جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۴

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۲۵	-	۱۲۰

توضیحات مهم

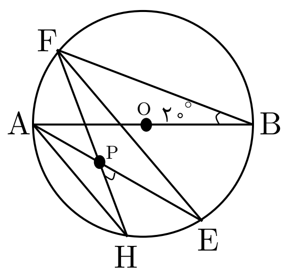
استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۲۵ سوال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\angle FBA = ۲۰^\circ$، در این‌صورت زاویه HPE برابر است با:



الف) ۲۰°
ب) ۲۵°
ج) ۳۰°
د) ۳۵°
هـ) ۴۰°

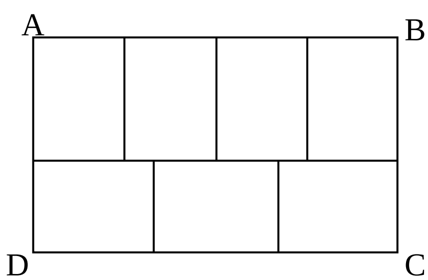
۲- باقیمانده تقسیم $۷ + ۵^{۲۲}$ بر ۸ برابر است با:

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۳- اگر $r^۲ - r - ۱۰ = ۰$، آنگاه در مورد $(r+۱)(r+۲)(r-۴)$ کدام‌یک از جملات زیر درست است؟

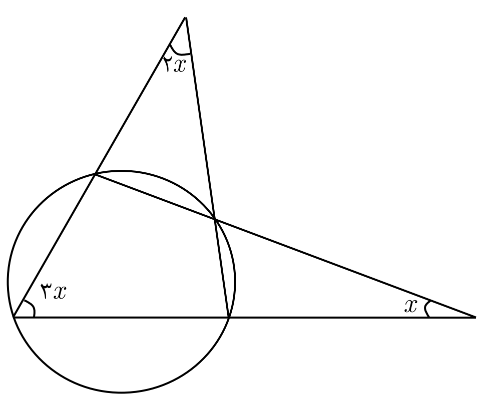
الف) عددی صحیح است. ب) مثبت و گنگ است. ج) منفی و گنگ است.
د) گویا اما غیر صحیح است. هـ) غیر حقیقی است.

۴- مستطیل $ABCD$ مانند شکل به هفت مستطیل مساوی کوچکتر تقسیم شده است. اگر مساحت $ABCD$ برابر ۳۳۶ سانتیمتر مربع باشد، در آن صورت محیط $ABCD$ برحسب سانتیمتر برابر کدام‌یک از اعداد زیر است؟



الف) ۷۶
ب) ۸۶
ج) ۹۶
د) ۱۰۶
هـ) ۱۱۶

۵- در شکل زاویه‌ی x برابر است با:



الف) $x = ۱۰^\circ$
ب) $x = ۱۵^\circ$
ج) $x = ۱۸^\circ$
د) $x = ۲۰^\circ$
هـ) $x = ۲۵^\circ$

۶- در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمره‌ی مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره‌ی منفی دارد (به سؤال‌های بدون جواب هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد). اگر نمره دانش‌آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش‌آموز به چند سؤال جواب نداده است؟ :

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ هـ) ۱۳

۷- در یک چهارضلعی محدب کدام‌یک از نقاط زیر دارای این خاصیت است که مجموع فواصل آن از چهار رأس چهارضلعی حداقل مقدار ممکن را دارد؟

الف) مرکز ثقل چهارضلعی ب) یکی از رأس‌های چهارضلعی ج) نقطه‌ای بیرون چهارضلعی
د) محل برخورد قطرهای چهارضلعی هـ) محل برخورد پاره‌خط‌هایی که اوساط اضلاع را به هم وصل می‌کنند.

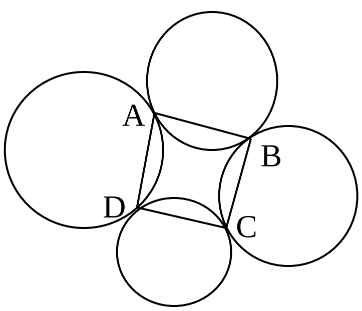
۸- کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به‌صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به‌صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند).

