تنها جواب مسأله $(x,y)=(۲,۳)$ است.

۶- گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید که اگر $x_۱, x_۲$ دو جواب معادله باشند، آنگاه $b = x_۱x_۲$ و $a = -(x_۱ + x_۲)$. پس اگر $x_۱x_۲$ فرد باشند، a زوج و b فرد خواهد بود و اگر یکی از $x_۱, x_۲$ فرد و دیگری زوج باشد، a فرد و b زوج خواهد بود. پس عبارتهای ۲ و ۴ صحیح هستند.

۷- گزینه (ب) صحیح است.

به آسانی می توان دید که $n=۳$ و $n=۴$ جوابهای معادله $n! + ۳ = ۳^{n-۱}$ هستند اما $n=۱, n=۲$ و $n=۵$ جواب این معادله نیستند. به ازای $n \geq ۶$، بر ۹ بخش پذیر است ولی $۳^{n-۱} - ۳$ بر ۹ بخش پذیر نیست.

۸- گزینه (الف) صحیح است.

چون $BD = BA + AC$، پس $AD=AC$ و در نتیجه زاویه های $\angle ACD$ و $\angle ADC$ برابرند. بنابراین،

$$\angle ADC = \frac{۱}{۲}(\angle ADC + \angle ACD) = \frac{۱}{۲}\angle A = ۲۲/۵^\circ$$

فرض کنید L نقطه تقاطع CK با DM باشد. اگر مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان دهیم، از $[BDM] = [BCK]$ نتیجه می‌شود

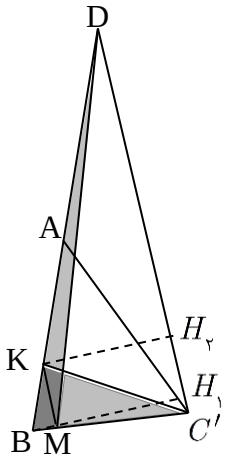
$$[MLC] = [KLD]$$

پس، $[MCD] = [KCD]$ و بنابراین، اگر $H_۱$ و $H_۲$ به ترتیب پاهای عمودهای رسم شده از M و K بر CD باشند،

$$CD.MH_۱ = CD.KH_۲$$

در نتیجه، $MH_۱ = KH_۲$. یعنی KM و CD موازی اند بنابراین،

$$\angle BKM = \angle BDC = \angle ADC = ۲۲/۵^\circ$$



۹- ماخ گزینه (د) صحیح است.

شرط $f(f(x)) = f(x)$ همارز آن است که اگر y در برد تابع f قرار داشته باشد، آنگاه $f(y) = y$. اگر برد f را با R_f نشان دهیم، سه حالت خواهیم داشت:

الف) $|R_f| = ۲$ در این حالت f روی R_f همانی است و به ازای تنها عضو خارج از R_f باید مقدار f را برابر با عضوی در R_f تعریف کنیم.

پس دو امکان برای f وجود دارد و چون $\binom{۳}{۲} = ۳$ امکان برای R_f وجود دارد پس ۲×۲ امکان در این حالت وجود دارد.

ب) $|R_f| = ۳$ در این حالت $R_f = A$ و f روی A همانی است و بنابراین تنها ۱ انتخاب وجود دارد.

ج) $|R_f| = ۱$ در این حالت f تابعی ثابت است و بنابراین، ۳ انتخاب برای f وجود دارد.

پس جمعا $۱ + ۳ + ۶$ یعنی ۱۰ انتخاب برای تابع f وجود دارد.

۱۰- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

اگر S مساحت مثلث ABC باشد، چون $h_a = a_b + h_c$ نتیجه می شود

$$\frac{۲S}{a} = \frac{۲S}{b} + \frac{۲S}{c}$$

و در نتیجه، $bc = ab + ac$. بنابراین

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ab + ۲ab = (a - b - c)^۲$$

پس $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.

