بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
هفتمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک سال ۱۳۸۹

تعداد سوالات تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
۷	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- تعداد سؤالات این آزمون **۷ سؤال** و وقت آن **۴ ساعت** است.
- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط آقای **کامبیز خالقی** تهیه شده است.

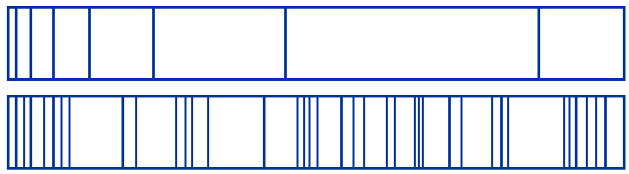
ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^{۳} kg^{-۱} s^{-۲}$
c	سرعت نور	$۳\times ۱۰^{۸} ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶} m$
Au	واحد نجومی	$۱/۵۰\times ۱۰^{۱۱} m$
Ly	سال نوری	$۹/۴۶\times ۱۰^{۱۵} m$
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	$۶/۹۶\times ۱۰^{۸} m$
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	$۶/۳۸\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع ماه	$۱/۷۴\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع مداری ماه	$۳/۸۴\times ۱۰^{۸} m$
$M_{\oplus}$	جرم زمین	$۵/۹۷\times ۱۰^{۲۲} kg$
$T_{\odot}$	دمای خورشید	$۵۷۷۷ K$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$۳/۸۵\times ۱۰^{۲۶} W$
	ثابت خورشیدی	$۱/۳۷\times ۱۰^{۳} Wm^{-۲}$
$m_{\odot}$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶/۸$
H	ثابت هابل	$۷۰ km\, s^{-۱} Mpc^{-۱}$

۱- الف) اگر بیشینه تابش در طیف ستاره‌ی A در طول موج ۲۹۰ نانومتر و بیشینه تابش در طیف ستاره‌ی B در طول موج ۸۷۰ نانومتر رصد شده باشد، مشخص کنید که طیف‌های ۱و۲ به ترتیب متعلق به کدام یک از ستاره‌های Aو B است.