الف) ۴۵ ب) ۵۵ ج) ۱۰۰ د) ۱۳۵ هـ) ۴۹۵

۹- به ازای کدام مقدار n، معادله $n = x + y + xy$ در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد؟

الف) $n = ۱۰۰$ ب) $n = ۱۰۵$ ج) $n = ۱۱۰$ د) $n = ۱۱۵$ هـ) $n = ۱۲۰$

۱۰- چهار دایره $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ مطابق شکل در نقاط A، B، C و D بر هم مماس هستند. کدام‌یک از احکام زیر در مورد چهارضلعی $ABCD$ همواره درست است؟

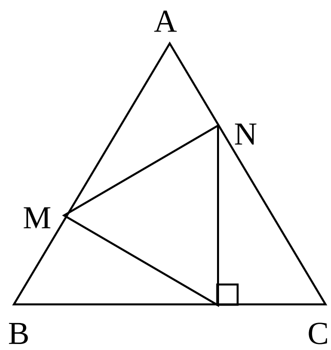


الف) $ABCD$ محیطی است.
ب) $ABCD$ محاطی است.
ج) $ABCD$ ذوزنقه است.
د) قطرهای $ABCD$ بر هم عمودند.
هـ) قطرهای $ABCD$ همدیگر را نصف می‌کنند.

۱۱- فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$، به‌ازای $k = ۱,۲,۳,\ldots$، عددی صحیح باشد. در این‌صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{F\left(\frac{۱}{n}\right)}{G\left(\frac{۱}{n}\right)}$ ، به‌ازای هر عدد طبیعی n، عددی صحیح است.
ب) F بر G بخش‌پذیر است.
ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به‌ازای هر عدد صحیح k، صحیح است.
د) $\lim_{k\to\infty} \frac{F(k)}{G(k)} = \infty$.
هـ) درجه‌ی $G(x)$ صفر یا یک است.

۱۲- مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط شده است به‌طوری که $NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با :



الف) $\frac{۱}{۴}$

ب) $\frac{۱}{۳}$

ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

د) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

هـ) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۱۳- اگر چندجمله‌ای $ax^۳ + bx + c$ بر $x^۲ + tx + ۱$ بخش‌پذیر باشد آنگاه، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) $a^۲ - ۲c \geq b$ ب) $a + c > ۳$ ج) $a - c \geq ab$

د) $a^۲ + c^۲ = ab$ هـ) $a^۲ - c^۲ = ab$

۱۴- فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نماینده‌ی عددی یک رقمی است:

$$\begin{array}{rccccc} & S & U & A & V & E \\ & & S & A & G & E \\ + & & S & A & G & E \\ \hline & ۴ & ۶ & ۹ & ۳ & ۳ \end{array}$$

در این‌صورت U کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ هـ) ۹

۱۵- چهاروجهی $ABCD$ داده شده است. چند صفحه می‌توان یافت که از چهار رأس این چهاروجهی به یک فاصله باشد؟

الف) یک صفحه ب) چهار صفحه ج) هفت صفحه

د) حداکثر شش صفحه هـ) $\binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۱}$ صفحه

۱۶- اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه

$$c^{4}-2(a^{2}+b^{2})c^{2}+a^{4}+a^{2}b^{2}+b^{4}=0$$

برقرار باشد، زاویه C برابر است با:

الف) دقیقاً 30°　ب) دقیقاً 60°　ج) دقیقاً 120°　د) 60° یا 120°　هـ) 30° یا 120°

۱۷- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که مجموع

$$1!+2!+\ldots+n!$$

مربع کامل باشد؟

الف) تعداد نامتناهی n　ب) فقط برای دو مقدار n　ج) فقط برای سه مقدار n
د) فقط برای چهار مقدار n　هـ) فقط برای پنج مقدار n

۱۸- چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه [مانند M] را بیابید به‌طوری که دو چهارضلعی $AMCD$ و $ABCM$ دارای مساحت‌های یکسان باشند.

الف) یک پاره‌خط است.　ب) کمانی از دایره است.　ج) خطی عمود بر BD است.
د) خطی موازی AC است.　هـ) خطی است که با یکی از اضلاع موازی است.