۱۱- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید که

$$(۱۰^{۱۳۷۶} - \frac{۱}{۲})^۲ < a < (۱۰^{۱۳۷۶})^۲$$

بنابراین،

$$۲\times ۱۰^{۱۳۷۶} - ۱ < ۲\sqrt{a} < ۲\times ۱۰^{۱۳۷۶}$$

و در نتیجه،

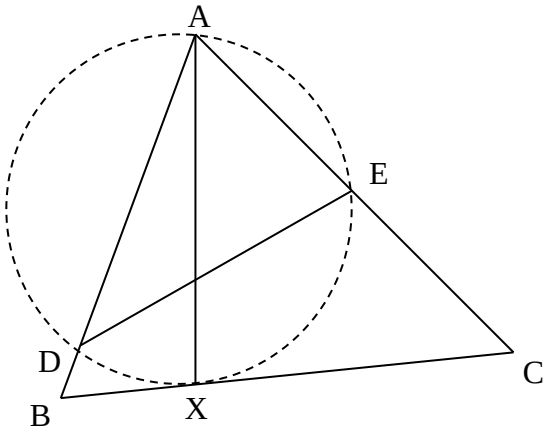
$$\left[۲\sqrt{a}\right] = ۲\times ۱۰^{۱۳۷۶} - ۱$$

۱۲- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

اگر شعاع دایره محیطی مثلث ADE را R بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$DE = ۲R\sin A$$

پس DE وقتی مینیمم می‌شود که R مینیمم شود (چون $\sin A$ ثابت است).



اما چون $h_a \le AX \le ۲R$ (h_a ارتفاع وارد بر ضلع BC است)، پس R وقتی مینیمم می شود که $۲R = h_a$ یعنی AX ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد.

۱۳- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

به هر مهره سفید، یک مهره سیاه می‌چسبانیم؛ حال ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید - سیاه داریم که می‌خواهیم در یک ردیف آنها را از چپ به راست بچینیم. هر روش چیدن این مهره‌ها دقیقاً متناظر است با یک روش چیدن مهره‌ها که پس از هر سفید، دست‌کم یک سیاه قرار داشته باشد. پس تعداد حالتها برابر است با $N = \frac{۱۰!}{۵!\times ۵!} = ۲۵۲$.

۱۴- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

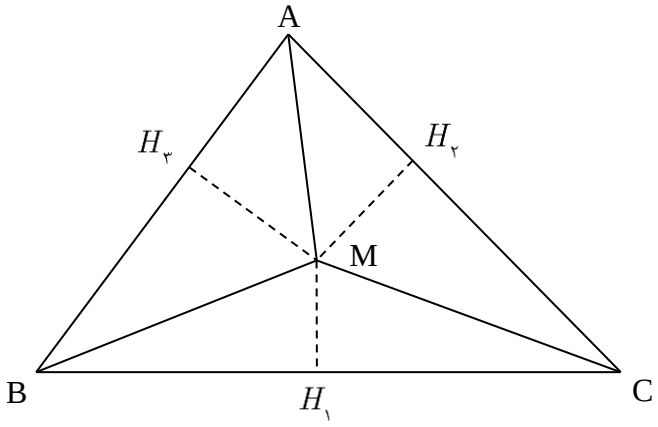
ادعا می‌کنیم که هر عدد خوب زوج لزوماً توانی از دو است. فرض کنید n یک عددی خوب و زوج باشد و فرض کنید $n = ۲^k m$ که در آن $k \ge ۱$ و m عددی فرد است. اگر n توانی از ۲ نباشد، $m > ۲$ و بنابراین، $(m,n) = m > ۱$ پس $m \in A$. همچنین $۲^k \in A_n$. امـا

$$(۲^k+m,n)=(۲^k+m,۲^k m)=(۲^k+m,m)=(۲^k,m)=۱$$

عدد ۲^k+m در A_n نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض $m>۱$ نادرست است. همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که هر توان ۲ عددی خوب است. اکنون باید تعداد توان‌های ۲ را بشماریم که از ۱۳۷۶ کوچکترند. اگر $۲^n<۱۳۷۶$، نتیجه می شود $n\le ۱۰$. پس ۱۰ عدد خوب زوج کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد.

۱۵- ماخ گزینه (د) صحیح است.

قرار می دهیم $a=BC, b=AC$ و $c=AB$ ، و مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان می دهیم.



در این‌صورت،

$$[MBC].[MAC].[MAB]=\frac{۱}{۸}abc.MH_۱.MH_۲.MH_۳$$

و چون a,b و c ثابت‌اند، حاصل‌ضرب $MH_۱.MH_۲.MH_۳$ وقتی ماکزیمم است که $[MBC].[MAC].[MAB]$ ماکزیمم باشد. اما چون $[MBC]+[MAC]+[MAB]=[ABC]$ مقداری ثابت است، پس حاصل‌ضرب بالا وقتی ماکزیمم است که

$$[MBC]=[MAC]=[MAB]=\frac{[ABC]}{۳}$$

پس M باید مرکز ثقل مثلث باشد.

