جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تشریحی
مرحله دوم
نهمین دوره‌ی المپیاد نجوم اخترفیزیک سال ۱۳۹۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات تشریحی
۲۴۰	۷

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد. بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید. به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام شما صادرشده است. امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش شدن دایره‌ها در چهارگوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط کمیته‌ی ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک تهیه شده و **ماخ** آن را بازنشر کرده است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^{۳} kg^{-۱} s^{-۲}$
c	سرعت نور	$۳\times ۱۰^{۸} ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶} m$
Au	واحد نجومی	$۱/۵۰\times ۱۰^{۱۱} m$
Ly	سال نوری	$۹/۴۶\times ۱۰^{۱۵} m$
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	$۶/۹۶\times ۱۰^{۸} m$
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	$۶/۳۸\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع ماه	$۱/۷۴\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع مداری ماه	$۳/۸۴\times ۱۰^{۸} m$
$M_{\oplus}$	جرم زمین	$۵/۹۷\times ۱۰^{۲۲} kg$
$T_{\odot}$	دمای خورشید	$۵۷۷۷ K$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$۳/۸۵\times ۱۰^{۲۶} W$
	ثابت خورشیدی	$۱/۳۷\times ۱۰^{۳} Wm^{-۲}$
$m_{\odot}$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶/۸$
H	ثابت هابل	$۷۰ km\, s^{-۱} Mpc^{-۱}$

۱- معمولاً در ماه مبارک رمضان بیشترین توجه به ساعات شرعی وجود دارد، و دیده می‌شود که ساعات شرعی هر شهر در روزهای مختلف در ساعات متفاوتی است. همچنین ساعات شرعی شهرهای مختلف تفاوت‌هایی باهم دارند. برای سادگی از بیضوی بودن مدار زمین به دور خورشید صرف‌نظر می‌کنیم (فرض: در تهران همواره ظهر شرعی ساعت ۱۲:۰۰ باشد و از اثر آنالما صرف‌نظر کنیم). زاویه میل خورشید به‌صورت یک تابع سینوسی ساده به فرم زیر تغییر می‌کند: $D = A\sin(2\pi t / T)$ که T دوره تناوب سالانه (۳۶۵/۲۵ روز)، t زمان سپری شده از لحظه‌ی تحویل سال، $A = 23/5^\circ$ و D میل خورشید است.

الف) امسال اولین روز ماه رمضان ۱۹ تیر ماه است. طلوع آفتاب را برای شهر تهران (N $35/7^\circ$ و E $51/4^\circ$) در این تاریخ برحسب ساعت رسمی کشور محاسبه کنید.

ب) اگر اذان صبح زمانی باشد که خورشید تقریباً ۲۲ درجه زیر افق قرارگرفته است و همچنین زمان اذان مغرب زمانی باشد که خورشید تقریباً ۵ درجه به افق می‌رود، طول روز روزه‌داران در ۱۹ تیر را حساب کنید.

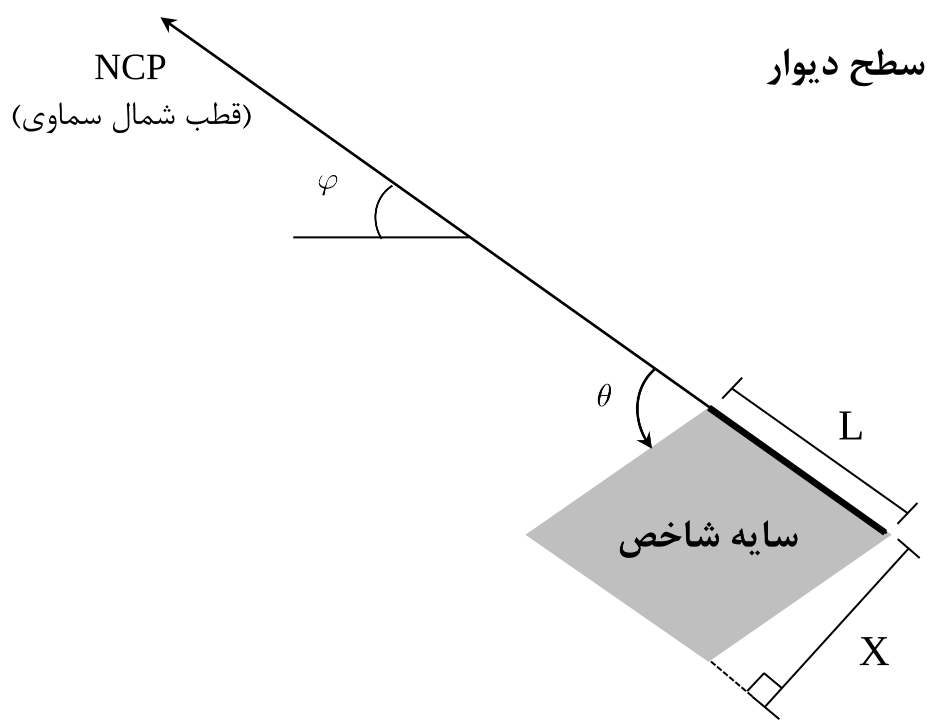
ج) در شهر زنجان (N $35/7^\circ$ و E $48/3^\circ$) طلوع آفتاب در این روز چه ساعتی خواهد بود؟

د) در شهر اصفهان (N $32/2^\circ$ و E $51/4^\circ$) طلوع آفتاب در این روز چه ساعتی خواهد بود؟

۲- در شکل زیر یک نوعِ خاص از ساعت آفتابی را مشاهده می‌کنید. شاخص این ساعت آفتابی، مستطیلی به طول L و ارتفاع h می‌باشد که به‌طور عمود روی وجه غربی دیوارِ قائمی که در راستای شمال جنوب کشیده شده است، قرار دارد. طول این مستطیل در راستای NCP(قطب شمال سماوی) و SCP (قطب جنوب سماوی) می‌باشد. شکل زیر وجه غربیِ دیوار را نشان می‌دهد. زاویه‌ی Φ عرض جغرافیایی مکانی است که ساعت آفتابی در آنجا نصب‌شده (که در شکل Φ شمالی در نظر گرفته‌شده است) و X ارتفاعِ سایه‌ی متوازی‌الاضلاع شکل است.