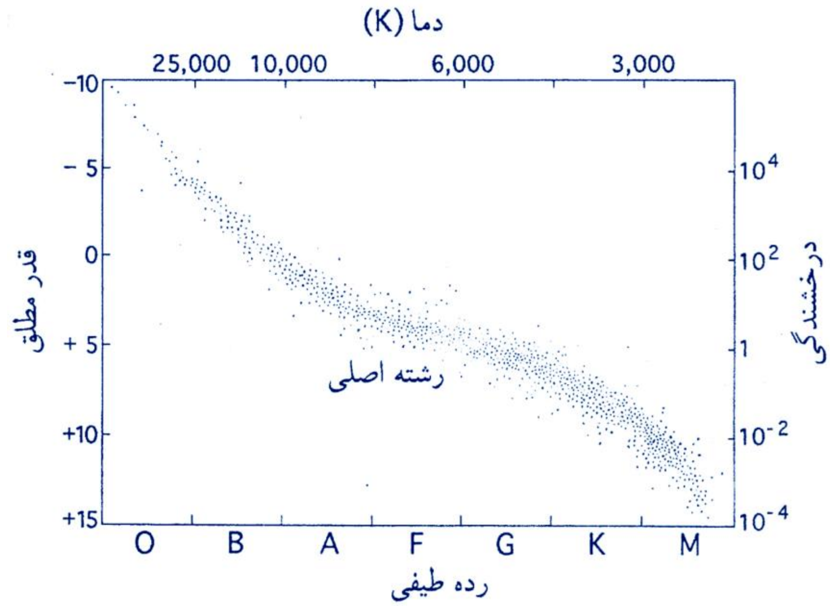
طیف ۱

طیف ۲



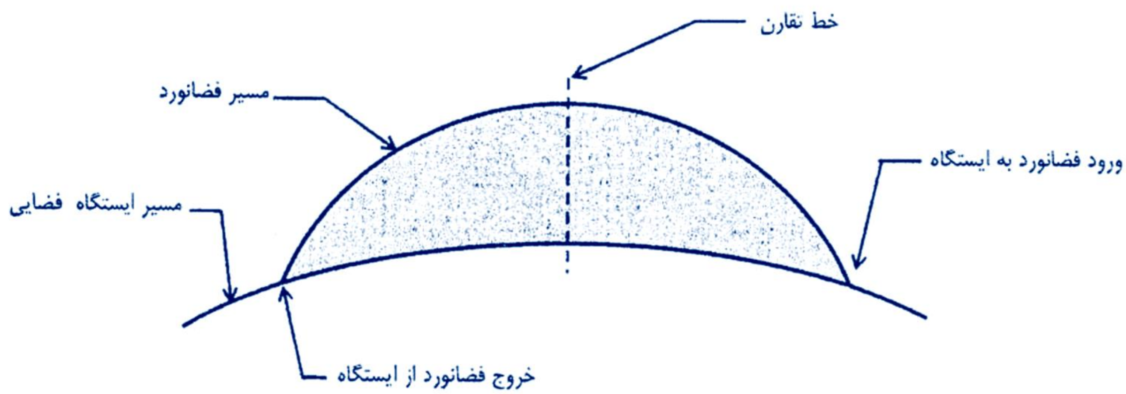
طیف	۱	۲
ستاره		

ب) طیف جذبی ۱ دارای بیشترین و تاریک‌ترین خطوط جذبی هیدروژن نسبت به تمامی گونه‌های طیفی است. اگر فرض کنیم هر دو ستاره‌ی Aو B در مرحله‌ی هیدروژن سوزی در هسته باشند. مکان دو ستاره را در شکل زیر مشخص کنید.



پ) نسبت جرم ستاره‌ی A به ستاره‌ی B چقدر است؟

۲- یک ایستگاه فضایی در مداری دایروی با دوره تناوب Tو شعاع R به دور زمین در گردش است. در یک حرکت نمایشی، فضانوردی قصد دارد با پرش از ایستگاه، طی یک حرکت در فضا مسیری را آزادانه (بدون استفاده از نیروی پیشرانش و یا ...) طی کرده و دوباره به ایستگاه برگردد. مسیر طی شده‌ی وی در فضا در شکل زیر نشان داده شده است. (شکل به مقیاس نیست) مسیر هم‌صفحه با مدار ایستگاه فضایی و همچنین مسیر، نسبت به خط میانی متقارن است. (زاویه جدا شدن از ایستگاه و ورود به ایستگاه برابر است) مساحت قسمت رنگی در شکل πR^2 / ۳۰ و زمان این مانور ۶ / T است.



الف) خروج از مرکز مدار فضانورد را حساب کنید.

ب) نسبت نیم‌محور بزرگ مدار فضانورد، (a) به Rرا محاسبه کنید.

پ) هنگامی که فضانورد و ایستگاه هر دو به خط تقارن مانور می‌رسند، اندازه سرعت فضانورد نسبت به ایستگاه را بر حسب T و R بدست آورید.

۳- سفینه‌ی فضایی به جرم ۲۵ کیلوگرم در کاوش‌های خارج از منظومه‌ی شمسی خود با یک ستاره‌ی غول سرخ مواجه می‌شود. جرم غول برابر جرم خورشید و درخشندگی آن ۱۰۰۰ برابر درخشندگی خورشید است. حرکت سفینه در یک خط مستقیم به سمت مرکز غول است و تحت گرانش آن به سویش سقوط می‌کند. هنگامی که سفینه به نزدیکی غول رسید، دما و حرارت بالا باعث روشن شدن علائم هشدار در سفینه می‌شود و سفینه بادبان‌های نوری خود را باز می‌کند. این بادبان‌ها تحت تأثیر فشار تابشی، بر نیروی گرانش غول غلبه کرده و سفینه از غول فاصله می‌گیرد. فاصله‌ی سفینه از مرکز غول، (D) برحسب زمان t در نمودار ثبت شده است. بادبان‌ها نور را به صورت آینه‌ای دریافت و بازتاب می‌کنند و صفحه بادبان‌ها بر راستای تابش غول و راستای حرکت عمود است. در حل مسئله تنها نیروهای گرانش غول و فشار تابشی بر بادبان‌ها بعد از باز شدنشان را در نظر بگیرید و از تأثیرات جو غول و اثرات مغناطیسی و ... صرف‌نظر کنید. با استفاده از نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید.

