جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

ماخ

**اینجانب ..... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء**

---

**اینجانب ..... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء**

# سی و یکمین دوره المپیاد فیزیک

## تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۴ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۱۸۰ دقیقه

**نام و نام خانوادگی :**

**شماره پرونده:** **استان:**

**کد ملی:** **منطقه:**

**نام پدر:** **پایه تحصیلی:**

**نام مدرسه:**

شماره صندلی

**حوزه:**

## توضیحات مهم

**استفاده از ماشین حساب ممنوع است**

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.

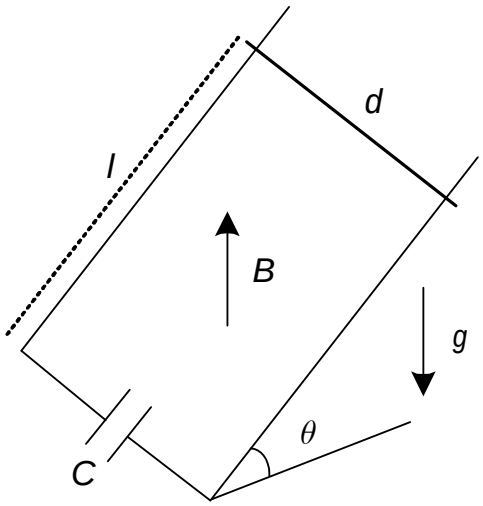
۹- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

در صورت لزوم از این
صفحه به عنوان چرک
نویس استفاده کنید

مطالب این صفحه
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**۱)** دو ریل موازی و بدون اصطکاک به فاصلهٔ $d$ از یکدیگر بر روی سطح شیب‌داری که زاویهٔ آن با افق $\theta$ است، قرار دارند. میله‌ای به جرم $m$ مطابق شکل بر روی این ریل‌ها به پایین سر می‌خورد. شتاب گرانش، $g$، رو به پایین و میدان مغناطیسی یکنواخت $B$ رو به بالا است. انتهای ریل‌ها در پایین به صفحات خازنی به ظرفیت $C$ متصل هستند. میله، ریل‌ها و سیم‌های اتصال همگی بدون مقاومت هستند. میله در لحظهٔ $t=0$ به فاصلهٔ $l$ از پایین ریل‌ها است و در همین لحظه از حال سکون رها می‌شود.




**آ)** سرعت رسیدن میله به انتهای ریل‌ها را به دست آورید.

**ب)** مدت زمان لازم برای رسیدن میله به انتهای ریل‌ها را به دست آورید.

**پ)** میزان بار ذخیره شده در خازن در این مدت را محاسبه کنید.

**ت)** به ازای $\theta = 30^\circ$، $m = 0{,}5\ \mathrm{g}$، $d = 8\ \mathrm{cm}$، $l = 10\ \mathrm{cm}$، $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ و $B = 1\ \mathrm{T}$ و $C = 10000\ \mu\mathrm{F}$، مقادیر عددی کمیت‌های خواسته شده در قسمت‌های آ) تا پ) را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**پاسخ سوال ۱** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

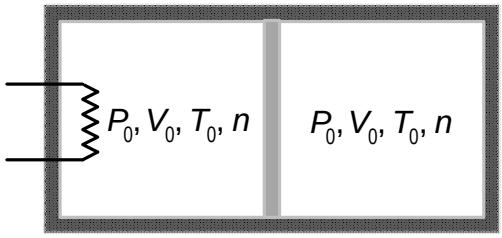
**ادامه پاسخ سوال ۱** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۱** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**۲)** استوانه‌ای که دیواره‌های آن کاملاً عایق گرما است توسط یک پیستون بدون اصطکاک و عایق گرما به دو نیمهٔ مساوی تقسیم شده است. هر نیمهٔ استوانه محفظهٔ بسته‌ای به حجم $V_0$ محتوی $n$ مول گاز کامل در فشار $P_0$ و دمای $T_0$ است. بنا به تعریف، نسبت $C_P / C_V$ ضریب اتمیسیته نام دارد که با $\gamma$ نشان داده می‌شود و در این مسئله $1{,}5$ $(\gamma = 3/2)$ فرض می‌شود. $C_P$ و $C_V$ به ترتیب ظرفیت گرمایی مولی گاز در فشار و حجم ثابت هستند. به کمک یک گرمکن برقی مقداری گرما به گاز محفظهٔ سمت چپ می‌دهیم که باعث انبساط آن می‌شود. در حالت تعادل فشار گاز در هر طرف به $27P_0 / 8$ می‌رسد. با توجه به این که برای گاز کامل در فرایند بی‌دررو کمیت $PV^\gamma$ ثابت است، کمیت‌های زیر را بر حسب $R$ ثابت گازها، $T_0$ و $n$ به دست آورید.




**آ)** دمای مطلق نهایی گاز سمت راست.

**ب)** کار انجام شده روی گاز سمت راست.

**پ)** دمای مطلق نهایی گاز سمت چپ.

**ت)** گرمای داده شده به گاز سمت چپ.

برای گاز کامل تک اتمی $\gamma = 5/3$ و برای گاز کامل دو اتمی $\gamma = 7/5$ است.