۱۹- در شکل، یک شبکه منظم مثلثی از نقاط شامل $\frac{10\times 11}{2}$ نقطه را مشاهده می‌کنید به‌طوری که هر ضلع آن شامل ۱۰ نقطه است. حداقل تعداد خطوطی را بیابید که از تمام این نقاط می‌گذرند.

الف) ۶
ب) ۷
ج) ۸
د) ۹
هـ) ۱۰

۲۰- فرض کنید «ناحیه اول»، آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آنها مثبت‌اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور xها درنظر می‌گیریم و آنها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور yها وصل می‌کنیم. از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید در ناحیه اول هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرند. تعداد نقاط این خطوط را در ناحیه اول بیابید.

الف) ۷۹۸۰۰　ب) ۴۰۰۰۰　ج) ۳۶۱۰۰　د) ۴۲۰۰۰　هـ) ۳۸۰۰۰

۲۱- فرض کنید $A\subseteq\{1,2,\ldots,16\}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. سه‌تایی $\{a,b,c\}$ را «اولیه» گوییم هرگاه هر دو عضوش نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه‌تایی اولیه نباشد آنگاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با :

الف) ۹　ب) ۱۰　ج) ۱۱　د) ۱۲　هـ) ۱۳

-۲۲ اگر در مثلث ABC داشته باشیم

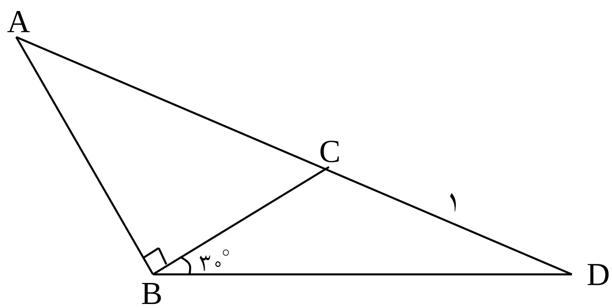
$$\angle B = ۲\angle C \qquad a = \lambda b \qquad (\lambda \in R)$$

آنگاه λ در کدام‌یک از فواصل زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $۰ < \lambda \leq ۱$ ب) $\frac{۱}{۲} < \lambda \leq ۱$ ج) $۰ < \lambda < \frac{۳}{۲}$

د) $۱ \leq \lambda < ۲$ هـ) $\frac{۱}{۲} \leq \lambda < \frac{۳}{۲}$

-۲۳ در شکل فرض کنید $AB = CD = ۱$. در این‌صورت طول AC برابر است با :



الف) $\sqrt{۲}$

ب) $\sqrt{۳}$

ج) $\frac{۳}{۲}$

د) $\sqrt[۳]{۳}$

هـ) $\sqrt[۳]{۲}$

-۲۴ اگر رابطه

$$\left(\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc}\right)^n + \left(\frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۲ac}\right)^n + \left(\frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab}\right)^n = ۱$$

برای $n = ۱$ صحیح باشد، آنگاه

الف) برای تمام nهای زوج صحیح است. ب) برای تمام nهای فرد صحیح است.

ج) برای تمام $n = ۳k$ صحیح است. د) برای تمام $n = ۳k + ۱$ صحیح است.

هـ) برای تمام $n = ۳k + ۲$ صحیح است.

-۲۵ می‌دانیم بین اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰، چهار عدد طبیعی موجودند به‌طوری که هر یک با مجموع مکعبات رقمهایشان برابرند و سه‌تا از آنها عبارت‌اند از ۴۰۷، ۳۷۱ و ۱۵۳. عدد چهارم را دقیقاً به‌دست آورید و بگویید در کدام‌یک از فاصله‌های زیر قرار دارد.

الف) $[۳۰۰, ۴۰۰]$ ب) $[۴۰۰, ۵۰۰]$ ج) $[۵۰۰, ۶۰۰]$

د) $[۶۰۰, ۷۰۰]$ هـ) $[۷۰۰, ۸۰۰]$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه (هـ) صحیح است.