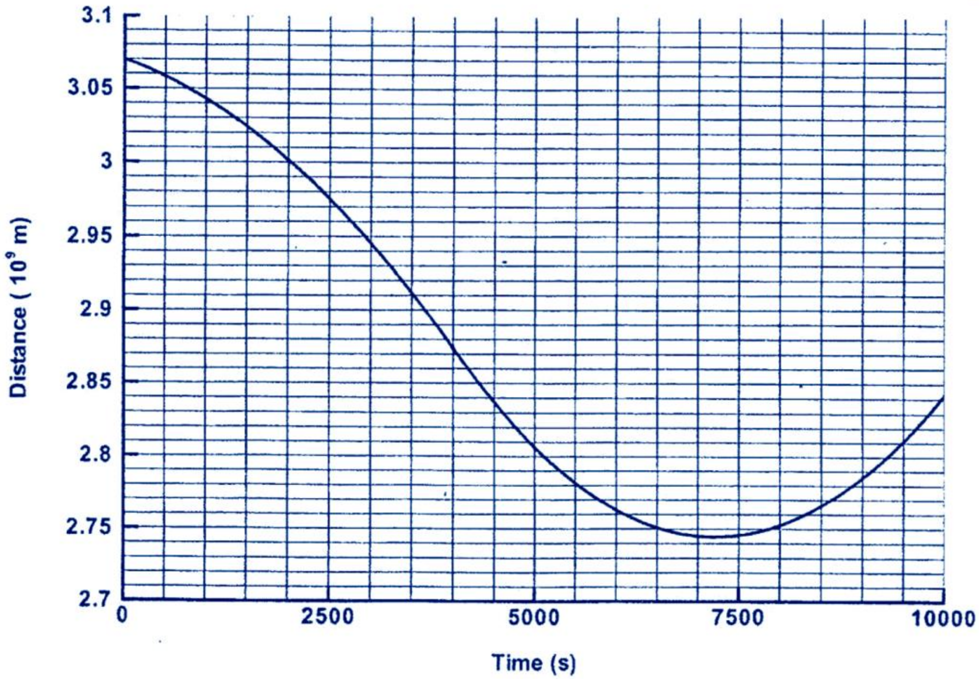
این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد

جرم خورشید $M_\odot = ۲\times ۱۰^{۳۰} kg$ است.

ثابت جهانی گرانش $G = ۶ / ۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^۳ kg^{-۱} s^{-۲}$ است.

درخشندگی خورشید $L_\odot = ۳ / ۸۵\times ۱۰^{۲۶} W$ است.

سرعت نور $c = ۳\times ۱۰^{۸} m.s^{-۱}$ است.



الف) سفینه در چه زمانی بادبان‌های خود را باز کرده است؟ برای پاسخ خود استدلال کافی بیاورید.

ب) مساحت بادبان‌های سفینه چند متر مربع است؟

۴- ناظری در شهری با عرض جغرافیایی ϕ (شمالی) زندگی می‌کند. کم‌ترین طول دایره‌البروجیِ نقطه‌ای از آسمان که در سمت‌الرأس ناظر قرار دارد، چقدر است؟ (ε زاویه‌ی بین دایره‌البروج و استوای سماوی است.)

الف) در حالتی که $\phi < ۹۰ - \varepsilon$ ب) در حالتی که $\phi > ۹۰ - \varepsilon$

۵- سرعت رصدی اجرام کیهانی برابر است با مجموع سرعت جریان هابلی $v = H_\circ r$ و مؤلفه‌ی سرعت خاصه در امتداد خط دید که به واسطه اثرات گرانشی موضعی پدید می‌آید.

این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد.

ثابت هابل $H_\circ = ۷۲\, km\, s^{-۱} Mpc^{-۱}$ است.