**ث)** فرض کنید $n_1$ مول گاز کامل تک اتمی را با $n_2$ مول گاز کامل دو اتمی مخلوط کرده‌ایم. نسبت $n_2 / n_1$ چقدر باشد تا $\gamma = 3/2$ شود؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان
چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**پاسخ سوال ۲** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

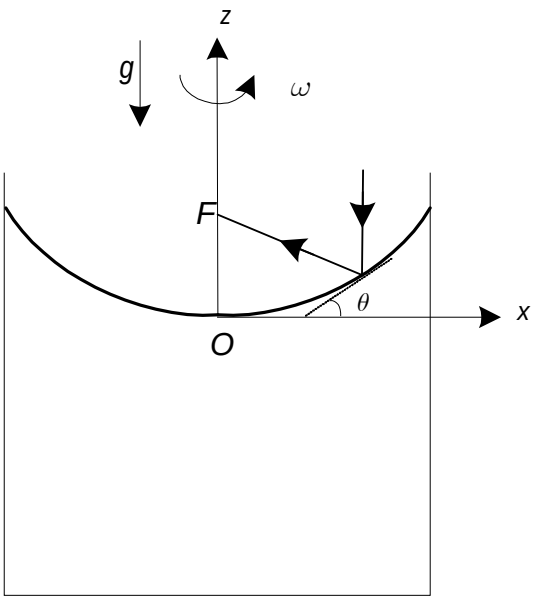
**ادامه پاسخ سوال ۲** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۲** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**۳)** استوانه‌ای قائم حاوی جیوه حول محور تقارن خود (محور $z$ در شکل) با سرعت زاویه‌ای $\omega$ می‌چرخد. شتاب گرانش $g$ در راستای محور $z$ و رو به پایین است. بر اثر چرخش، جیوه در قسمت میانی فرورفته می‌شود و در کناره‌های استوانه بالا می‌آید، به طوری که برش قائم دستگاه در صفحه‌ی $x-z$ مطابق شکل است. از هر نوع اثر موئینگی چشم بپوشید.




**آ)** نقطه‌ای روی سطح جیوه بگیرید و مختصات آن را $x$ و $z$ بنامید. فرض کنید مماس بر سطح جیوه در این نقطه با امتداد افق زاویهٔ $\theta$ بسازد. اگر جزء کوچکی از جیوه را در این نقطه در نظر بگیرید، سایر اجزاء به آن نیرو وارد می‌کنند که برآیند آن‌ها عمود بر سطح جیوه است. با توجه به این نکته $\tan\theta$ را به دست آورید.

**ب)** منحنی $x-z$ این مسئله از نوع $z=ax^2$ است که تانژانت مماس بر آن در هر نقطه $2ax$ است. با توجه به این که فشار در نقطه‌ای به عمق $h$ از سطح آزاد مایع به اندازه‌ی $\rho gh$ از فشار در سطح آن بیشتر است و سطح آزاد مایع یک سطح هم‌فشار است، رابطه‌ای برای $P(x,z)$، فشار در نقاط داخل مایع بنویسید. فشار هوا را $P_0$ بگیرید.

**پ)** فرض کنید یک دسته پرتو از بالا به پایین به موازات محور $z$ به سطح جیوه که مانند آینه عمل می‌کند، بتابد. هر جزء کوچک از سطح جیوه مانند یک آینه تخت است که زاویه‌های تابش و بازتابش از روی آن با هم برابرند. یک پرتو دلخواه در فاصله‌ی $x$ از محور $z$ در نظر بگیرید و محل برخورد پرتو بازتابیده با محور $z$ که در شکل با $F$ نشان داده شده را به دست آورید.

**ت)** می‌توان قسمت کوچکی از سطح جیوه را در گودترین نقطه مانند سطح یک کره تصور کرد. شعاع این کره را بر حسب پارامترهای مسئله حساب کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**پاسخ سوال ۳** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

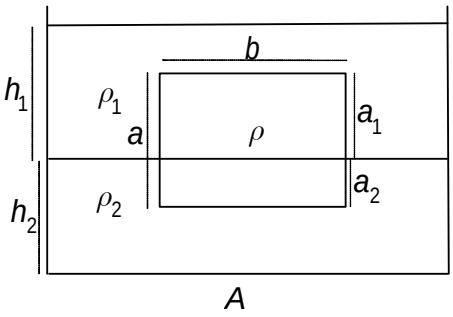
**ادامه پاسخ سوال ۳** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۳** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**۴)** در ظرف شکل مقابل دو مایع مخلوط‌نشدنی (مثل آب و روغن) به چگالی‌های $\rho_1$ و $\rho_2$ ($\rho_2 > \rho_1$) روی هم قرار گرفته‌اند. یک قطعه مکعب مستطیل به ابعاد $a$، $b$ و $c$ که چگالی آن $\rho$ است و $\rho_1 < \rho < \rho_2$ داخل این سامانه قرار می‌گیرد به طوری که یال $a$ در امتداد قائم باشد. مساحت کف ظرف $A$ است و $a < b < c$.




**آ)** طول‌های $a_1$ و $a_2$ از مکعب مستطیل که در مایع‌های به چگالی $\rho_1$ و $\rho_2$ قرار می‌گیرد را بر حسب داده‌های ذکر شده حساب کنید.

