جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
دوازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول دوازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی،
دانش‌آموزان کشور، آبان ماه ۱۳۷۳

۱- فرض کنیم a، b و c اعداد حقیقی باشند که $۹a+۱۱b+۲۹c=۰$
ثابت کنید $ax^۳+bx+c=۰$ در $[۰\ ,\ ۲]$ یک ریشه دارد.

۲- اگر a و b اعداد طبیعی [با خاصیت] $a>b$ [بوده]، n یک عدد طبیعی باشد طوری که $\frac{a+n}{b}$ و $\frac{b+n}{a}$ اعداد طبیعی باشند و $d=(a,b)$، ثابت کنید

$$۲d \leq (n+۱)\sqrt{a-b}$$

۳- روی مربع $ABCD$ نقاط K و N روی AB و AD به ترتیب داده‌شده‌اند به‌طوری‌که

$$AK \times AN = ۲BK \times DN$$

اضلاع CK و CN قطر BD را در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید نقاط K، L، M، N و A روی یک دایره هستند.

۴- تعداد سی‌وسه عدد طبیعی داده‌شده است که عوامل اول آن‌ها فقط از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تشکیل‌شده است. ثابت کنید حاصل‌ضرب حداقل دوتای آن‌ها مربع کامل است.

۵- یک نقطه‌ی p درون یک $۲n$ ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطه‌ی p وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند.
ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ‌یک از این خطوط آن را قطع نمی‌کند. (قطع کردن امتداد اضلاع موردنظر نیست).

۶- صفحه‌ی P و نقطه‌ی M روی آن و دونقطه‌ی A و B در یک‌طرف آن مفروض‌اند. از نقطه‌ی M خطی در صفحه P رسم کنید که از A و B به یک‌فاصله باشد.

حل مسأله‌های مرحله اول دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آبان ماه ۱۳۷۳

۱- اگر $f(x)=ax^3+bx+c$، داریم $f(0)=c$ و $f(2)=8a+2b+c$. در این صورت

$$\begin{aligned}0&=9a+11b+29c\\&=f(0)+f(2)+a+9b+27c\\&=f(0)+f(2)+27\left(\frac{a}{27}+\frac{b}{3}+c\right)\\&=f(0)+f(2)+27f\left(\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

لذا $f(0)+27f(\frac{1}{3})+f(2)=0$.

اگر یکی از مقادیر $f(0)$ و $f(2)$ و $f(\frac{1}{3})$ صفر باشد، مسأله حل شده است؛ در غیر این صورت دو تا از این مقادیر دارای علامتهای مختلفی هستند و در نتیجه، معادله یک ریشه در یکی از فواصل $[0,\frac{1}{3}]$، $[\frac{1}{3},2]$ و یا $[0,2]$ دارد.

۲- داریم

$$\frac{a+n}{b}-\frac{b+n}{a}=\frac{a^2-b^2+n(a-b)}{ab}$$

چون $d^2|ab$، $d^2\mid a^2$ و $d^2\mid b^2$؛ بنابراین $d^2\mid n(a-b)$ و در نتیجه

$$d^2\le n(a-b)\Rightarrow d\le\sqrt{n(a-b)}$$

$$\sqrt{n}\le\frac{n+1}{2}\quad\Rightarrow d\le\frac{n+1}{2}\sqrt{a-b}$$

$$\Rightarrow 2d\le(n+1)\sqrt{a-b}$$

۳- ضلع مربع را برابر یک واحد می گیریم. داریم

$$\angle BKC+\angle DNC=\frac{3\pi}{4}$$

زیرا اگر بگیریم

$$\begin{aligned}a&=BK=\cot g\angle BKC\\b&=DN=\cot g\angle DNC\end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $(1-a)(1-b)=2ab$،

$$tg(\angle BKC+\angle DNC)=\frac{a+b}{ab-1}=-1=tg\frac{3\pi}{4}$$

یعنی $\angle BKC+\angle DNC=\frac{3\pi}{4}$. حال داریم

$$\angle BLK=\frac{3\pi}{4}-\angle BLK=\angle DNC=\angle BCM=\angle BAM$$

پس

$$\angle KLM + \angle KAM = \angle KLM + \angle BLK = \pi$$

پس M، L، K و A روی یک دایره هستند. همچنین L، M ، N و A روی یک دایره هستند. بنابراین N، M، L و K و A روی یک دایره هستند.