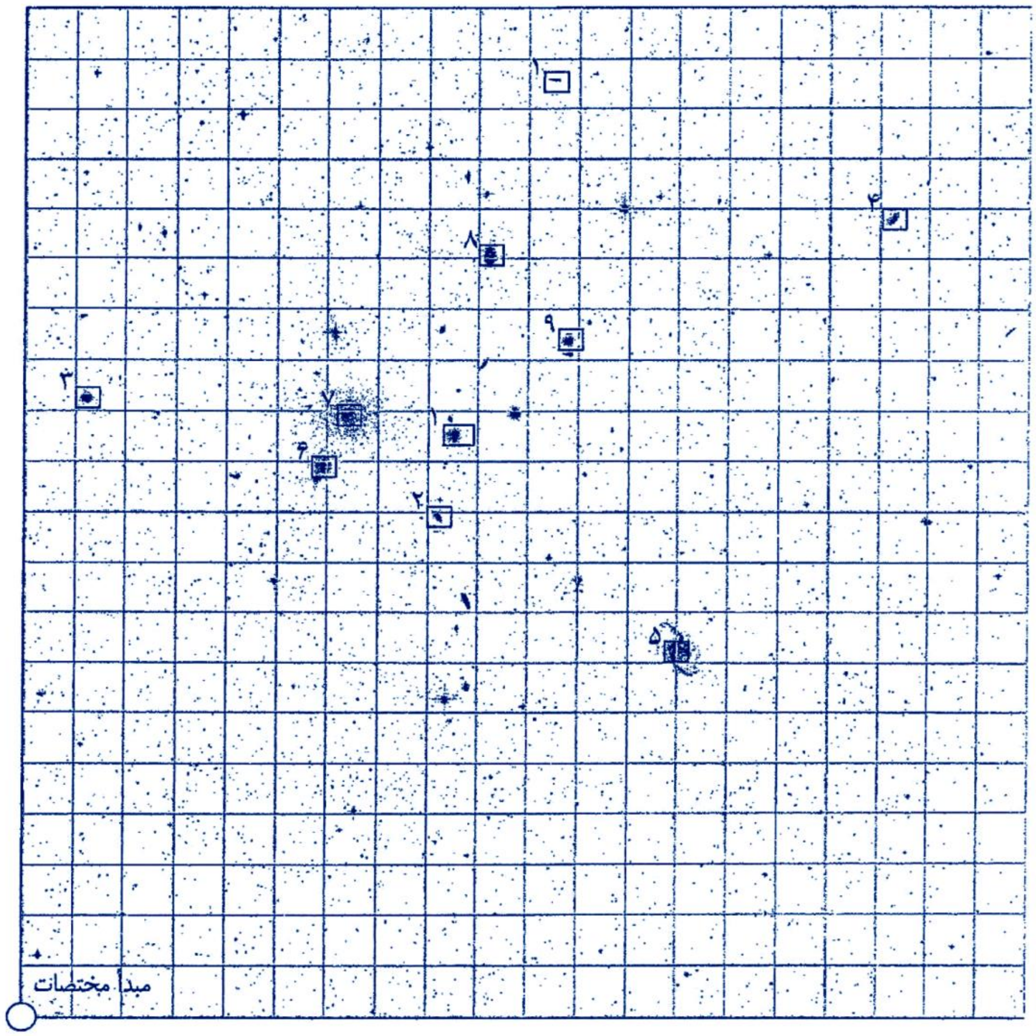
سرعت نور $c = ۳ \times ۱۰^{۸} m.s^{-۱}$ است.

الف) فرض کنید می‌خواهیم ثابت هابل را با اندازه گرفتن فاصله و انتقال به سرخ یک جرم منفرد در کیهان موضعی تخمین بزنیم. ثابت هابل چگونه به سرعت خاصه این جرم مربوط می‌شود؟

ب) اگر مقدار مؤلفه‌ی در امتداد خط دیدِ سرعتِ خاصه برابر با $۶۰۰ km / s$ باشد در چه فاصله‌ای درصد خطای نسبی در اندازه‌گیری ثابت هابل ۵% می‌شود؟

پ) اگر این جرم در انتقال به سرخ $z = ۰/۰۴$ قرار داشته باشد، در حضور سرعت خاصه ذکر شده در قسمت قبل میزان تغییر در انتقال به سرخ ناشی از انبساط هابلی چقدر است؟

۶- عکس زیر از ناحیه‌ای از آسمان است که خوشه‌ای از کهکشان‌ها را نشان می‌دهد. این خوشه ٦٢ میلیون سال نوری از زمین فاصله دارد. خوشه‌ی کهکشان‌ها مجموعه‌ای از کهکشان‌ها است که با یکدیگر برهم‌کنش گرانشی مستقیم دارند. مساحت این عکس برابر مساحت خوشه و مساوی $۴۷' \times ۴۷'$ است.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید این عکس به $۲۰ \times ۲۰ = ۴۰۰$ ناحیه تقسیم شده است. بدین ترتیب می‌توان به هر نقطه از این عکس یک مختصات نسبت داد. مختصات گوشه‌ی چپ-پایین در این عکس (۰,۰)است. مکان ۱۰ کهکشان از اعضای این خوشه در عکس مشخص شده است. جدولی که در ادامه آمده است، مشخصات این ۱۰ کهکشان را نشان می‌دهد. ستون اول جدول، شماره‌ی کهکشانی را که در عکس آمده است را تعیین می‌کند. ستون دوم و سوم مختصات کهکشان را نشان می‌دهد. ستون چهارم نسبت جرم (M) به درخشندگی در فیلتر آبی (L_B) هر کهکشان را بر حسب واحدهای خورشیدی تعیین می‌کند. یعنی برای خورشید داریم $M / L_B = ۱$. ستون آخر نیز قدر ظاهری هر کهکشان را در فیلتر آبی (B) را نشان می‌دهد.