الف) رابطه‌ای به دست آورید که از مقدار X بتوان زاویه‌ی ساعتی خورشید را محاسبه کرد.

ب) چنانچه این ساعت آفتابی در تهران $(\Phi = 35/7^\circ)$ بکار رود، بیشترین و کمترین مقدارِ زاویه‌ی θ را در روزی که میلِ خورشید $\delta = 21/4^\circ$ است محاسبه کنید.



۳- اجرامی در کمربند کویپیر را در نظر بگیرید. این اجرام به‌موجب حرکت ظاهری خود در آسمان مشخص می‌شوند. این اجرام سرعت ظاهری زیادی نسبت به ستارگان دوردست و کهکشان‌ها در آسمان شب دارند، به‌طوری‌که در طول یک‌شب با یک تلسکوپ آماتوری این حرکت قابل تشخیص است.

حرکت ظاهری این اجرام دو عامل دارد؛ حرکت مداری این اجرام به دور خورشید و حرکت مداری زمین به دور خورشید. اثر اول را حرکت خاصه (Proper Motion) و اثر بعدی که ناشی از حرکت زمین است را **اختلاف‌منظر عِلّی** (Causes Parallax) می‌گویند.

در این مسئله می‌خواهیم ببینیم که کدام‌یک از این دو اثر اهمیت بیشتری دارند.

جرمی کوییپری را در نظر بگیرید که در فاصله ۴۰ واحد نجومی از خورشید قرار دارد و توسط زمین در حالت مقابله رصد می‌شود. فرض کنید هم این جرم و هم زمین در مدارهایی دایره‌ای به دور خورشید می‌چرخند و هردو، جرم‌هایی کوچک نسبت به خورشید هستند.

الف) اگر از حرکت مداری زمین صرف‌نظر کنیم، حرکت خاصه‌ی این جرم کوییپری که از زمین دیده می‌شود چقدر خواهد بود؟ جواب را برحسب ثانیه‌ی قوسی بر ساعت بیان کنید.

ب) حال از حرکت خاصه‌ی این جرم کوییپری صرف‌نظر کنید و اثر دوران زمین (اختلاف‌منظر علّی) را برحسب ثانیه‌ی قوسی بر ساعت به دست آورید.

ج) رصد گری سعی کرده تا حرکت ظاهری این جرم کوییپری را در حالت تربیع بررسی کند. سرعت ظاهری در این حالت چقدر است؟

۴- سال‌ها پیش منجمی که با فرض ثابت هابل ۵۰ کیلومتر بر ثانیه بر مگا پارسک به مطالعه کهکشان پرداخته بود، قدر مطلق و رنگ کهکشانی را به ترتیب $M_B = -۲۱/۵\ mag$ و $B-R = ۱/۵$ گزارش کرده است. این منجم همچنین رابطه‌ی

$$\log L_x\left[erg/s\right] = (۲/۱۷ \pm ۰/۱)\log(L_B / L_{B,sun}) + (۱۸/۰ \pm ۱/۱)$$

را بین تابندگی پرتوهای این نوع از کهکشان‌ها و تابندگی فیلتر B آن‌ها (در واحد تابندگی B خورشید) گزارش کرده است. اکنون منجمی با فرض ثابت هابل برابر ۷۰ کیلومتر بر ثانیه بر مگا پارسک بر روی همان کهکشان تحقیق می‌کند.

با فرض اینکه تابندگی باند R این کهکشان ۱۰ درصد در این مدت افزایش یافته باشد، تابندگی این کهکشان در باند R برحسب تابندگی خورشید در این باند چقدر است؟

شیب رابطه‌ی تابندگی پرتوهای ایکس برحسب تابندگی B این دسته از کهکشان‌ها از نظر این منجم چقدر خواهد بود؟

فرضیات: $M_{B,sun} = ۵/۴۵$ و رنگ خورشید $(B-R)_{sun} = ۱/۰$ است.

۵- فرض کنید فقط دو نوع ستاره‌ی x و y با جرم‌های $M_x = ۰/۵$ و $M_y = ۵$ (برحسب جرم خورشیدی) در یک خوشه‌ی ستاره‌ای وجود دارند. همچنین فرض کنید رابطه‌ی جرم- درخشندگی در ستاره‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{L}{L_{sun}} = \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^۳$$

الف) اگر نسبت جرم به درخشندگی این خوشه دو برابر نسبت جرم به درخشندگی خورشید باشد ($\frac{M}{L} = ۲\frac{M_{sun}}{L_{sun}}$)، نسبت تعداد ستاره‌های نوع x به تعداد ستاره‌های نوع y را به دست آورید.

ب) نسبت درخشندگی ناشی از مجموع ستاره‌های نوع x به درخشندگی ناشی از مجموع ستاره‌های نوع y را به دست آورید.

ج) تابع جرم یک خوشه‌ی ستاره‌ای به این صورت تعریف می‌شود: $N(m) = Cm^{-\alpha}$ که در این رابطه N(m) تعداد ستاره‌های با جرم m است، همچنین C و α مقادیری ثابت هستند. برای خوشه‌ی ستاره‌ای تعریف‌شده در بالا مقدار α را به دست آورید.

۶- انرژی پتانسیل گرانشی ذخیره‌شده در یک ساختار کروی به شعاع R و جرم M که به‌طور یکنواخت توزیع‌شده، برابر است با:

$$E_g = -\frac{۳}{۵}\frac{GM^۲}{R}$$

تحت یک شرایط خاص دمایی، این امکان وجود دارد که این ساختار در اثر نیروی جاذبه‌ی گرانشی در خود آزادانه فرو برمبد. فرض کنید این ساختار از گازی کامل متشکل از مولکول‌های هیدروژن باشد.