**ب)** فرض کنید کف ظرف تراز صفر انرژی پتانسیل گرانشی باشد. با توجه به این که انرژی پتانسیل یک مکعب مستطیل $mgh$ است که $h$ ارتفاع مرکز آن مکعب مستطیل از تراز صفر است. انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه را در حالت یاد شده حساب کنید و آن را $U_a$ بنامید. ارتفاع مایع‌ها را مطابق شکل $h_1$ و $h_2$ بگیرید.

**پ)** انرژی پتانسیل یک مکعب مستطیل را در حالت‌هایی که یال $b$ و یا یال $c$ در راستای قائم باشند نیز حساب کنید. مقادیر $U_a$، $U_b$ و $U_c$ را به ترتیب بزرگی معرفی کنید.

**ت)** در همان حال که یال $a$ در امتداد قائم است، مکعب مستطیل به اندازهٔ طول کوچک $x$ در راستای قائم به طرف بالا جابجا می‌شود. نیروهای وارد بر مکعب مستطیل را به دست آورید و معادلهٔ حرکت نیوتن را برای این دستگاه بنویسید. فرض کنید مایع‌ها هیچ گونه مقاومت و اصطکاکی در برابر حرکت جسم ندارند. همچنین به دلیل تلاطم ایجاد شده در مایع‌ها، جرم مؤثر مکعب مستطیل را $\alpha$ برابر جرم آن بگیرید که $\alpha > 1$.

**ث)** معادلهٔ حرکت به دست آمده را با نوسانگر هماهنگی به جرم $m$ که به فنری به ضریب $k$ متصل است مقایسه کنید و از آن جا بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه، $\omega_a$ را حساب کنید.

**ج)** برای حالت‌هایی که یال $b$ و یا یال $c$ در راستای قائم باشند نیز $\omega_b$ و $\omega_c$ را حساب کنید و آن‌ها را به ترتیب بزرگی معرفی کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**پاسخ سوال ۴** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

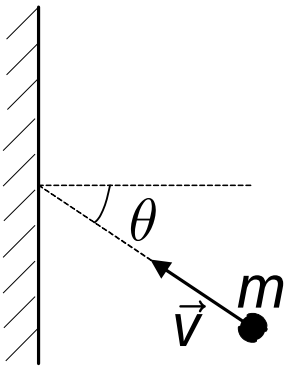
**ادامه پاسخ سوال ۴** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۴** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

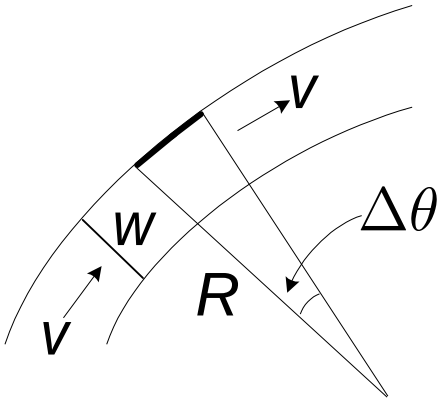
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**۵)** ذره‌ای به جرم $m$ با سرعت $\vec{v}$ به یک دیوار ثابت برخورد می‌کند و پس از برخورد آن را ترک می‌کند. زاویهٔ $\vec{v}$ با عمود بر دیوار $\theta$ است. در این برخورد انرژی تلف نمی‌شود و دیوار فقط در امتداد عمود بر خودش نیرو وارد می‌کند. در بخش‌های آ، ب، پ و ت گرانش را در نظر نگیرید.




**آ)** فرض کنید برخورد، بین لحظات $t_1$ و $t_2$ اتفاق می‌افتد. نیروی متوسط دیوار بر روی ذره را بر حسب $m$، $v$، $\theta$، $t_1$ و $t_2$ به دست آورید.

**ب)** حال فرض کنید قطاری از ذرات که جرم هر یک $m$ و فاصلهٔ آن‌ها از هم $l$ است مشابه ذرهٔ فرض قبل با سرعت $\vec{v}$ به دیوار برخورد می‌کنند و زاویهٔ مسیر حرکت آن‌ها با عمود بر دیوار $\theta$ است. نیروی میانگین وارد بر دیوار را بر حسب $m$ ، $v$، $\theta$ و $l$ حساب کنید.



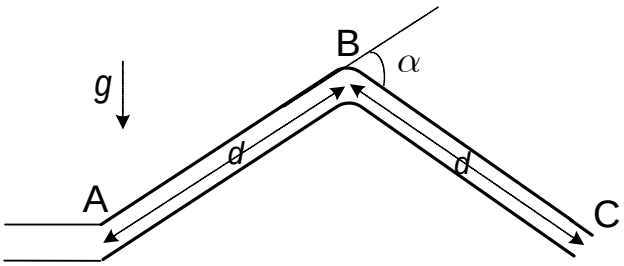

**پ)** در قسمت قبل فرض کنید $l \to 0$ و $\frac{m}{l} \to \lambda$. در این صورت به جای قطار ذرات یک جریان پیوسته داریم. از این جا نیروی شارهٔ پیوسته‌ای با چگالی طولی (جرم واحد طول) $\lambda$ در برخورد با دیوار را بر حسب $\lambda$، $v$ و $\theta$ حساب کنید.