شماره‌ی کهکشان	X	Y	M/LB	B
۱	۱۰/۵۳	۱۸/۵۸	۷/۲۳	۱۹/۰۱
۲	۸/۲۱	۹/۹۳	۸/۹	۱۷/۹۱
۳	۱/۲۴	۱۲/۲۵	۷/۴	۱۴/۷۹
۴	۱۷/۲۷	۱۵/۷۹	۶/۹	۱۵/۸۸
۵	۱۳/۰۳	۷/۲۶	۴/۵	۱۰/۲۴
۶	۵/۹۵	۱۰/۹۴	۵/۱	۸/۸۱
۷	۶/۴۷	۱۱/۹۱	۹/۳	۹/۶۸
۸	۹/۲۳	۱۵/۰۸	۱۰/۰	۱۱/۹۶
۹	۱۰/۸۳	۱۳/۳۸	۳/۴	۱۳/۸۲
۱۰	۸/۵۵	۱۱/۵۳	۵/۷	۱۱/۳۶

این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد.

قدر مطلق خورشید در فیلتر آبی ٥/٤٧ است.

یک واحد نجومی $1/5 \times 10^{11}$ متر است.

یک پارسک ٢٠٦٢٦٥ واحد نجومی است.

الف) با توضیح مختصر و انجام محاسبات لازم، مختصات مرکز جرم خوشه را بدست آورید و مکان آن را در عکس با علامت (+) مشخص کنید.

ب) اگر این ۱۰ کهکشان، تنها ۱۰ درصد از کل درخشندگی خوشه را (در فیلتر آبی) تولید کنند، قدر یک ثانیه‌ی قوسی مربع از این خوشه را در فیلتر آبی محاسبه کنید.

۷- اسطرلاب یک ابزار نجومی قدیمی است که به‌وسیله‌ی آن می‌توان در هر لحظه سمت و ارتفـاع سـتـاره‌ها را برای یک ناظر بیابیم. طی قرن‌ها و اعصار گذشته، منجمان به نوشتن کتاب‌ها و مقالات فراوانی در زمینه‌ی آن پرداخته‌اند. به عنوان نمونه می‌توانیم به کتاب «التفهیم» از ابوریحان بیرونی اشاره کرد که فصلی از آن به توضیح و توصیف اسطرلاب و اجزای آن اختصاص یافته است. علاوه بر نوشتن این کتب، برخی از منجمان به تکمیل اسطرلاب‌ها و افزودن قابلیت‌های تازه به آن‌ها می‌پرداختند و انواع تازه‌ای از اسطرلاب را می‌ساختند. مثلاً ابوریحان بیرونی وقتی به اُسطرلاب‌های مختلف اشاره می‌کند، از اسطرلابی به نام «زورقی» نام می‌برد که توسط ابوسعید سجزی ساخته شده و بر مبنای چرخش زمین است. در یک حالت ساده، ساختن یک اسطرلاب وسیلهٔ دو صفحه (در واقع دو دایره) امکان پذیر است.

صفحه‌ی ۱: این صفحه به صورت یک طلق در بسته‌ی سؤالات قرار گرفته است و همان‌طور که مشاهده می‌کنید از دایره‌ای که محیط آن بر حسب ساعات شبانه‌روز درجه‌بندی شده، تشکیل شده است. درون آن هم در واقع نقشه‌ای از ستاره‌ها و صورت‌های فلکی، قابل مشاهده هستند. ضمناً برای سهولت کار دایره‌البروج نیز رسم شده که در تصویر مشخص شده است.