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\angle HPE &= \angle PAH + \angle PHA\\ &= \angle EFH + \angle PHA\\ &= \angle FHA + \angle PHA\\ &= ۲\angle FBA\\ &= ۴۰^\circ\end{aligned}$$

۲- گزینه (الف) صحیح است.

چون $۵^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$، پس $۵^{۲۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$ و بنابراین، $۵^{۲۲} + ۷$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۳- گزینه (الف) صحیح است.

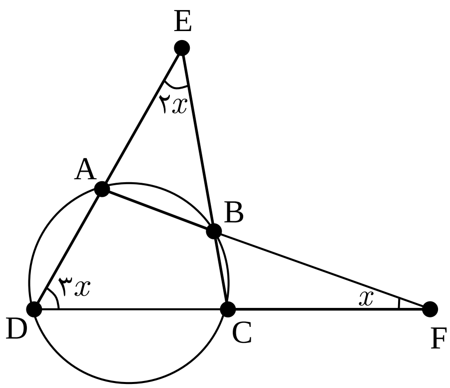
با توجه به فرض،

$$\begin{aligned}(r+۱)(r+۲)(r-۴) &= (r^۲+۳r+۲)(r-۴)\\ &= (r+۱۰+۳r+۲)(r-۴)\\ &= ۴(r+۳)(r-۴)\\ &= ۴(r^۲-r-۱۲)\\ &= ۴(r+۱۰-r-۱۲)\\ &= -۸\end{aligned}$$

۴- گزینه (الف) صحیح است.

طول مستطیل کوچک را با x و عرض آن را با y نشان دهید. در این صورت $۴y = ۳x$؛ اما چون مساحت مستطیل $ABCD$ برابر ۳۳۶ است، پس مساحت مستطیل کوچکتر برابر $\frac{۳۳۶}{۷} = ۴۸$ است. پس $xy = ۴۸$، یا $\frac{۳}{۴}y.y = ۴۸$. در نتیجه، $x = ۶$ و $y = ۸$ پس محیط مستطیل برابر ۷۶ خواهد بود.

۵- گزینه (د) صحیح است.



با توجه به شکل،

$$\angle ECD = ۱۸۰^\circ - \angle ECF = ۱۸۰^\circ - ۵x$$
$$\angle DAB = ۱۸۰^\circ - \angle BAE = ۱۸۰^\circ - ۴x$$
$$\angle ABC = \angle BAE + \angle AEB = ۶x$$

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ مجموع زوایای روبرو برابر ۱۸۰° است.

پس،

$$۱۸۰^\circ - ۴x + ۱۸۰^\circ - ۵x = ۶x + ۳x$$

و در نتیجه، $x = ۲۰^\circ$.

-۶ ماخ گزینه (ب) صحیح است.

اگر x تعداد جواب‌های مثبت و y تعداد جواب‌های منفی باشد، آنگاه $۷x - ۲y = ۸۷$ و $x + y \leq ۲۰$. توجه کنید که x و y صحیح و نامنفی‌اند. به‌سادگی می‌توان دید که $x = ۱۳$ و $y = ۲$ تنها جواب مسأله است پس دانش‌آموز با این شرایط، به ۵ سؤال پاسخ نداده است.

-۷ ماخ گزینه (د) صحیح است.

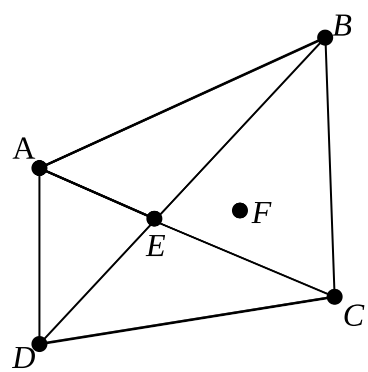
چهارضلعی محدب $ABCD$ و نقطه F را در صفحه آن در نظر بگیرید. محل برخورد قطرهای چهارضلعی را E بنامید. در این‌صورت، روشن است که

$$FA + FC \geq AC, \qquad B + FD \geq BD$$

بنابراین،

$$FA + FB + FC + FD \geq AC + BD$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $F = E$.