الف) عبارتی برای چگالی جرمی این ساختار به دست آورید که به ازای مقادیر بیشتر از آن ساختار در خود فرو می رمبد. مقدار عددی چگالی آستانه را برای ساختاری با جرم خورشید و با دمای $T = ۲۰$ کلوین به دست آورید.

ب) فرض کنید یک ابر مولکولی به جرم خورشید که چگالی آن برابر با چگالی آستانه‌ای است که در قسمت «الف» به‌دست‌آمده است؛ شروع به رمبش آزاد می‌کند تا به یک پیش- ستاره‌ی رشته‌ی اصلی تبدیل شود. در حین رمبش، انرژی گرانشی آزاد شده صرف شکستن مولکول‌های هیدروژه و سپس یونیزه کردن آن‌ها می‌شود. شعاع نهایی این ساختار را پس از یونیزه شدن کامل به دست آورید. انرژی یونیزاسیون هیدروژن $\varepsilon_{ionization} = ۱۳ / ۶eV$ و انرژی جداسازی اتم‌های مولکول هیدروژن $\varepsilon_{decomposition} = ۴ / ۵\ eV$ است. جرم انم هیدروژن $m_H = ۲ \times ۱۰^{-۲۷} kg$ است.

ج) در اواخر مرحله‌ی رمبش آزاد، به دلیل افزایش کدریت، انرژی آزادشده‌ی گرانشی منجر به افزایش دما می‌شود. به‌عبارت‌دیگر رمبش از حالت آزاد تبدیل به انقباض آهسته می‌شود به‌طوری‌که می‌توان سیستم را تقریباً در حالت تعادل در نظر گرفت. با این فرض، دمای این ساختار را که شعاعش را در قسمت قبل به دست آورده‌اید؛ محاسبه کنید.

۷- قرص برافزایشی توده‌ای از گاز چرخان بسیار داغ است که سیاهچاله‌ها را احاطه کرده است. قسمت‌های داخلی قرص در این مسئله موردنظر است. فرض کنید ناحیه موردنظر از R_{ISCO} تا $۲R_{ISCO}$ امتداد داشته باشد.(ISCO: innermost stable circular orbit)

در داخل این ناحیه $(r < R_{ISCO})$ گاز بسیار رقیق و تابش بسیار کمی از قرص خواهیم داشت. تابش اصلی قرص از ناحیه $(R_{ISCO} < r < ۲R_{ISCO})$ می‌آید.

فرض کنید ناحیه موردنظر تابش جسم سیاهی در دمای T داشته باشد. فرض کنید قرص زاویه‌ای انحراف i داشته باشد (نسبت به ناظر زمینی). فاصله قرص از زمین را هم d بگیرید. ناظر زمینی یک شار کلی از این قرص به‌اندازه‌ی F دریافت می‌کند (برحسب $erg / (s.cm^۲)$).

الف) رابطه‌ای دقیق برای R_{ISCO} برحسب کمیت‌های داده‌شده به‌دست‌آورید.

ب) بیشینه‌ی شار تابشی F_λ (شار در بازه‌ی λ و $\lambda + d\lambda$) در $\lambda_{\max} = ۲ / ۹\ nm$ اتفاق می‌افتد. شار بولومتریک

$$F = \int_۰^\infty F_\lambda d\lambda = ۲ \times ۱۰^{-۱۲} \quad erg / (s.cm^۲)$$

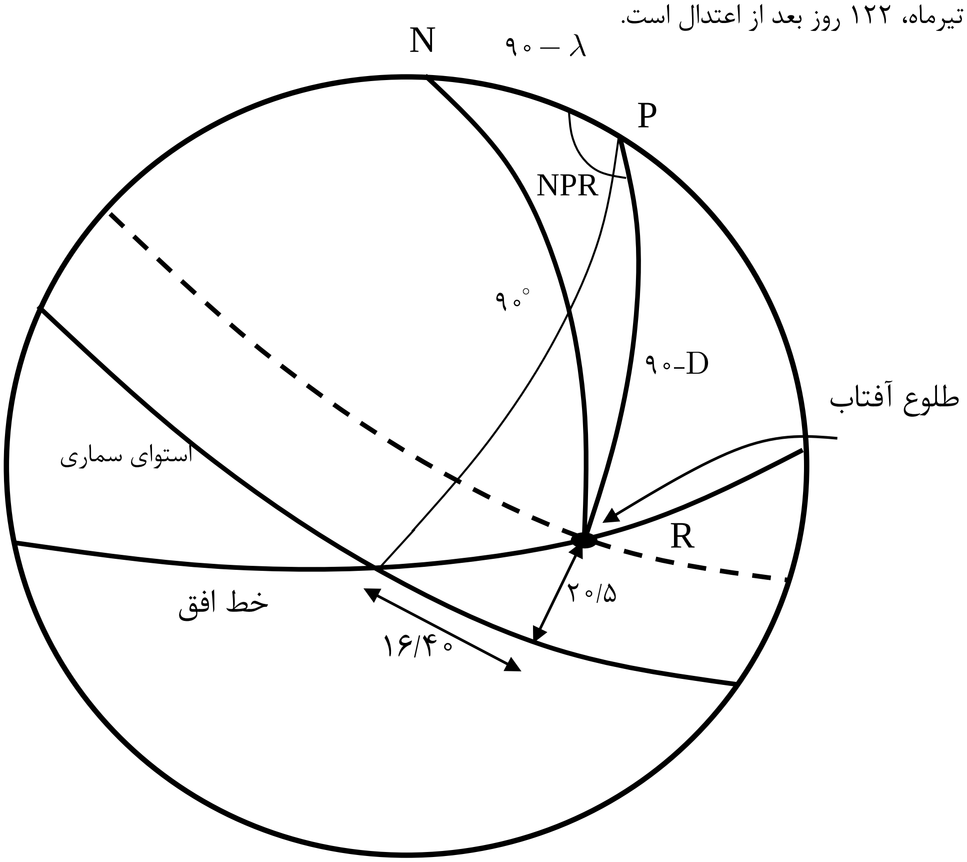
است. از رصدهای دیگر نیز می‌دانیم $d = ۱\ kpc$ و $i = ۸۰^\circ$ هستند. با این مقادیر R_{ISCO} را برحسب km به‌دست‌آورید.