صفحه‌ی ۲: این صفحه مشخص کننده‌ی سمت و ارتفاع برای ناظری در شهر تهران است و محیط آن به صورتی درجه‌بندی شده است که روزهای سال را نمایش می‌دهد. خم مربوط به افق ناظر را درون این صفحه مشاهده می‌کنید. پس از خمِ مربوط به اُفق، خم‌هایی مشخص شده است که در واقع دوایر هم ارتفاع هستند و نشان دهنده‌ی ارتفاع‌های صفر تا ۹۰ درجه (به صورت ۱۰ درجه، ۱۰ درجه) است. در نهایت، مرکز این دوایر به نقطه‌ای ختم شده است که نشان دهنده‌ی سمت‌الرأس ناظر است. خم‌های دیگری که از سمت‌الرأس خارج شده‌اند، خم‌های هم سمت هستند و سمت شرقی و غربی را از صفر تا ۱۸۰ درجه (به صورت ۱۵ درجه، ۱۵ درجه) مشخص کرده‌اند. نقطه‌ی سفیدی که در سمت صفر درجه و ارتفاع ۳۶° قرار دارد، نشانگر قطب شمال سماوی است.

نحوه‌ی استفاده: مرکز این دو صفحه را بر روی هم قرار دهید. به طوری که ستاره‌ی قطبیِ صفحه‌ی ۱، در مکان صحیحش در صفحه‌ی ۲ قرار بگیرد. با چرخاندن این صفحه‌ها بر روی یکدیگر می‌توانید زمانی که مد نظر دارید را تنظیم کنید. مثلاً اگر قرار است اسطرلاب را برای ساعت ۱۰شب در روز اول فروردین تنظیم کنید باید صفحات را به نحوی بر روی هم قرار دهید که ساعت ۲۲ از صفحه‌ی ۱ بر روی ۱ فرودین از صفحه‌ی ۲ منطبق شود. سپس با توجه به محل قرار گیری هر ستاره در صفحه‌ی ۲، می‌توانید سمت و ارتفاع آن را بیابید.

اکنون با استفاده از اسطرلابی که دارید به سؤالات زیر پاسخ دهید: ماخ

الف) پنج صورت فلکی که تماماً در نیمکره‌ی شمالی دایره‌البروج قرار دارند را نام ببرید. (این صورت‌های فلکی باید در نقشه موجود باشند.)

ب) سه صورت فلکی که در اول اسفند ماه ساعت ۱۰ شب، تمامی ستاره‌هایشان ارتفاعی بیش از ۳۰ درجه دارند را نام ببرید. (این صورت‌های فلکی باید در نقشه موجود باشند.)

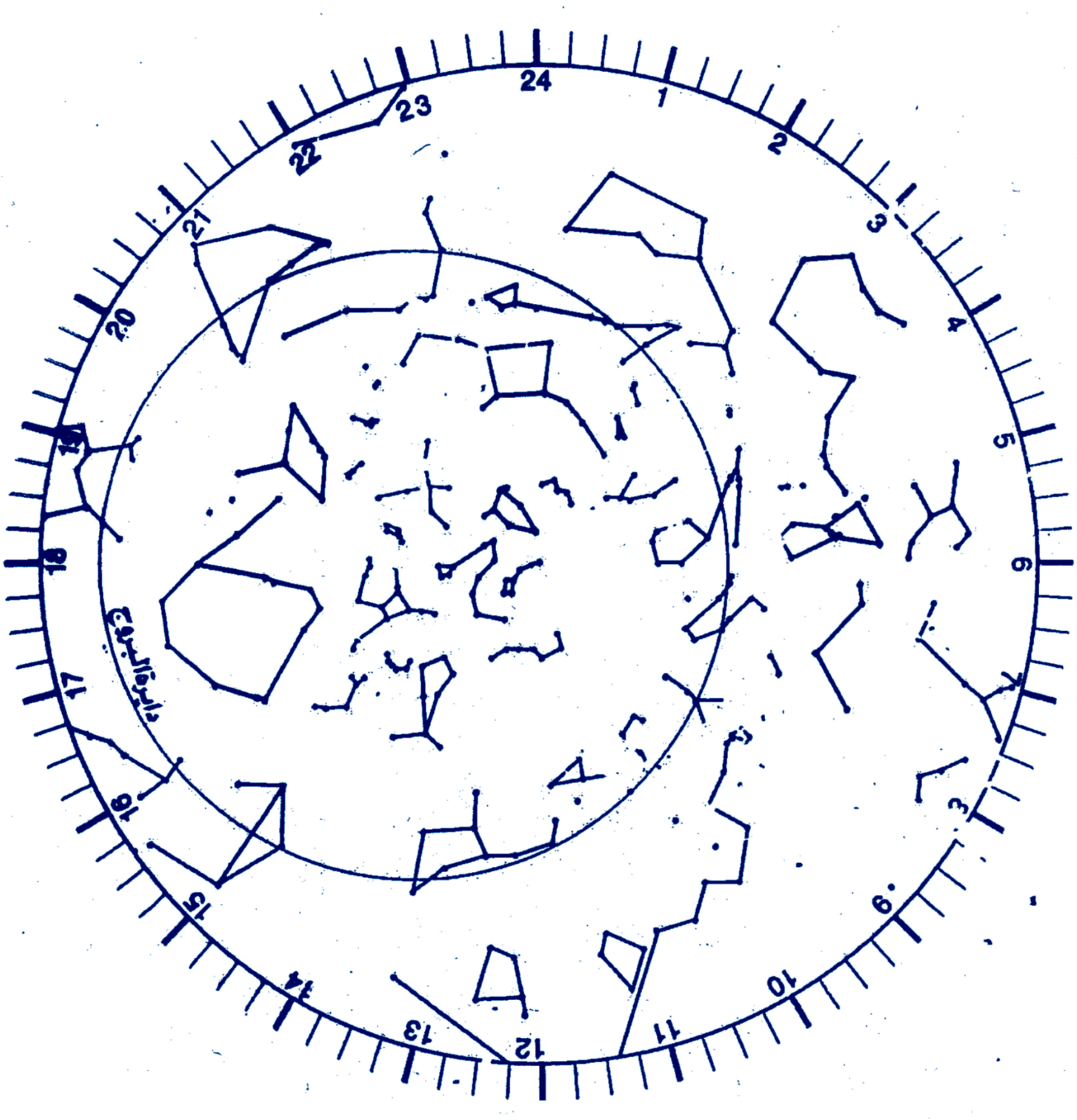
پ) در ساعت ۸ شب چه روزی از سال ستاره‌ی دِنب از نصف‌النهار ناظر عبور می‌کند؟