**ت)** در یک نهر آب به عرض $w$ آب تا ارتفاع $h$ با سرعت $v$ در جریان است. فرض کنید در جایی، نهر مسیری دایره‌ای شکل طی می‌کند به طوری که شعاع این دایره برای دیوار بیرونی $R$ باشد که از $w$ خیلی بزرگ‌تر است. قطعهٔ کوچکی از مسیر آب که متناظر با زاویهٔ کوچک $\Delta\theta$ است را در نظر بگیرید و نیروی وارد شده بر دیوار بیرونی در این قسمت را حساب کنید. سپس فشار وارد شده بر دیوارهٔ بیرونی به واسطهٔ چرخش آب را بر حسب $\rho$ چگالی آب، $v$، $h$، $w$ و $R$ حساب کنید.

**ث)** لولهٔ غیر قابل انعطاف ABC به طول $2d$ و جرم $M$ در وسط به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ خم شده است. سطح مقطع داخلی لوله S است. این لوله در نقطهٔ A با یک اتصال قابل انعطاف به لوله‌ای ثابت و افقی وصل است که از آن جریان آب با چگالی $\rho$ و سرعت $v$ به داخل لولهٔ ABC وارد می‌شود. اتصال در

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

نقطهٔ A چنان است که زاویهٔ AB با لولهٔ ثابت می‌تواند تغییر کند. در این بخش شتاب گرانش مطابق شکل عمود بر لولهٔ ثابت است. اگر لولهٔ ABC مطابق شکل در حالت ثابتی قرار گیرد که نقاط A و C در یک ارتفاع باشند، نیروی قائمی که اتصال قابل انعطاف در نقطهٔ A بر لولهٔ ABC وارد می‌کند چقدر است؟




در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**پاسخ سوال ۵** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۵** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۵** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

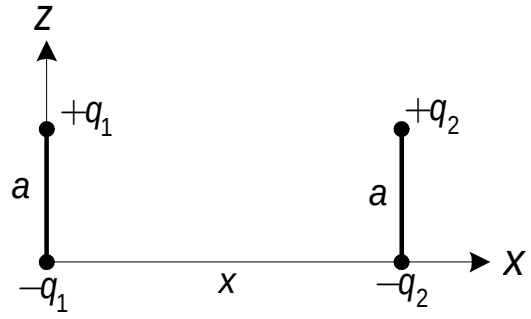
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**۶)** دوقطبی الکتریکی دستگاهی است متشکل از دو بار نقطه‌ای $+q$ و $-q$ به فاصلهٔ $a$ از یکدیگر، که در حالت حدی $a \to 0$ بررسی می‌شوند به طوری که $p = qa$ کمیتی متناهی موسوم به ممان دوقطبی باشد. فرض کنیم بار $-q$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r}$ و بار $+q$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r} + \vec{a}$ قرار داشته باشد. در حالت حدی $a \to 0$ دوقطبی را موجودی نقطه‌ای در نقطه‌ی $\vec{r}$ می‌گیریم که با بردار $\vec{p} = q\vec{a}$ توصیف می‌شود.

**آ)** دوقطبی $\vec{p}$ را در مبدأ مختصات در نظر بگیرید که بردار $\vec{p}$ در جهت $+z$ است. برای سهولت این دستگاه را به صورت بار $-q$ در نقطهٔ $(0, 0, -a/2)$ و بار $+q$ در نقطهٔ $(0, 0, a/2)$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی این دستگاه را در نقطهٔ $(0, 0, z)$ حساب کنید. با استفاده از بسط داده شده در انتهای مسئله جواب را در حد $a \to 0$ و $qa \to p$ به دست آورید.

**ب)** همین مسئله را برای نقطه‌ی $(x, 0, 0)$ تکرار کنید.

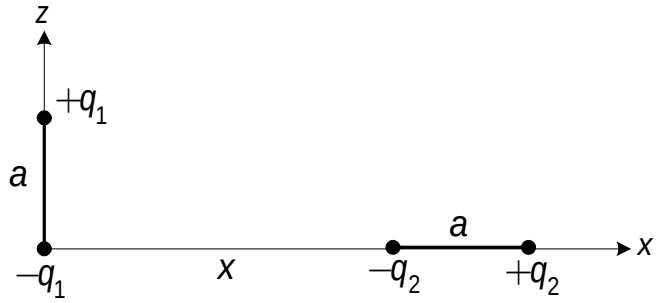
**پ)** می‌دانیم که انرژی پتانسیل برهم‌کنش دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1$ و $q_2$ در فاصلهٔ $l$ از یکدیگر از رابطهٔ $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}$ به دست می‌آید. در این بخش می‌خواهیم انرژی پتانسیل برهم‌کنش دو دوقطبی $p_1$ و $p_2$ را حساب کنیم. فرض کنید $\vec{p}_1$ در مبدأ مختصات است و بردار آن به سمت $+z$ است. $\vec{p}_2$ نیز در نقطهٔ $(x, 0, 0)$ است و آن هم به سمت $+z$ است. برای محاسبهٔ انرژی پتانسیل، دوقطبی‌ها را مطابق شکل ۱ به صورت بارهای تشکیل دهندهٔ آن‌ها در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل دو به دوی بارها را با هم جمع کنید، ولی انرژی پتانسیل برهم‌کنش بین دو باری که یک دوقطبی را تشکیل می‌دهند در نظر نگیرید. سپس حد $a \to 0$، $q_1 a \to p_1$ و $q_2 a \to p_2$ را در نظر بگیرید و با استفاده از بسط داده شده در انتهای مسئله پاسخ را به دست آورید.