۱۶- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید $x=dx'$ و $y=dy'$ که $(x',y')=۱$. پس $x'+y'+۲\sqrt{x'y'}=\frac{۱۳۷۶}{d}$ و چون $\sqrt{x'y'}$ صحیح است و x',y' نسبت به هم اول‌اند پس x' و y' هر دو مربع کامل هستند. فرض کنید $x'=u^۲$ و $y'=v^۲$ پس $(u+v)^۲=\frac{۱۳۷۶}{d}$ و با توجه به $۱۳۷۶=۲^۵\times ۴۳$ داریم $\frac{۱۳۷۶}{d}=۴,۱۶$ و از آنجا جوابهای $(u,v)=(۱,۱)$ و $(u,v)=(۱,۳)$ به دست می آیند که متناظر با $(x,y)=(۱۰۴,۱۰۴)$ و $(x,y)=(۲۶,۷۸)$ هستند.

۱۷- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید که f تابعی یک به یک است. در واقع، اگر $f(m)=f(n)$ آنگاه $ff(m)=ff(n)$. پس $۲m+۳=۲n+۳$ و در نتیجه، $m=n$. اکنون می توانیم بنویسیم

$$f(۰)+ff(۰)=۳$$

اگر $f(۰)=۰$، نتیجه می شود $۳=f(۰)+f(f(۰))=۰$ که تناقض است. پس همین طور که اگر $f(۰)=۰$، نتیجه می شود $f(۳)+۳=۳$ و بنابراین، $f(۳)=۰$. پس

$$۹=f(۳)+f(f(۳))=۰+۳=۳$$

که باز هم تناقض است. پس $f(۰)=۱$ یا $f(۰)=۲$. اگر $f(۰)=۲$، نتیجه می شود $f(۲)+۲=۳$ و بنابراین، $f(۲)=۱$ پس $f(۲)+f(۱)=۹$ و در نتیجه، $f(۱)=۸$. اما $f(۱)\le f(۱)+f(f(۱))=۵$ پس نتیجه می گیریم $f(۰)=۱$. اکنون به استقرا ثابت می کنیم که $f(n)=n+۱$ حکم به ازای $n=۰$ صحیح است. اگر تساوی به ازای n برقرار باشد، آنگاه

$$f(n+۱)=۲n+۳-f(n)=۲n+۳-(n+۱)=n+۲$$

پس تنها یک تابع در این معادله صدق می کند.

۱۸- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

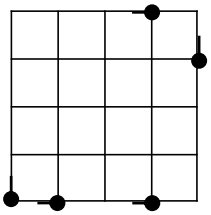
هیچ عدد سه رقمی با این خاصیت وجود ندارد. در واقع اگر $b^۲-۴ac=۹$ چند جمله ای $ax^۲+bx+c$ روی مجموعه اعداد صحیح به صورت $(px+q)(rx+s)$ تجزیه می شود. بنابراین،

$$\overline{abc}=۱۰۰a+۱۰b+c=(۱۰p+q)(۱۰r+s)$$

عددی مرکب خواهد بود.

۱۹- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که بیش از ۵ نقطه با این خاصیت نمی‌تواند وجود داشته باشد،



چون ۶ نقطه $\binom{۶}{۲}=۱۵$ فاصله به وجود می‌آورند و به سادگی می‌توان دید که در شکل بالا دقیقاً ۱۴ فاصله ناصفر متمایز وجود دارد.

شکل بالا ۵ نقطه را نشان می دهد که تمام فاصله ها در آن متمایزند.

۲۰- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

ادعا می کنیم که اگر $x\le ۱$، آنگاه $f(x)\ge ۲$. در واقع اگر $f(x)=۱$، آنگاه

$$f(x^۲) = f(x) + f(x) - ۱ = ۱$$

و به همین ترتیب، $f(x^۴) = f(x^۸) = \cdots = ۱$. پس به ازای تعدادی نامتناهی عدد طبیعی مانند y، $f(y) = ۱$ که با فرض (۲) مسأله تناقض دارد. از سوی دیگر از شرط (۳) نتیجه می شود

$$f(۳۰) = f(۱۵) + f(۲) - ۱ = f(۳) + f(۵) + f(۲) = ۶$$

اما چون $f(۲), f(۳), f(۵) \geq ۲$ و مجموع آنها برابر ۶ است، پس $f(۲) = f(۳) = f(۵) = ۲$.