-۸ ماخ گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید عدد مورد نظر هم برابر با

$$n + (n + ۱) + \ldots + (n + ۸) = ۹n + ۳۶$$

و هم برابر با

$$m + (m + ۱) + \ldots + (m + ۹) = ۱۰m + ۴۵$$

باشد (n و m عددهای طبیعی‌اند). در این‌صورت،

$$۹n + ۳۶ = ۱۰m + ۴۵$$

یا

$$۹n - ۱۰m = ۹$$

یا

$$۱۰m = ۹(n - ۱)$$

پس $۱۰m$ | ۹، اما ۱۰ ∤ ۹ پس m مضربی از ۹ است. پس عدد مطلوب برابر است با

$$۱۰ \times ۹ + ۴۵ = ۱۳۵$$

۹- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

از فرض نتیجه می‌شود که

$$n + ۱ = (x + ۱)(y + ۱)$$

پس اگر $n + ۱$ عددی اول نباشد، معادله جواب دارد. بین گزینه‌های داده شده فقط در گزینه (الف)، $n + ۱ = ۱۰۱$ عددی اول است.

۱۰- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

روشن است که،

$$\angle A + \angle C = \frac{۱}{۲}(AB + AD) + \frac{۱}{۲}(BC + CD)$$
$$= \frac{۱}{۲}(AB + BC + CD + DA)$$

به همین ترتیب،

$$\angle B + \angle D = \frac{۱}{۲}(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA})$$

پس،

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۳۶۰ \Rightarrow \angle A + \angle C = ۱۸۰$$

پس چهارضلعی محاطی است.

۱۱- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

چندجمله‌ایی مانند $A(x)$ وجود دارد که

$$F(x) = G(x)A(x) + B(x), \qquad \deg B < \deg G$$

فرض کنید $B(x)$ متحد با صفر نباشد. در این‌صورت،

$$\frac{F(x)}{G(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{G(x)}$$

چون درجه B از درجه G کمتر است، وقتی x به بینهایت میل می‌کند $\frac{B(x)}{G(x)}$ به صفر میل می‌کند. پس برای اعداد طبیعی به اندازه کافی بزرگ، این کسر عددی صحیح نمی‌شود.

۱۲- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

اگر مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان دهیم، به سادگی می‌توان ثابت کرد که مثلث‌های AMN، NCP و MBP متساوی‌اند و $NP = ۲PC = \frac{۱}{۳}BC$.

$$\frac{[MPC]}{[ABC]} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

بنابراین،

$$[AMN] + [MBP] + [NPC] = \frac{۶}{۹}[ABC]$$

پس

$$[MNP] = \frac{۱}{۳}[ABC]$$

۱۳- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

به روش معمول چندجمله‌ای، $ax^۳ + bx + c$ را بر $x^۲ + tx + c$ تقسیم می‌کنیم.
نتیجه می‌شود

$$ax^۳ + bx + c = (ax - at)(x^۲ + tx + ۱) + (at^۲ + b - a)x + (at + c)$$

چون بنابر فرض، $(at^۲ + b - a)x + (at + c) = ۰$. پس،

$$at^۲ + b - a = ۰, \ \ at + c = ۰$$

از رابطه دوم نتیجه می‌شود $t = \frac{-c}{a}$ و سپس از رابطه اول نتیجه می‌شود

$$a(\frac{-c}{a})^۲ = a - b$$

و در نتیجه، $c^۲ = a^۲ - ab$.

۱۴- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

توجه کنید S یا ۳ است یا ۴. اگر $S = ۴$،

$$U + S + S = U + ۸$$

و چون رقم یکان این مجموع ۶ است، $U = ۸$ که به تناقض $S = ۳$ منجر می‌شود.
پس $S = ۳$ در این‌صورت،

$$U + S + S = U + ۶$$

پس U فقط می‌تواند ۸ یا ۹ باشد تا «نقلی» حاصل از موضع صدگان برابر با ۱۰ شود و ۸ بین گزینه‌ها نیست.

۱۵- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

به آسانی می‌توانید ثابت کنید که فقط دو دسته صفحه با شرایط مطلوب وجود دارند:

الف) سه رأس در یک طرف و یک رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر سه رأسی از چهاروجهی که انتخاب کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد.