شکل ۱

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ت)** دوقطبی‌های بخش قبل را در همان محل‌های قبلی بگیرید اما این بار فرض کنید $\vec{p}_1$ در جهت $+z$ و $\vec{p}_2$ در جهت $+x$ است. سپس همان مراحل را تکرار کنید. به شکل ۲ نگاه کنید.




شکل ۲

**راهنمایی:** برای هر $\varepsilon < 1$ و $n$ هر عدد دلخواه مثبت یا منفی داریم

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon^3 + \cdots.$$

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

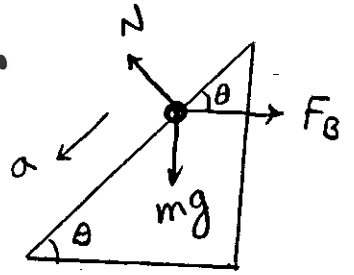
**پاسخ سوال ۶** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۶** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

**ادامه پاسخ سوال ۶** از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد




الف)

پس از شروع حرکت میله، با توجه به قانون فاراده یک جریان القایی با در مدار خواهیم داشت که وقتی از روبرو نگاه کنیم جهت آن پادساعتگرد است.

در نتیجه یک نیروی مغناطیسی به میله حامل جریان مانند $F_B$ وارد می‌شود.

ب)

$$mg\sin\theta - F_B\cos\theta = ma$$

$$F_B = iBd$$

اگر $\varepsilon$ نیروی محرکه القایی باشد $q(t) = C\,\varepsilon(t)$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = Bdv\cos\theta \qquad \text{و} \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = CBda\cos\theta$$

که $v$ سرعت لحظه‌ای میله و $a = \frac{dv}{dt}$ شتاب لحظه‌ای میله است.

از روابط فوق:

$$mg\sin\theta - CB^2d^2a\cos^2\theta = ma$$

$$a = \frac{mg\sin\theta}{m + CB^2d^2\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2al} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2lg\sin\theta}{1 + \frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2l\left(1 + \frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2\right)}{g\sin\theta}}}$$

پ)

$$q_f = CBdv_f\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_f = (CBd\cos\theta)\sqrt{\frac{2lg\sin\theta}{1 + \frac{C}{m}(Bd\cos\theta)^2}}}$$

ت)

$$\boxed{v_f = 0.96\ m/s \qquad t = 0.21\ s \qquad q_f = 662\ \mu C}$$

۲)

اگر $P_2$ ، $V_2$ و $T_2$ فشار، حجم و دمای مطلق نهایی گاز محفظه‌ی سمت راست باشد:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

همچنین گاز محفظه‌ی سمت راست طی یک فرآیند بی‌دررو به وضعیت نهایی رسیده است، پس

$$P_0 V_0^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

که $P_2 = \frac{27}{8} P_0$ است و $\gamma = \frac{3}{2}$. از معادلات اخیر خواهیم داشت

$$V_2 = \frac{4}{9} V_0 \quad ,$$

$$\boxed{T_2 = \frac{3}{2} T_0}$$

آ)

ب) برای گاز سمت راست بنا به قانون اول ترمودینامیک

$$\Delta U = Q + W$$

از آنجا که در فرآیند بی‌دررو $Q = 0$، لذا

$$\Delta U = W$$

$$\Delta U = n C_V \left( \frac{3}{2} T_0 - T_0 \right)$$

اما برای گاز کامل $C_P - C_V = R$ و $\frac{3}{2} = \gamma = \frac{C_P}{C_V}$ در نتیجه

$$C_V = 2R \quad , \quad C_P = 3R$$

سرانجام

$$\boxed{W = nRT_0}$$

پ) اگر $P_L$ ، $V_L$ و $T_L$ فشار، حجم و دمای نهایی گاز محفظه‌ی سمت چپ باشد

$$P_L = \frac{27}{8} P_0 \quad \text{و} \quad V_L = V_0 + \frac{5}{9} V_0 = \frac{14}{9} V_0$$

$$\frac{P_L V_L}{T_L} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow \boxed{T_L = \frac{21}{4} T_0}$$

ت)

$$Q_r = \Delta U_r - W_r \quad \Leftarrow \quad \Delta U_r = W_r + Q_r$$

$$= \Delta U_r + W_L$$

$$= n C_V \left(\frac{21}{4} T_0 - T_0\right) + nRT_0$$

$$\boxed{Q_r = \frac{19}{2} nRT_0}$$

ث) اگر $\bar{C}_V$ و $\bar{C}_P$ ظرفیت گرمای مولی در حجم ثابت و فشار ثابت برای مخلوط دو گاز باشند:

$$n_1 C_{V_1} \Delta T + n_2 C_{V_2} \Delta T = (n_1 + n_2) \bar{C}_V \Delta T$$

اما برای هر گاز، مثلاً گاز نوع ۱: $C_{P_1} - C_{V_1} = R$ و $\frac{C_{P_1}}{C_{V_1}} = \gamma_1 \Leftarrow C_{V_1} = \frac{R}{\gamma_1 - 1}$