۲۱- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید همه زیر مجموعه های ۴، ۵ و ۶ عضوی را انتخاب کنیم. تعداد این زیر مجموعه ها برابر است با

$$\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$$

و روشن است که هر دوتای آنها دست‌کم در ۲ عضو مشترک‌اند.

حال ادعا می‌کنیم که بیش از ۲۲ مجموعه نمی‌توان انتخاب کرد. اولاً در مجموعه‌های انتخاب شده $\varnothing$ و مجموعه‌های تک عضوی نمی‌توانند وجود داشته باشند. همچنین اگر مجموعه‌ای دو عضوی مثل $\{۱,۲\}$ در این زیر مجموعه‌ها باشد، بقیه باید همه شامل این زیر مجموعه ۲ عضوی باشند و بنابراین، تعداد کل مجموعه‌ها حداکثر $۲^۴ = ۱۶$ خواهد بود. همچنین اگر مجموعه‌های سه عضوی مثل $\{۱,۲,۳\}$ بین زیر مجموعه‌ها باشد، باز هم با استدلالی مشابه استدلال قبل می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان به بیش از ۲۲ مجموعه رسید.

۲۲- ماخ گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که $n = ۲$ عددی جالب است چون $d(d(d(۲))) = d(d(۲)) = ۲$ ولی $n^۳ = ۸$ جالب نیست چون $d(d(d(۸))) = d(۴) = ۳$ ولی $d(۳) = ۲ \neq ۳$.

۲۳- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

عمل $*$ را روی اعداد حقیقی چنین تعریف کنید:

$$x * y = x + y + xy$$

به آسانی می توان ثابت کرد که $*$ عملی جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است. بنابراین اعداد $a_۱, \ldots, a_n$ را به هر شکل و با هر ترتیب که با عمل $*$ ترکیب کنیم نتیجه نهایی به ترتیب انجام کار بستگی ندارد و A به طور منحصر به فرد توسط $a_۱, \ldots, a_n$ مشخص می‌شود.

۲۴- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

روشن است که لامپ شماره m به تعداد مقسوم‌علیه‌های m تغییر وضعیت می‌دهد. بنابراین چون در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش بوده‌اند، در پایان لامپهایی روشن خواهند بود که تعداد مقسوم علیه‌های آنها عددی فرد باشد. اما اگر

$$m = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

تجزیه m به عوامل اول باشد، در این‌صورت تعداد شمارنده‌های m برابر است با $d(m)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_s+1)$ و $d(m)$ فقط وقتی فرد خواهد بود که هر α_i زوج باشد، یعنی m مربع کامل باشد. پس تعداد لامپ‌های روشن برابر تعداد مربع‌های کامل کوچکتر از ۱۳۷۶ است. اگر $m^2<1376$ نتیجه می شود $m\leq 37$.

۲۵- ماخ گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که با انتخاب اعداد ۲۰,۲۹,۲۶,۲۳ و ۲۳ از ستونهای اول تا پنجم به عدد ۲۰ می‌رسیم. برای آنکه ثابت کنیم a نمی‌تواند از ۲۰ بزرگتر باشد، توجه کنید که از مربع 3×3 وسط باید دست‌کم یک عدد انتخاب شود و بزرگترین عدد در این مربع نیز ۲۰ است.

۲۶- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که زیر مجموعه $S=\{۵۰۱,۵۰۲,\ldots,۱۰۰۱\}$ که ۵۰۱ عضو دارد، در شرط مسأله صدق می کند. اگر $|S|>۵۰۱$، فرض کنید که t بزرگترین عضو S باشد. زوجهای

$$(۱,t-۱),(۲,t-۲),\ldots,(\left\lfloor\frac{t}{۲}\right\rfloor,\left\lceil\frac{t}{۲}\right\rceil)$$

زوج مرتب‌اند که مجموع مؤلفه‌ی اول و دوم هر یک از آنها برابر t است. بنابراین از هر زوج مرتب حداکثر یک مؤلفه‌ی آن می‌تواند در S باشد. چون همه اعداد $۱,۲,\ldots,t-۱$ در مولفه‌های این $\left\lfloor\frac{t}{۲}\right\rfloor$ زوج مرتب ظاهر شده‌اند، بنابراین $S\leq\left\lfloor\frac{t}{۲}\right\rfloor$. از فرض $|S|>۵۰۱$ نتیجه می‌شود $\left\lfloor\frac{t}{۲}\right\rfloor\geq ۵۰۲$ و بنابراین $t\geq ۱۰۰۴$ که تناقض است.