ج) می‌دانیم جرم این سیاهچاله $M = ۱۰M_\odot$ است. در نظریه‌های اخترفیزیکی در سیاهچاله‌های غیر چرخان $R_{ISCO} = ۶R_G$ و در سیاهچاله‌های با بیشینه چرخش $R_{ISCO} = R_G$ است، که در آن $R_G = \frac{GM}{c^۲}$ است. با استفاده از داده‌های قسمت «ب» چه نتیجه‌ای راجع به چرخش سیاهچاله می‌گیریم.

د) رابطه‌ای برای $\dot{M}$ برحسب R_{ISCO}، M و T به‌دست‌آورید. مقدار $\dot{M}$ را در این سیستم برحسب $M_\odot / yr$ به‌دست‌آورید.

۱- **روز اول ماه مبارک رمضان:**

الف) ۱۹ تیرماه، ۱۲۲ روز بعد از اعتدال است.



$$D = A\sin(\frac{۲\pi \times ۱۲۲}{۳۶۵ / ۲۵}) = ۲۰ / ۵^{\circ}$$

$$\cos(۹۰) = \cos(۹۰-\lambda)\cos(۹۰-D) - \sin(۹۰-\lambda)\sin(۹۰-D)\cos(N\hat{P}R)$$

$$\cos(N\hat{P}R) = -\frac{\sin\lambda\sin D}{\cos\lambda\cos D}$$

$$\lambda = ۳۵^{\circ} \Rightarrow N\hat{P}R = ۱۰۶ / ۴ = ۹۰ + ۱۶ / ۴$$

یعنی خورشید نسبت به‌اعتدال بهاری (۶ صبح) ۱ ساعت و ۶ دقیقه زودتر طلوع می‌کند؛ یعنی ۴:۵۴ که برحسب ساعت رسمی کشور می‌شود **۵:۵۴**

ب) زاویه‌ای که خورشید در طول روز طی می‌کند برابر است با $(۲ \times ۱۰۶ / ۴) + ۲۲ + ۵ = ۲۳۹ / ۸$ درجه که معادل است با **۱۵ ساعت و ۵۹ دقیقه.**

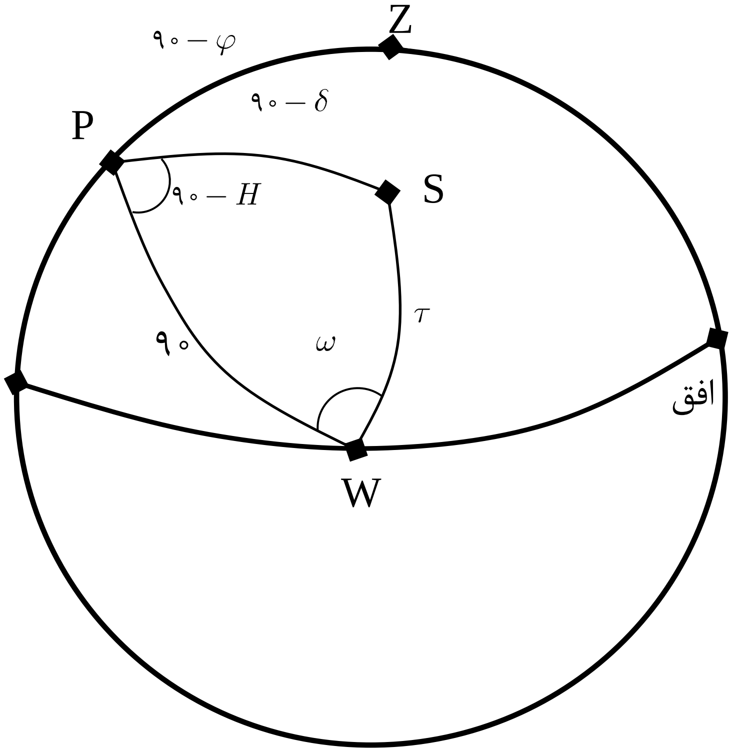
ج (عرض جغرافیایی شهر زنجان با تهران یکی است پس اختلاف زاویه فقط ناشی از طول جغرافیایی است که برابر است با $۵۱ / ۴ - ۴۸ / ۳ = ۳ / ۱$ درجه که معادل **۱۲ دقیقه و ۲۴ ثانیه‌ی زمانی** است.

د) طول جغرافیایی شهر اصفهان با تهران یکی است پس اختلاف زاویه فقط ناشی از عرض جغرافیایی است که برابر است با $۳۵ / ۷ - ۳۲ / ۲ = ۳ / ۵$ درجه. با محاسبه $d(N\hat{P}R) = \frac{\tan D + (۱ + \tan^{۲}\lambda)}{\sin(N\hat{P}R)} d\lambda$ اختلاف زاویه‌ی به‌دست‌آمده ۲/۱- درجه که معادل با **هشت و نیم دقیقه زمانی زودتر** است.

۲- الف) همان‌طور که Z (سمت الرأس) قطب صفحه‌ی افق می‌باشد، W (نقطه‌ی غرب افق) نیز قطب صفحه‌ی دیوار می‌باشد. برای حل این سؤال دو زاویه تعریف می‌کنیم که مشابه سمت و فاصله‌ی سمت‌الرأسی هستند، با این تفاوت که گویی افق را سطح دیوار در نظر گرفته‌ایم:

τ : فاصله‌ی زاویه‌ای بین خورشید و W

ω : زاویه‌ی کروی خورشید -P-W



شکل۱

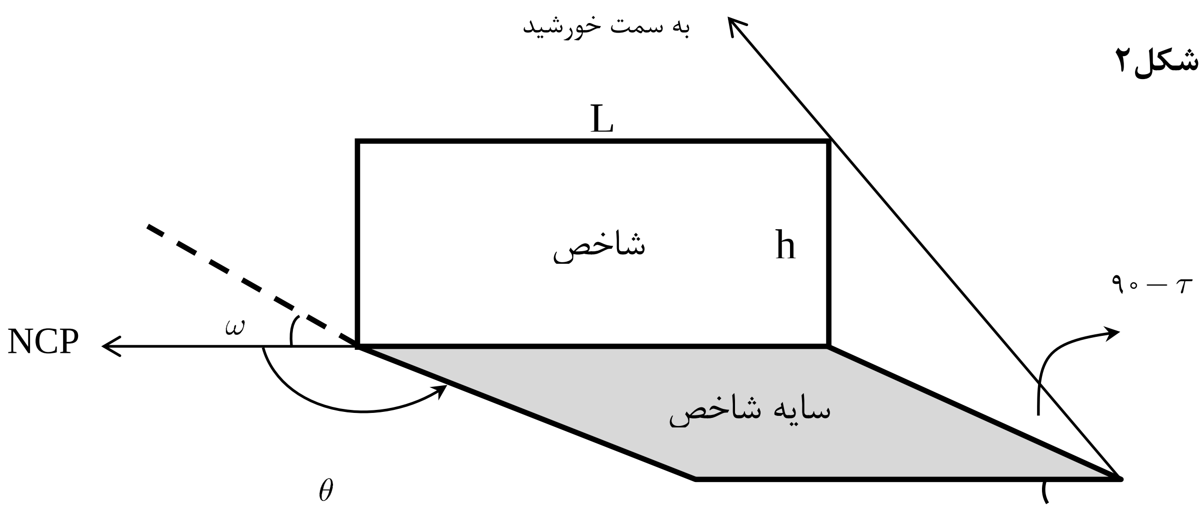
شکل ۲ موقعیت شاخص و سایه‌ی آن را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، ارتفاع سایه‌ی متوازی‌الاضلاع شکل عبارت است از:

$$X = h\tan(\tau)\sin(\omega)$$

با استفاده از فرمول چهار جزئی در مثلث کروی PWS (شکل ۱) داریم:

$$\cos(\omega)\cos(۹۰^\circ) = \sin(۹۰^\circ)\cot(\tau) - \sin(\omega)\cot(۹۰^\circ - H) \Rightarrow \tan(\tau)\sin(\omega) = \cot(H) \Rightarrow X = h\cot(H)$$

شکل۲

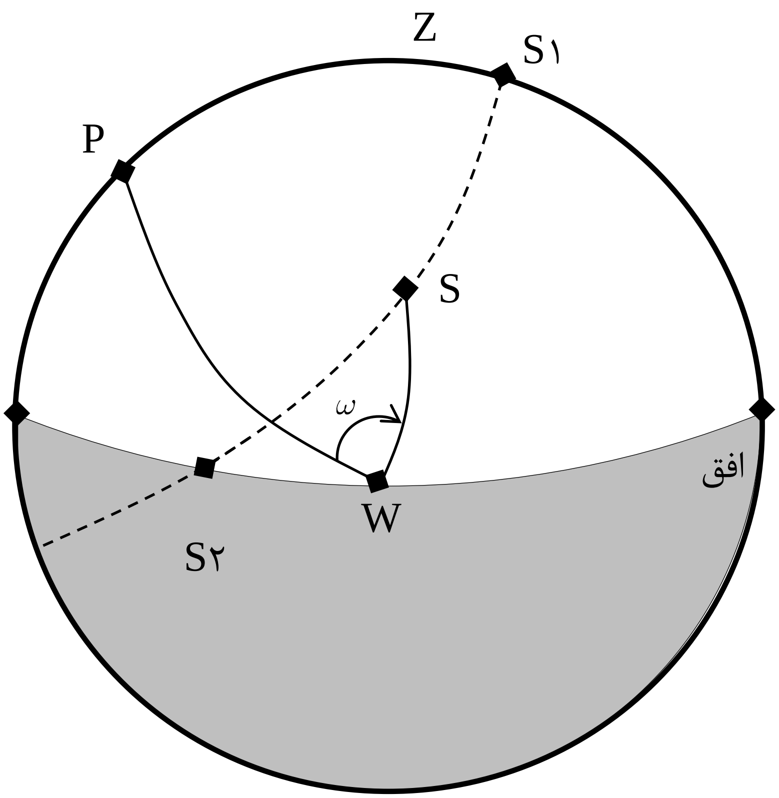


ب) با توجه به شکل ۲، رابطه‌ی بین θ و ω عبارت است از: $\theta = ۱۸۰^\circ - \omega$ بنابراین بیشترین و کمترین مقدار زاویه‌ی θ را می‌توان با بررسی تغییرات ω به دست آورد. در شکل زیر مسیر خورشید به‌صورت خط‌چین مشخص‌شده و مکان خورشید در یک‌لحظه‌ی دلخواه در آسمان (S) نشان داده شده است. واضح است که بیشترین مقدار ω مربوط به زمانی است که خورشید در حال عبور بالایی است (S1) و کمترین مقدار ω مربوط به زمانی است که خورشید غروب می‌کند (S2). توجه کنید که این ساعت آفتابی فقط در این بازه‌ی زمانی قابل‌استفاده است.

ازآنجایی‌که W قطب دایره‌ی عظیمه ی گذرنده از نقاط P و z است، داریم:

$$\omega_{\max} = PS_۱ = ۹۰^\circ - \delta = ۶۸ / ۶^\circ \quad \Rightarrow \theta_{\min} = ۱۸۰^\circ - \omega_{\max} = ۱۱۱ / ۴^\circ$$

$$\omega_{\min} = -PS_۲ = -\varphi = -۳۵ / ۷^\circ \quad \Rightarrow \theta_{\max} = ۱۸۰^\circ - \omega_{\min} = ۲۱۵ / ۷^\circ$$



شکل۳

توجه: مطمئناً این راه حل، تنها راه‌حل سوال نمی‌باشد و روش‌های مختلفی وجود دارد که به جواب صحیح ختم می‌شوند.