برای گاز نوع ۲ به طور مشابه: $C_{V_2} = \frac{R}{\gamma_2 - 1}$

و برای مخلوط دو گاز: $\bar{C}_V = \frac{R}{\gamma - 1}$

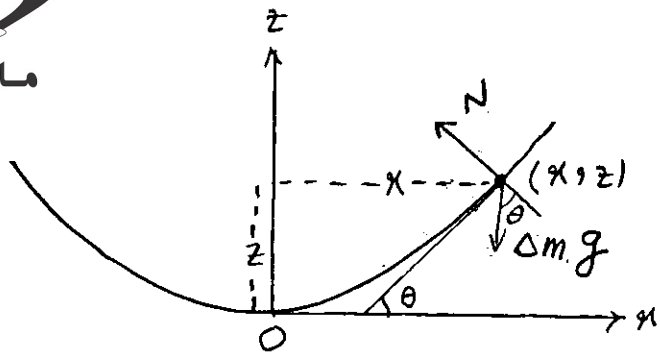
(با قرار دادن در معادله‌ی اول قسمت ت)

$$\frac{n_1 R}{\gamma_1 - 1} + \frac{n_2 R}{\gamma_2 - 1} = \frac{(n_1 + n_2) R}{\gamma - 1}$$

اما $\gamma = \frac{3}{2}$ ، $\gamma_1 = \frac{5}{3}$ ، $\gamma_2 = \frac{7}{5}$ ، در نتیجه

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = 1}$$

۳)




نیروهای وارد بر جزء کوچکی از جیوه به جرم $\Delta m$ واقع بر سطح جیوه $\Delta mg$ و $N$ هستند که $N$ بر سطح جیوه عمود است. اگر ماس بر سهمی در این نقطه زاویه‌اش با محور $x$ ها $\theta$ باشد داریم

۴)

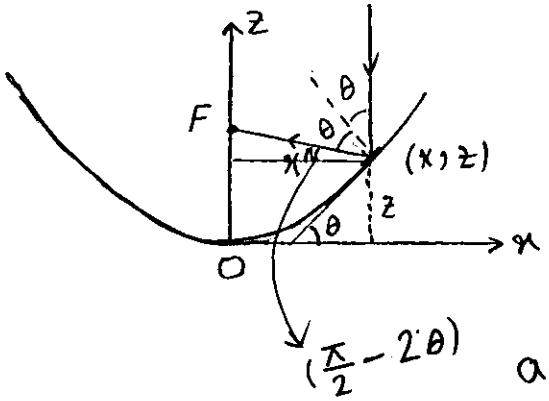
$$N - \Delta m\, g\cos\theta = 0$$

$$N\sin\theta = \Delta m\, x\omega^2 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{x\omega^2}{g}}$$

ب) طبق گفته‌ی مسئله $\operatorname{tg}\theta = 2ax$ در نتیجه برای سهمی این مسئله $a = \frac{\omega^2}{2g}$ است و معادله‌ی سهمی خواهد شد $z = \frac{\omega^2}{2g}x$

ب) با توجه به مبدأ مختصات، در نقطه‌ای به فاصله‌ی $z$ داخل جیوه فشار نسبت به سطح جیوه باید بیشتر باشد، از طرفی روی تمام نقاط سهمی فشار باید $P_0$ باشد، با توجه به معادله‌ی سهمی یعنی $z = \frac{\omega^2}{2g}x$ تنها امکان خواهد بود:

$$\boxed{P(x,z) = P_0 + \frac{\rho\omega^2 x^2}{2} - \rho g z}$$




پ) مطابق شکل $OF = z + x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$

$$= z + x\cot 2\theta$$

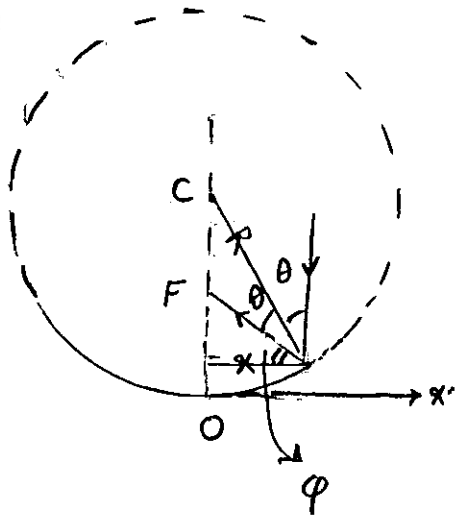
$$OF = z + x\,\frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{2\operatorname{tg}\theta}$$

اما $a = \frac{\omega^2}{2g}$، $\operatorname{tg}\theta = 2ax$ ، $z = ax^2$

در نتیجه:

$$OF = \frac{1}{4a} \Rightarrow \boxed{OF = \frac{g}{2\omega^2}}$$

ت) اگر $R$ شعاع دایره‌ای باشد که در کوتاه‌ترین نقطه‌ی سهمی، بر سهمی مماس است.