پس تعداد این صفحات برابر است با

$$\binom{۴}{۳} = ۴$$

ب) دو رأس در یک طرف و دو رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر دو رأسی از چهاروجهی که انتخاب می‌کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد.

پس تعداد این صفحه‌ها برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\binom{۴}{۲} = ۳$$

بنابراین تعداد کل صفحه‌هایی که از چهار رأس به یک فاصله‌اند ؟؟؟ است.

۱۶- ماخ گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید

$$\begin{aligned}
&c^۴ - ۲(a^۲ + b^۲)c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ \\
&= (c^۲ - (a^۲ + b^۲))^۲ - (a^۲ + b^۲)^۲ + (a^۲ + b^۲)^۲ - a^۲b^۲ \\
&= (c^۲ - (a^۲ + b^۲ - ab))(c^۲ - (a^۲ + b^۲ + ab)) \\
&= ۰
\end{aligned}$$

پس

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ + ab \qquad \text{یا} \qquad C^۲ = a^۲ + b^۲ - ab$$

پس بنابر قضیع کسیونوسها، $\cos C = \pm\frac{۱}{۲}$. بنابراین، $C = ۶۰^\circ$ یا $C = ۱۲۰^\circ$.

۱۷- ماخ گزینه (د) صحیح است.

این عدد به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۳$ مربع کامل است. و به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۴$ مربع کامل نیست. به‌ازای $n \geq ۵$ رقم یکان این عدد ۳ است و در نتیجه مربع کامل نیست.

۱۸- گزینه (د) صحیح است.

در اینجا باید مساحت را به‌عنوان مساحت جهت‌دار تعبیر کنیم و می‌دانیم که اگر σ مساحت جهت‌دار $PQRS$ را نشان دهد، آن‌گاه $\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QS}=\sigma\vec{n}$ که n بردار عمود بر صفحه است. پس M دارای خاصیت مسأله است اگر و تنها اگر $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BM}$ و یا معادلاً $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{MN}=۰$ که N وسط پاره‌خط BD است. پس مکان M خطی به موازات AC است.

۱۹- گزینه (هـ) صحیح است.

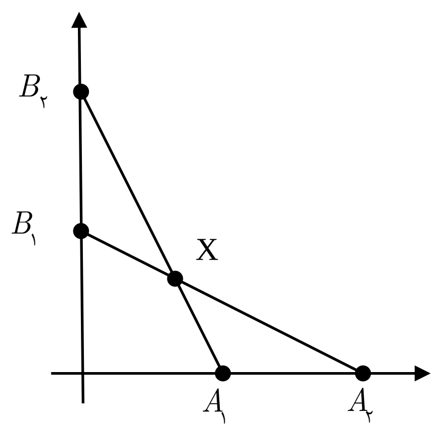
با ۱۰ خط به آسانی می‌توان همه نقطه‌ها را پوشاند. این کار با کمتر از ۱۰ خط ممکن نیست. توجه کنید که هر خط حداکثر ۱۰ نقطه را می‌پوشاند. وقتی یک خط رسم شود، هر خط دیگر حداکثر ۹ نقطه دیگر را می‌پوشاند و با استدلال مشابه دیده می‌شود که i خط حداکثر

$$۱۰+۹+\cdots+(۱۱-i)$$

نقطه را می‌پوشانند. چون تعداد نقطه‌ها ۵۵ است، $i\geq ۱۰$.

۲۰- گزینه (ج) صحیح است.

با انتخاب دو نقطه روی محور xها و دو نقطه روی محور yها دقیقاً یک نقطه تقاطع به‌دست می‌آید.



با توجه به فرض مسأله، نقطه‌های تقاطع به‌دست آمده دوبه‌دو متمایزند. پس مجموعاً $\binom{۲۰}{۲}^{۲}=۳۶۱۰۰$ نقطه تقاطع به‌دست می‌آید.

۲۱- گزینه (ج) صحیح است.