۳- **کمربند کوییپر:**

الف) اگر از حرکت زمین صرف‌نظر کنیم، حرکت ظاهری KBO ناشی از دوران KBO خواهد بود:

$$\frac{GM_{\odot}m}{R^{۲}}=\frac{mV^{۲}}{R}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R}}$$

با دانستن اینکه فاصله‌ای KBO از زمین برابر $R=۳۹(Au)$ است.

$$۱\ Au=۱۵۰\times ۱۰^{۱۱}(cm)=۱/۵\times ۱۰^{۱۱}(m)=۱۵۰\times ۱۰^{۹}(m)$$

$$۱\ yr=۳۶۵/۲۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰(s)=۳/۱۵\times ۱۰^{۷}(s)$$

$$G=۶.۶۷\times ۱۰^{-۱۱}(\tfrac{Nm^{۲}}{kg^{۲}}),\quad M_{\odot}\cong ۲\times ۱۰^{۳۰}(kg)$$

$$R=۳۹\times ۱۵۰\times ۱۰^{۹}(m)$$

$$V=\sqrt{\frac{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۲\times ۱۰^{۳۰}}{۳۹\times ۱۵۰\times ۱۰^{۹}}}=\sqrt{۰/۰۰۲۲۸\times ۱۰^{۱۰}}=۰/۰۴۷۷۵\times ۱۰^{۵}(\tfrac{m}{s})=۴/۷\times ۱۰^{۵}(\frac{cm}{s})$$

$$V=۴/۷\times ۱۰^{۵}(\tfrac{Cm}{s})\times\frac{۳/۱۵۶\times ۱۰^{۷}(\frac{s}{yr})}{۱۵۰\times ۱۰^{۱۱}(\frac{Cm}{Au})}=۰/۰۹۸\times ۱۰^{۱}=۰/۹۸(\tfrac{Au}{yr})$$

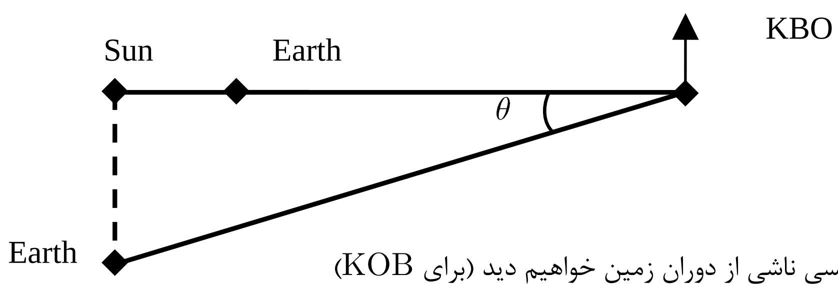
$$\omega=\frac{V}{R}=\frac{۴/۷۲\times ۱۰^{۵}(\frac{cm}{s})}{۳۹\times ۱۵۰\times ۱۰^{۱۱}(cm)}\times\frac{۳۶۰۰(s)}{۱(hr)}=۲/۸۹\times ۱۰^{-۶}(\tfrac{rad}{hr})$$

اگر به‌جای $R=۴۰(Au)$ قرار دهیم.

$$V=۰/۰۴۷۱۵\times ۱۰^{۵}(\tfrac{m}{s})=۰/۹۹۹(\tfrac{Au}{yr})\omega=۲/۹\times ۱۰^{-۶}(\tfrac{rad}{hr})\ \Rightarrow\ \omega=۰/۵۹۸۴۸۵''hr^{-۱}$$

ب) اکنون از حرکت KBO صرف‌نظر می‌کنیم:

$$\tan(\theta)\cong\theta=\frac{۱(Au)}{۴۰(Au)}=۰/۰۲۵۶(rad)$$



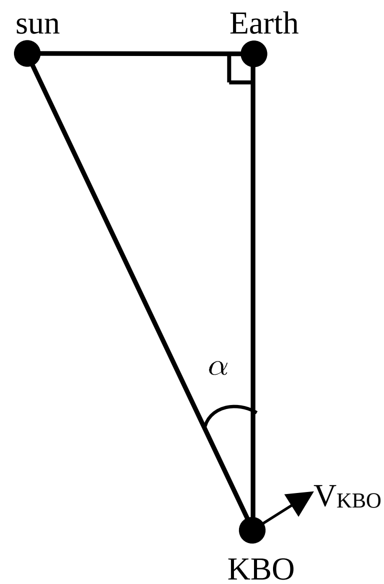
یعنی هر $\frac{۱}{۴}$ سال حدود ۰,۰۲۵۶ رادیان حرکت پارالاکسی ناشی از دوران زمین خواهیم دید (برای KOB)

$$\omega=\frac{۰/۰۲۵۶(rad)}{۰/۲۵(yr)}\times\frac{۲۰۶۲۶۵''}{۱\ rad}\times\frac{۱\ (yr)}{۳۶۵(days)}\times\frac{۱\ (day)}{۲۴\ (h)}=۲/۴۰۹۴۸''hr^{-۱}$$

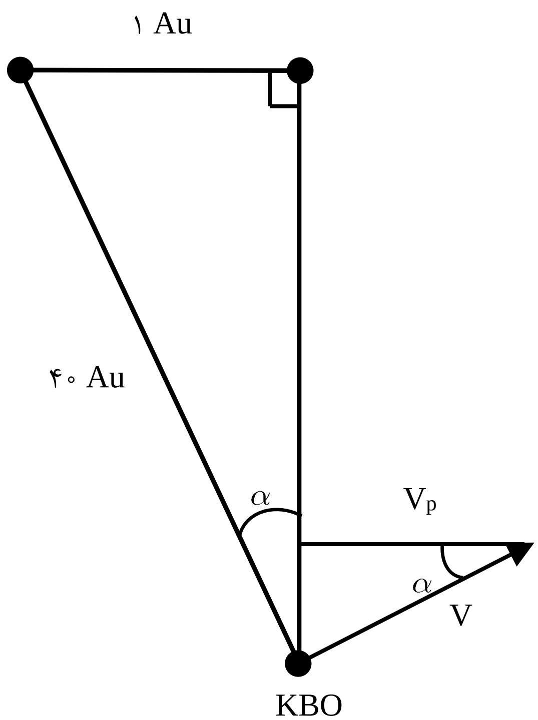
بنابراین حرکت پارالاکسی مهمتر از حرکت دورانی KBO است.