ت) ارتفاع نسرطائر وقتی که سمت آن از دید ناظر ۱۲۰ درجه است، چقدر خواهد بود؟

ث) ناظری در فصل تابستان، خورشید را با ارتفاع ۱۰° و سمت ۸۰° مشاهده می‌کند. در این هنگام، خورشید در کنار کدام ستاره‌ی پرنور آسمان قرار دارد؟

این صفحه و صفحه‌ی بعد را از دفترچه‌ی سؤالات خود جدا نموده و دقت کنید که بر روی آن پاسخی ننویســـید. در پایان آزمون، می‌توانید این دو صفحه را همراه خود ببرید. [1]

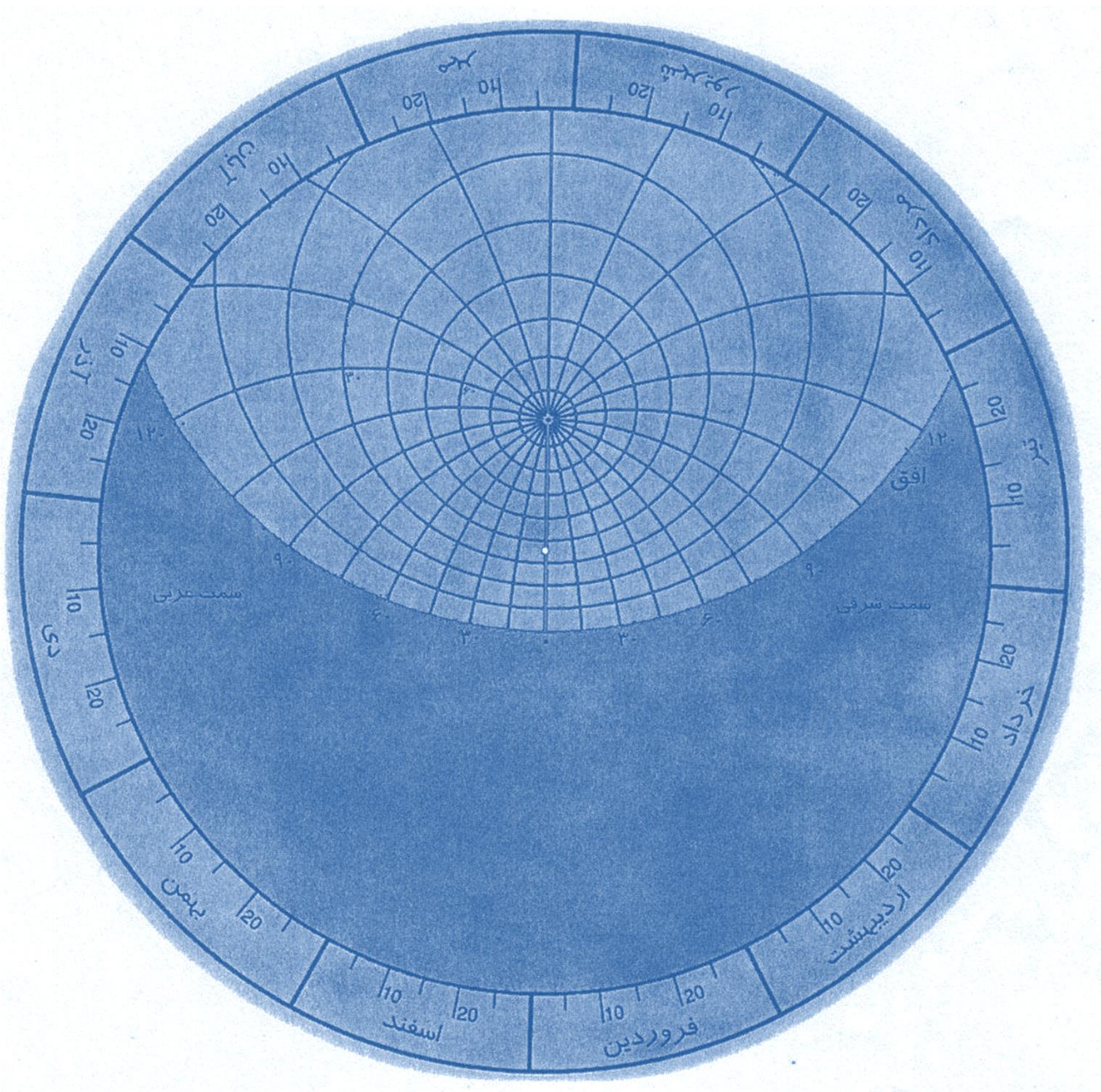