مجموعه $A=\ ۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۴,۱۵,۱۶$ دارای خاصیت مسأله است. هیچ مجموعه ۱۲ عضوی با خاصیت مورد نظر وجود ندارد. توجه کنید که در مجموعه اعداد ۱ تا ۱۶ هفت عدد غیرمرکب وجود دارد (شش عدد اول و عدد ۱). هر مجموعه ۱۲ عضوی باید شامل دست کم سه تا از این هفت عدد باشد بنابراین دارای سه عدد دوبه‌دو نسبت به هم اول است.

۲۲- گزینه (ج) صحیح است.

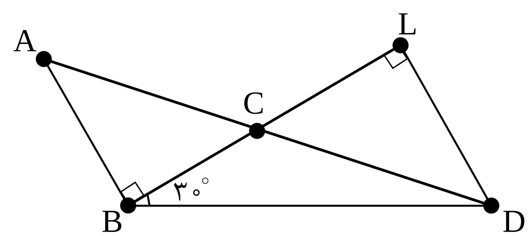
قرار دهید $x = \cos C$ در این‌صورت، چون $C < ۹۰^\circ$، پس $۰ < x < ۱$. می‌توانیم بنویسیم

$$\lambda = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin ۳C}{\sin ۲C} = \frac{۳\sin C - ۴\sin^۳ C}{۲\sin C\cos C}$$
$$= \frac{۳ - ۴\sin^۲ C}{۲\cos C} = \frac{۳ - ۴(۱ - x^۲)}{۲x} = \frac{۴x^۲ - ۱}{۲x}$$
$$= ۲x - \frac{۱}{۲x} < \frac{۳}{۲}$$

و در ضمن وقتی $x \to ۱$ و یا $C \to ۰$، مقدار λ به $\frac{۳}{۲}$ نزدیک می‌شود.

۲۳- گزینه (هـ) صحیح است.

قرار می‌دهیم، $BD = x$. در شکل زیر دو مثلث CDL و ABC متشابه‌اند.



چون زاویه B برابر ۳۰° است پس داریم $LD = \frac{x}{۲}$ و در نتیجه $AC = \frac{۲}{x}$. حال بنابر قانون کسینوسها در مثلث ABD داریم

$$۱ + x^۲ - ۲x\cos ۱۲۰^\circ = (۱ + \frac{۲}{x})^۲$$

پس،

$$x^۴ + x^۳ = ۴(x + ۱)$$

و در نتیجه $x = \sqrt[۳]{۴}$ و $AC = \frac{۲}{x} = \sqrt[۳]{۲}$.

۲۴- گزینه (ب) صحیح است.

بنابر فرض،

$$\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} + \frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۲ac} + \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} = ۱$$

پس

$$ab^۲ + ac^۲ + ba^۲ + bc^۲ + ca^۲ + cb^۲ - (a^۳ + b^۳ + c^۳) = ۲abc$$

و در نتیجه،

$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = ۰$$

پس یکی از سه حالت $a+b=c$, $a+c=b$ یا $b+c=a$ اتفاق می‌افتد. فرض کنید $a+b=c$. در این‌صورت از سه کسر فوق دو تا برابر ۱+ و یکی برابر ۱− خواهد شد. پس برای تمام nهای فرد تساوی برقرار است.

۲۵- گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که $۳۷۱ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۱^۳$. پس

$$۳۷۰ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۰^۳$$

بنابراین، عدد دیگر ۳۷۰ است و در بازه $[۳۰۰, ۴۰۰]$ قرار دارد.

بنام خدا

ماخ

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول (آزمون بعد از ظهر)
سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۴

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
-	۳	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور (آزمون بعدازظهر)، آبان ماه ۱۳۷۴

۱- اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند، مقدار مینیمم عبارت زیر را پیدا کنید.

$$S=\left(\frac{a+b}{c}\right)^{2}+\left(\frac{a+c}{b}\right)^{2}+\left(\frac{b+c}{a}\right)^{2}$$