ج) در حالت تربیع زاویه‌ی خورشید- زمین- KBO قائمه است، یعنی در این حالت سرعت زمین کاملاً در راستای KBO است و معنی آن این است که سرعت ناشی از پارالاکس در حالت تربیع هیچ نقشی ندارد؛ بنابراین حرکت ظاهری (apparent) فقط ناشی از proper motion می‌باشد.

V_{KBO} سرعت مداری حرکت KBO است.



سرعت KBO در راستای دید ما مولّفه‌ای دارد. مولّفه‌ای هم عمود بر راستای دید دارد. در اینجا مجهول مسئله V_P است. سرعتی که راصد به عنوان حرکت ظاهری اندازه‌گیری می‌کند (در حالت تربیع)



$$\circ/\text{۵۸}''hr \quad , \quad \cos(\alpha) \cong \text{۱} \quad \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{V_p}{V_{KBO}} = \circ/\text{۹۹۹۶۸۷}$$

۴- **تابندگی کهکشان:**

حل مسئله: فاصله تابندگی ($Luminosity\ distance$) که بر اساس آن قدر مطلق کهکشان‌ها در این فواصل به دست می‌آید. متناسب با عکس ثابت هابل است.

$$d_L \alpha \frac{cz}{H_\circ}$$

مدول فاصله برابر است با:

$$\mu = M - m - ۵\log d_L$$

با توجه به اینکه قدر ظاهری از نگاه دو منجم تغییری نمی‌کند اختلاف در قدر مطلق با فرض ثابت هابل ۷۰ و ۵۰ کیلومتر بر ثانیه بر مگا پارسک برابر خواهد بود با:

$$M_{۷\circ} = M_{۵\circ} + ۵\times\log(\frac{۷\circ}{۵\circ})$$

قدر $B = -۲۱/۵$ و رنگ $B - R = ۱/۵$است، پس قدر مطلق در باند R از نگاه منجم اول $M_{R,۵\circ} = -۲۳$ است. قدر مطلق خورشید در این باند ۴/۴۵ خواهد بود چون رنگ خورشید ۱/۰۰ داده‌شده است و در نتیجه:

$$M_{R,۷\circ} = -۲۳/\circ + \circ/۷۳$$

$$\log(\frac{L_{R,۷\circ}}{L_{R\odot}}) = \frac{(M_{R,۷\circ} - M_\odot)}{۲/۵}$$

$$\frac{L_R}{L_\odot} = ۱\circ^{۱۱.۲۷} \times ۱.۱$$

که در آن افزایش تابندگی ۱۰ درصدی با ضریب ۱/۱ منظور شده است و مقدار نهایی برابر است با: $۲/\circ۵ \times ۱\circ^{۱۱}$ برابر تابندگی خورشید در باند R.

شیب رابطه بین تابندگی ایکس و باند B تغییری نمی‌کند چون ضریب مربوط به تغییر ثابت هابل برای باند ایکس و مرئی یکسان است.

۵- **خوشه‌ی ستاره ای:**

الف)

$$M_x = \circ.۵M_{sun} \Rightarrow L_x = \frac{۱}{۸}L_{sun}$$

$$M_y = ۵M_{sun} \Rightarrow L_y = ۱۲۵L_{sun}$$

$$\frac{M}{L} = \frac{N_xM_x + N_yM_y}{N_xL_x + N_yL_y} = \frac{\frac{N_x}{۲} + ۵N_y}{\frac{N_x}{۸} + ۱۲۵N_y} = ۲ \Rightarrow \frac{N_x}{N_y} \rightarrow\sim ۱\circ\circ\circ$$

ب)

$$\frac{L_x^{total}}{L_y^{total}} = \frac{L_xN_x}{L_yN_y} = \frac{\frac{۱}{۸}}{۱۲۵}\times ۱\circ\circ\circ = ۱$$

ج)

$$N_x = CM_x^{-a}, N_y = CM_y^{-a} \Rightarrow \frac{N_x}{N_y} = (\frac{m_x}{m_y})^{-a} = ۱۰۰۰ \Rightarrow (\frac{۱}{۱۰})^{-a} = ۱۰۰۰ \Rightarrow a = ۳$$

۶- **ساختار کروی:**

m جرم متوسط ذرات است.

الف)

$$E_g = -\frac{۳}{۵}\frac{GM^۲}{R}, E_{KE} = \frac{۳}{۲}NkT = \frac{۳}{۲}\frac{M}{m}kt$$

شرط رمبش:

$$\left|E_g\right| > E_{KE} \Rightarrow \frac{۳}{۵}G\frac{M^۲}{R} > \frac{۳}{۲}\frac{M}{m}kT \Rightarrow \frac{۱}{۵}G\frac{M}{R} > \frac{۱}{۲}\frac{kT}{m} \Rightarrow R < \frac{۲GMm}{۵kT} \Rightarrow \frac{۳M}{۴\pi\rho} < (\frac{۲GMm}{۵kT})^۳ \Rightarrow$$

$$\rho_c > \frac{۳}{۴\pi M^۲}(\frac{۵kT}{۲Gm})^۳$$

$$k = ۱.۳۸\times۱۰^{-۲۳}, m = ۲m_H = ۲(۱.۶۷\times۱۰^{-۲۷}) = ۲.۳۴\times۱۰^{-۲۷}kg, G = ۶.۶۷\times۱۰^{-۱۱}$$

$$\rho_c \approx ۵\times۱۰^{-۱۵}kgm^{-۳}$$

ب)

$$\frac{M}{۲m_H}\varepsilon_{decomposition} + \frac{M}{m_H}\varepsilon_{ionization} = \frac{۳}{۵}(\frac{GM^۲}{R_۲} - \frac{GM^۲}{R_۱})$$