۴- فرض کنید اعداد مورد نظر $n_۱$، $n_۲$، ... $n_{۳۳}$ باشند و

$$n_i = ۲^{ai} \times ۳^{bi} \times ۵^{ci} \times ۷^{di} \times ۱۱^{ei}$$

داریم

$$n_i \times n_j = ۲^{ai+aj} \times ۳^{bi+bj} \times ۵^{ci+cj} \times ۷^{di+dj} \times ۱۱^{ei+ej}$$

$n_i \times n_j$ وقتی مربع کامل است که توانهای عوامل اول آن زوج باشند؛ یعنی (ai, aj) و (bi,bj) و (ci,cj) و (di,dj) و (ei,ej) زوجیت یکسان داشته باشند.

حال برای هر پنج تایی $T_k = (a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$، که در آن $k = ۱,۲,\ldots,۳۳$ ، قرار می‌دهیم

$$a'_k = a_k \bmod ۲, \qquad b'_k = b_k \bmod ۲, \qquad c'_k = c_k \bmod ۲$$
$$d'_k = d_k \bmod ۲, \qquad e'_k = e_k \bmod ۲$$

که منظور از $a_k \bmod ۲$ باقیمانده a_k بر ۲ است. سپس $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ را با $(a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, e'_k)$ جایگزین می‌کنیم. ولی هر a'_k، b'_k، c'_k، d'_k و e'_k برابر ۰ یا ۱ است و تعداد پنج تاییهای $(a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, e'_k)$ برابر $۲^۵ = ۳۲$ می شود. در نتیجه، دو پنج تایی $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ و $(a_r, b_r, c_r, d_r, e_r)$ وجود دارند به طوری که $a_r \equiv a_k \pmod ۲$، $b_r \equiv b_k \pmod ۲$، $c_r \equiv c_k \pmod ۲$، $d_r \equiv d_k \pmod ۲$ و $e_r \equiv e_k \pmod ۲$ یعنی $n_r \times n_k$ مربع کامل است.

۵- از یک راسی به P وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که یکی از اضلاع را قطع کرده باشد. $۲n - ۱$ رأس باقی می‌ماند که در دو طرف این خط واقعند. بنابراین تعدادی از راسها در یک طرف و تعدادی در طرف دیگر قرار می‌گیرند و تعداد راسهای یک طرف بیش از طرف دیگر است. خطوطی که از راسهای طرف کمتر به P وصل می‌شوند، اضلاع طرف دیگر را که بیشتر هستند، قطع می‌کنند. لذا در طرفی که بیشتر راس دارد یک ضلع وجود دارد که به وسیله این خطوط قطع نمی‌شود.

۶- صفحه عمود منصف AB را رسم می‌کنیم تا P را در خط Δ قطع کند. سپس از B، C (وسط AB) و A بر صفحه P عمود می‌کنیم تا آن را به ترتیب در B'، C' و A' قطع کنند. حال به قطر MC' دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ را در N قطع کند. خط MN جواب است. از وسط A و B به MN عمود می‌کنیم تا آن را در K و F قطع کند. بنابر قضیه سه عمود، $A'K$ و $B'K$ نیز بر MN عمودند. حال از C' به N وصل می‌کنیم؛ چون N در نیمدایره محاط شده است، پس $C'N$ بر MN عمود است. ولی $B'F$ و $C'N$، $A'K$ چون هر سه بر MN عمودند، باهم موازی هستند و چون C' وسط $A'B'$ است، لذا N نیز وسط KF است. اما N روی Δ یعنی صفحه عمود منصف AB است، پس $NB = AN$. حال دو مثلث BFN و AKN برابرند، زیرا $NB = AN$، $NK = NF$ و $F = K = ۹۰^\circ$. پس $BF = AK$ در نتیجه BF و AK برابر خواهند شد؛ لذا خط MN مطلوب است.

اگر دایره، خط Δ را در دو نقطه قطع کند، دو جواب داریم، اگر Δ بر دایره مماس باشد یک جواب داریم و اگر این دو یکدیگر را قطع نکنند، جوابی نخواهیم داشت.