۲- فرض کنید Γ دایره‌ی محیطی مثلث مفروض ABC باشد. P را نقطه‌ای دلخواه روی کمان ACB متمایز از نقاط A، B و C فرض می‌کنیم. X و Y را به ترتیب دونقطه روی AP و BP یا امتداد آن‌ها در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $AX=AC$ و $BY=BC$. ثابت کنید با تغییر دادن P، XY از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۳- فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه با حداقل ۱۲ عضو و $A_1, A_2, \ldots$ و A_{1374}، زیرمجموعه‌هایی ۱۲ عضوی از آن باشند (A_iها لزوماً متمایز نیستند). ثابت کنید دو زیرمجموعه‌ی X_1 و X_2 وجود دارند به‌طوری‌که $X_1\cap X_2=\varnothing$ و $X=X_1\cup X_2$ و به ازای هر $1\le i\le 1374$، $A_i\not\subseteq X_1$ و $A_i\subseteq X_2$.

حل مسأله‌های مرحله‌ی اول سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور (آزمون بعدازظهر)، آبان ماه ۱۳۷۴

۱- ادعا می‌کنیم $S \geq ۱۲$ و به وضوح بازای $a=b=c=S$، مقدار S برابر ۱۲ است. با استفاده از نامساوی حسابی – هندسی داریم

$$\begin{aligned}
&(\frac{a+b}{c})^۲+(\frac{a+c}{b})^۲+(\frac{b+c}{a})^۲ \\
&\qquad = \frac{a^۲}{c^۲}+\frac{ab}{c^۲}+\frac{ab}{c^۲}+\frac{b^۲}{c^۲}+\frac{a^۲}{b^۲}+\cdots+\frac{c^۲}{a^۲} \\
&\qquad \geq ۱۲\sqrt[۱۲]{\frac{a^۲}{c^۲}+\frac{ab}{c^۲}+\cdots+\frac{c^۲}{a^۲}} \\
&\qquad = ۱۲\times ۱ = ۱۲
\end{aligned}$$

۲- D را قرینه C نسبت به خط AB می‌گیریم. داریم

$$\angle CDY = \frac{۱}{۲}\angle CBY \qquad \text{(زاویه محاطی)}$$

$$\angle CDX = \frac{۱}{۲}\angle CAX \qquad \text{(زاویه محاطی)}$$

ولی در دایره محیطی مثلث ABC چون $\angle CAP, \angle CBP$ مقابل یک کمان قرار دارند، $\angle CAX = \angle CBY$ و در نتیجه $\angle CDX = \angle CDY$ یعنی D, X, Y روی یک خط راستند. پس همه خط‌هایی که مانند XY هستند از D می‌گذرند.

۳- **برهان خلف.** اگر چنین مجموعه‌هایی وجود نداشته باشند آنگاه برای هر افراز X به دو مجموعه $X_۱, X_۲$ و j, i وجود دارند به طوری که . بدون کاسته شدن از کلیت مساله می‌توان فرض کرد که X مجموعه‌ای متناهی است زیرا قرار می‌دهیم $X' = \bigcup_{i=۱}^{۱۳۷۴} A_i$ و به جای X با X' کار می‌کنیم. فرض کنید $|X| = n$، در این صورت تعداد افرازهای X به دو مجموعه $X_۱, X_۲$ برابر است با ۲^n . حال تعداد حالاتی را می‌شماریم که X به دو مجموعه $X_۱, X_۲$ افراز شده است به طوری که بازای iای ثابت $A_i \subseteq X_۱$ یا $A_i \subseteq X_۲$. اگر $A_i \subseteq X_۱$، آنگاه برای $X_۱$، $۲^{n-۱۲}$ حالت موجود است و با مشخص شدن $X_۱, X_۲$ نیز مشخص می‌شود. به همین ترتیب اگر $A_i \subseteq X_۲$ آنگاه برای $X_۲$، $۲^{n-۱۲}$ حالت موجود است و با مشخص شدن $X_۱, X_۲$ معلوم است. بنابراین تعداد حالات بالا حداکثر برابر $۱۳۷۴\times ۲\times ۲^{n-۱۲}$ است ولی

$$۱۳۷۴\times ۲\times ۲^{n-۱۲} = ۱۳۷۴\times ۲^{n-۱۱} < ۲^{۱۱}\times ۲^{n-۱۱} = ۲^n$$

پس لااقل یک حالت باقی می‌ماند که در شرایط مساله صدق می‌کند.