مطابق شکل $\cos(\varphi+\theta)=\frac{x}{R}$

که $\varphi=\frac{\pi}{2}-2\theta$

در نتیجه $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{x}{R}$

$$\sin\theta=\frac{x}{R}$$

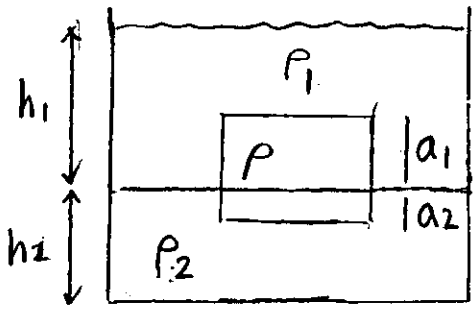
اما برای زاویه‌های کوچک، به نزدیکی کوتاه‌ترین نقطه‌ی سهمی، $\theta$ کوچک است و لذا $\tan\theta\approx\sin\theta$

در نتیجه $\tan\theta\approx\frac{x}{R}$ و $\tan\theta=2ax=\frac{\omega^2}{g}x$

در نتیجه $\boxed{R\approx\frac{g}{\omega^2}}$

۴)

۳) در حالت تعادل وزن مکعب مستطیل با نیروی ارشمیدس خنثی می‌شود، یعنی




$$\rho abcg = \rho_1 a_1 bcg + \rho_2 a_2 bcg$$

$$a_1 + a_2 = a$$

همچنین

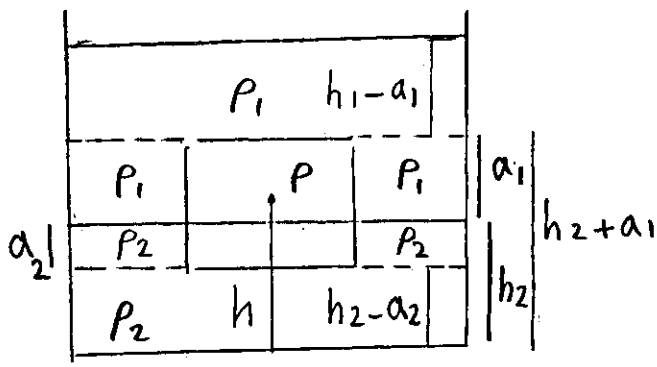
در نتیجه

$$\boxed{a_1 = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} a \quad , \quad a_2 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} a}$$

ب) انرژی پتانسیل هر قطعه مکعب مستطیلی (شامل مکعب به چگالی $\rho$ و مایع‌های $\rho_1$ و $\rho_2$) برابر است با

انرژی پتانسیل = (حجم)(g)(فاصله مرکز مکعب مستطیل تا کف)

با توجه به شکل زیر




$$U_a = \rho abc\, gh + \rho_2 A(h_2 - a_2) g \frac{1}{2}(h_2 - a_2)$$
$$+ \rho_1 A(h_1 - a_1) g \left(h_2 + a_1 + \frac{1}{2}(h_1 - a_1)\right) + \rho_1 (A - bc) a_1 g \left(h_2 + \frac{a_1}{2}\right)$$
$$+ \rho_2 (A - bc) a_2 g \left(h_2 - a_2 + \frac{a_2}{2}\right)$$

که

$$h = h_2 - a_2 + \frac{a}{2}$$

پس از ساده کردن

$$\boxed{U_a = \frac{Ag}{2}\left(\rho_1 h_1^2 + \rho_2 h_2^2 + 2\rho_1 h_1 h_2\right) + g\left(\frac{abc(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)}{2(\rho_2 - \rho_1)}\right) a}$$

پ) با توجه به رابطه‌ی اخیر و این که $a < b < c$ خواهیم داشت

$$\boxed{U_a < U_b < U_c}$$

ت) در وضعیتی که مکعب به اندازه $x$ بالاتر از وضعیت تعادل خود است بدآنه نیروهای وارد بر مکعب صفر نیست، در نتیجه

$$-\rho abc g + \rho_1 (a_1 + x) bc g + \rho_2 (a_2 - x) bc g = \alpha m \ddot{x}$$

با توجه به قسمت ۲) که $-\rho abcg + \rho_1 a_1 bcg + \rho_2 a_2 bcg = 0$ و این که $m = \rho abc$ است خواهیم داشت

$$\boxed{\alpha \rho a \ddot{x} + (\rho_2 - \rho_1) g x = 0}$$

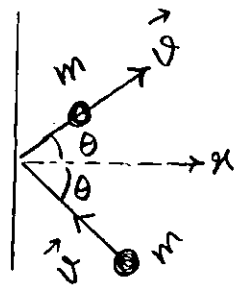
ث)

$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\alpha \rho a}}}$$

ج)

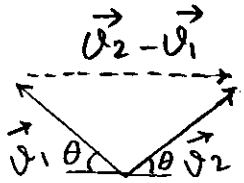
$$\boxed{\omega_c < \omega_b < \omega_a}$$

۵)




با توجه به این که دیوار فقط نیروی عمودی به ذره وارد می‌کند و انرژی ذره تلف نمی‌شود ذره با همان زاویه برخورد به دیوار، باید دیوار را ترک کند

آ) طبق قانون دوم نیوتن: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$




$$F_x = m\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{m\,2v\cos\theta}{t_2 - t_1}}$$

ب) مانند قبل اگر در مدت $T_2 - T_1$، تعداد $n$ ذره هرکدام با سرعت $v$ به دیوار برخورد کنند، که $l$ فاصله‌ی بین دو ذره همسایه است: $(T_2 - T_1)v = nl$