مقدار $R_۱$ را می‌توان از قسمت الف برآورد کرد:

$$R_۱^۳ = \frac{M}{\frac{۴}{۳}\pi\rho_c} \Rightarrow R_۱ \sim ۱۰^{-۴}pc \gg R_۲$$

$$۲\times۱۰^{۳۹}J \cong \frac{۳}{۵}\frac{GM^۲}{R_۲} \Rightarrow R_۲ \cong ۸\times۱۰^{۱۰}m = ۲\times۱۰^{-۶}pc$$

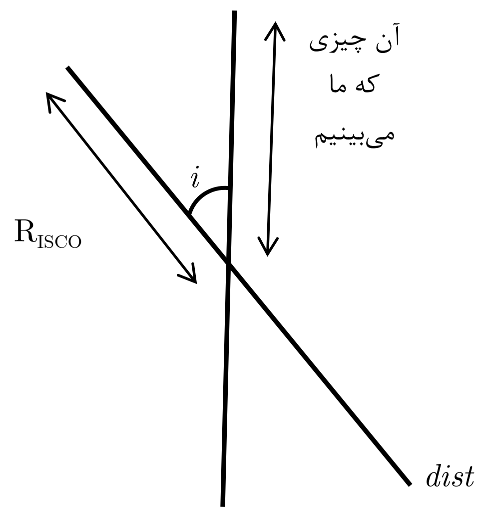
ج) در حالت تعادل هیدرو استاتیک داریم:

$$E_g - ۲E_{KE} = ۰$$

$$E_g = -۲\times۱۰^{۳۹}J\ , \quad E_{KE} = \frac{۳}{۲}N'kT - ۱۲\frac{N}{۲}kT = ۳\frac{M}{m_H}kT \Rightarrow T = ۲۰۰۰۰K$$

۷- **قرص برافزایشی:**

الف) فرض کنید مسیر ذرات قرص به‌طور ذاتی دایره‌ای باشد. اگر قرص نسبت به صفحه‌ی آسمان انحراف داشته باشد. قرص شبیه بیضی دیده می‌شود.



با توجّه به شکل خواهیم دید شعاع دیده شدن به مقدار $R_{ISCO}\cos(i)$ کاهش می‌یابد. شار دریافتی روی زمین به صورت زیر است:

$$F=\frac{Luminosity}{۴\pi d^۲}=\frac{۱}{۲}\frac{۲\sigma T^۴(Area)}{۴\pi d^۲}$$

مساحت ناحیه‌ی مورد نظر:

$$Area=۴\pi R_{ISco}^۲\cos(i)-\pi R_{ISco}^۲\cos(i)$$

تقسیم‌بر دو به خاطر این است که ناظر زمینی فقط یک طرف قرص را می‌بینند.

$$F=\frac{۳\sigma T^۴R_{ISco}^۲\cos(i)}{۴d^۲}$$

$$R_{ISco}=(\frac{۴Fd^۲}{۳\sigma T^۴\cos(i)})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\sigma=۵/۶۷\times۱۰^{-۸}(\frac{W}{m^۲K^۴})=۵/۶۷\times۱۰^{-۵}(\frac{erg}{cm^۲K^۴})$$

$$۱\ pc=۳/۰۸۵\times۱۰^{۱۶}(m)=۳/۰۸۵\times۱۰^{۱۸}(cm)$$

$$d=۱(kpc)$$

$$R_{ISco}=\frac{۲d}{T^۲\cos(i)}\sqrt{\frac{F}{۳\sigma}}$$

ب) می‌دانیم طبق قانون جابجایی ویلهلم وین:

$$h\nu_{peak}=۵k_bT\ \Rightarrow\ T=\frac{hc}{۵k_b\lambda_{rmpeak}}\Rightarrow\quad T=۹۹۴۰۰۲K=۹/۹۴\times۱۰^۵K$$

$$k_b=۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}(\frac{J}{K})\ ;\ \lambda_{rmpeak}=۲/۹(nm)\ ;\ h=۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴}(Js)$$

$$T=\frac{6.626\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{5\times1.38\times10^{-23}\times2.9\times10^{-9}}=9.9\times10^{5}\quad {}^{\circ}K$$

اگر همه‌ی این اعداد را در رابطه‌ی R_{ISco} بگذاریم خواهیم داشت: $R_{ISco}=15/8km$

$$R_{ISco}=\frac{2\times3/085\times10^{19}}{(9/9\times10^{5})^{2}\times\cos(80)}\times\sqrt{\frac{2\times10^{-12}}{3\times5/67\times10^{-8}}}=15/8(Km)$$

ج) برای این سیاهچاله

$$R_G=\frac{GM}{c^2}=\frac{6/67\times10^{-11}(\frac{Nm^2}{kg^2})\times2\times10^{31}(kg)}{(3\times10^{8}(\frac{m}{s}))^{2}}=14/82\times10^{3}(m)=14/82(km)$$

است و $R_{ISco}=15/8\ (km)$ و $\frac{R_{ISco}}{R_G}=\frac{15/8}{14/82}=1/07$ و در نتیجه $R_{ISco}=1/07\ R_G$

به نظر می‌رسد که در این سیستم سیاهچاله اسپین نزدیک به ماکزیمم مقدار را دارا است.

د) می‌دانیم که $L=\frac{GM\dot{M}}{2R_{ISco}}$ و در ضمن $L=2\sigma T^{4}(3\pi R_{ISco}^{2})$ از تساوی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$2\sigma T^{4}(3\pi R_{ISco}^{2})=\frac{GM\dot{M}}{2R_{ISco}}\quad\Rightarrow\quad\dot{M}=\frac{12\pi\sigma T^{4}R_{ISco}^{3}}{GM}$$

$$\dot{M}=\frac{12\times3/14\times5/67\times10^{-8}\times(9/993\times10^{5})^{4}\times(15/8\times10^{3})^{3}}{6/67\times10^{-11}\times2\times10^{31}}(\frac{kg}{s})$$

$$1\frac{kg}{s}=\frac{365/25\times24\times3600}{2\times10^{30}}(\frac{M_\odot}{yr})=\frac{3/15\times10^{7}}{2\times10^{30}}(\frac{M_\odot}{yr})=1/57\times10^{-23}(\frac{M_\odot}{yr})$$