۲۷- ماخ گزینه (د) صحیح است.

می‌دانیم که n و $f(n)$ همواره باقیمانده مساوی در تقسیم بر عدد ۹ دارند. یعنی $n\overset{۹}{\equiv}f(n)$. اما،

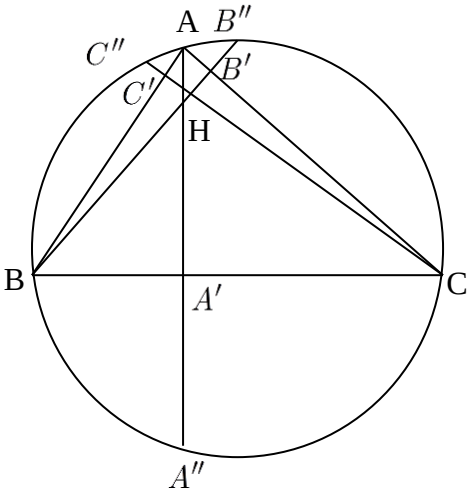
$$\begin{aligned}(۱۳)^{۷۶}&\overset{۹}{\equiv}۴^{۷۶}&&\overset{۹}{\equiv}(۴^۲)^{۳۸}\\&\overset{۹}{\equiv}(-۲)^{۳۸}&&\overset{۹}{\equiv}(۲^۳)^{۱۲}\times ۲^۲\\&\overset{۹}{\equiv}(-۱)^{۱۲}\times ۱۲&&\overset{۹}{\equiv}۴\end{aligned}$$

پس اگر $k=f(f\ldots f(n_۰)))\ldots)$، آنگاه $k\overset{۹}{\equiv}۴$.

اکنون توجه کنید که چون برای هر عدد مانند n که دست‌کم دو رقم داشته باشد، $f(n)<n$، در دنباله داده شده اعداد مرتباً کوچک می‌شوند تا به یک عدد یک رقمی برسیم این عدد یک رقمی لزوماً ۴ خواهد بود.

۲۸- گزینه (الف) صحیح است.

نقطه تلاقی ارتفاعها را H می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{AA''}{AA'} = ۱ + \frac{A'A''}{AA'} = ۱ + \frac{HA'}{AA'} = ۱ + \frac{HA'.BC}{AA'.BC}$$

و $\frac{BB''}{BB'}$ و $\frac{CC''}{CC'}$ را به همین ترتیب ساده می‌کنیم. اگر مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان دهیم، آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} &= ۳ + \frac{[BHC] + [AHC] + [AHB]}{[ABC]} \\ &= ۳ + \frac{[ABC]}{[ABC]} \\ &= ۴\end{aligned}$$

۲۹- گزینه (هـ) صحیح است.

توجه کنید که اگر m و k عددهایی طبیعی باشند، $۵^k + ۵^m \overset{۴}{\equiv} ۲$. اما هیچ عدد مربع کامل به صورت $۴r + ۲$ وجود ندارد. گزینه‌های (ب)، (ج) و (د) نیز با همنهشتی به پیمانه‌های ۳، ۵ و ۶ و دقت به این نکته که هیچ مربع کاملی به پیمانه این اعداد همنهشت با ۲ نیست رد می‌شوند.

۳۰- گزینه (الف) صحیح است.

از نابرابری کوشی-شوارتز نتیجه می‌شود،

$$(\frac{۱}{a_۱} + \cdots + \frac{۱}{a_{۱۳۷۶}})(a_۱ + \cdots + a_{۱۳۷۶}) \geq ۱۳۷۶^۲$$

و اگر معادله جواب داشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت $۱۳۷۶^۲ \geq ۱۳۷۶$ که تناقض است. پس این معادله جواب ندارد.