در نتیجه مانند قبل

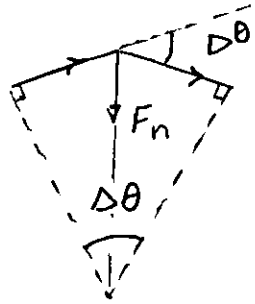
$$F_x = \frac{(nm)2v\cos\theta}{T_2 - T_1}$$

$$\boxed{F_x = \frac{2mv^2\cos\theta}{l}}$$

پ) در حد $l \to 0$ و $\frac{m}{l} \to \lambda$

$$\boxed{F_x = 2\lambda v^2\cos\theta}$$

ت) از تشابه با حالت قبل و شکل مقابل




$$F_n = 2\lambda v^2\cos\left(\frac{\pi - \Delta\theta}{2}\right)$$

$$F_n = 2\lambda v^2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

اما $\Delta\theta \ll 1$، در نتیجه $\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$

$$F_n = \lambda v^2\Delta\theta$$

اما $\lambda = \frac{m}{l}$ جرم واحد طول شاره است، اگر سرعت آب $v$ و عرض نهر $w$ و عمق آب $h$ باشد، $\lambda = \frac{m}{l} = \frac{whv\Delta t\rho}{v\Delta t}$ یعنی $\lambda = \rho wh$

در نتیجه

$$F_n = \rho w h v^2 \Delta\theta$$

مساحت دیواره $A = (R\Delta\theta)h$ ، $P = \frac{F_n}{A}$

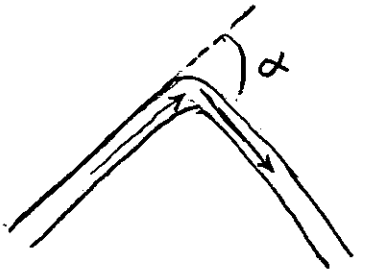
بیرونی

$$P = \frac{\rho w v^2}{R}$$

ث) از قسمت ت) دیدیم

نیروی وارد بر جریان آب داخل

لوله هنگام تغییر جهت به اندازه $\alpha$

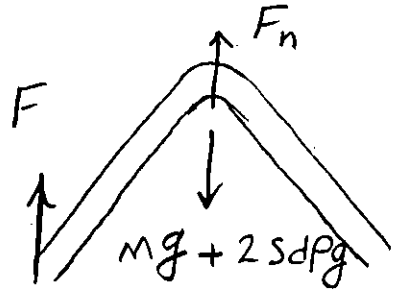



برابر است با $F_n = 2\lambda v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$

نیروهای وارد بر لوله عبارت از $Mg$ وزن لوله، $2dsPg$ وزن آب داخل لوله

و نیروی $2\lambda v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$ و نیروی وارد بر تقطه A که مقدار آن ما

به صورت زیر است



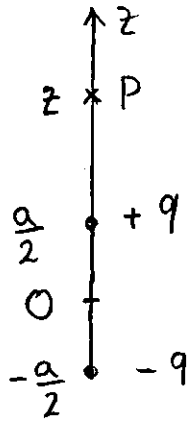

$$F = Mg + 2sdPg - F_n$$

و $\lambda = \rho s$

$$F = (M + 2sd\rho)g - 2\rho s v^2 \sin\frac{\alpha}{2}$$

۹)

آ) میدان الکتریکی در نقطه‌ی P به مختصات $(0,0,z)$ :




$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(z-\frac{a}{2})^2} - \frac{q}{(z+\frac{a}{2})^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left((1-\frac{a}{2z})^{-2} - (1+\frac{a}{2z})^{-2}\right)$$

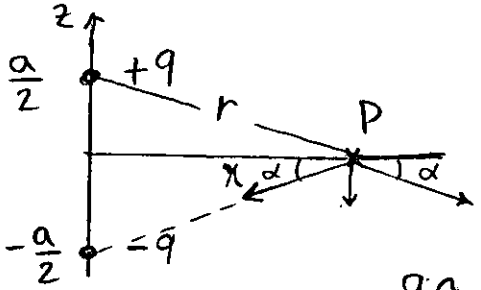
با استفاده از بسط داده شده در راهنمای مسئله:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{2a}{z} + (\frac{a}{z})^3 + \cdots\right)$$

در حد $a\to 0$ و $aq\to P$ خواهیم داشت:

$$\boxed{E = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 |z|^3}}$$

ب)




$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}(-2\sin\alpha)$$

که $r = \sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$ ، $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$

$$E_P = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+\frac{a^2}{4})^{3/2}} = \frac{-qa}{4\pi\epsilon_0 x^3}\left(1+\frac{a^2}{4x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

در حد $aq\to P$ ، $a\to 0$

$$\boxed{E_P = \frac{-P}{4\pi\epsilon_0 |x|^3}}$$

پ)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(2\frac{q_1 q_2}{x} - 2\frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_1 q_2}{x}\left(1-\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_1 q_2}{x}\left(\frac{a^2}{2x^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{x^4} + \cdots\right)$$

در حد $q_2 a\to P_2$ ، $q_1 a\to P_1$ ، $a\to 0$

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_1 P_2}{|x|^3}}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{x} - \frac{q_1 q_2}{x+a} - \frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{q_1 q_2}{\sqrt{(x+a)^2+a^2}}\right) \quad (\text{O}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}\left(1 - \left(1+\frac{a}{x}\right)^{-1} - \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{-1}{2}} + \left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{-1}{2}}\right)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{x}\right)^4 + \cdots\right)$$

$q_2 a \to P_2$ , $q_1 a \to P_1$ , $a \to 0$ ...

$$\boxed{U = 0}$$