صفحه ۱



[1] طراحی و محاسبه‌ی اسطرلاب از سید امیرسادات موسوی.

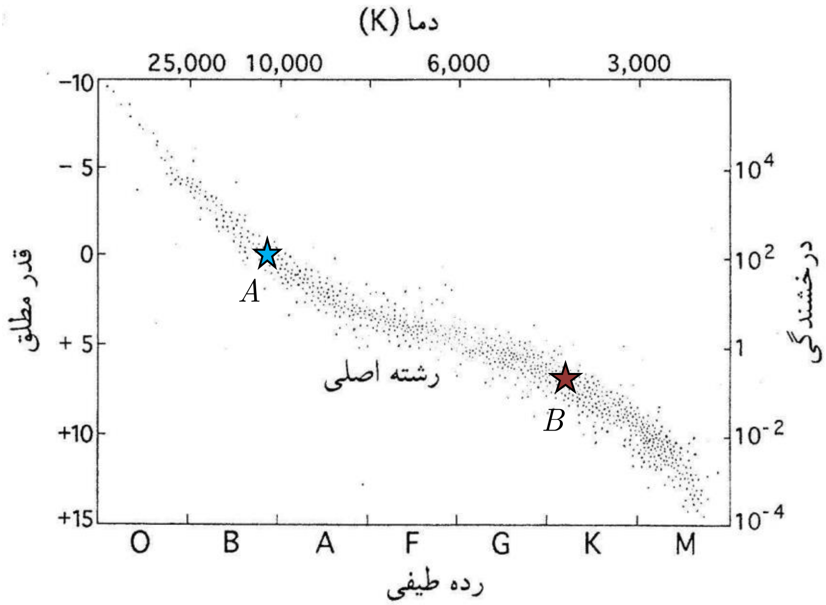
ماخ

صفحه ۲


افق
سمت غربی
سمت شرقی
آذر
دی
بهمن
اسفند
فروردین
اردیبهشت
خرداد

۱- الف) با توجه به قانون وین داریم: $\lambda_{\max}T = ۰/۰۰۲۹$ با جایگذاری طول موج‌های ۲۹۰ و ۸۷۰ نانومتر برای ستاره‌های A و B داریم: $T_A = ۱۰^۴$ و $T_B = ۳/۳\times ۱۰^۳$. پس ستاره‌ی A داغ‌تر است. از طرف دیگر می‌دانیم که هر چه دمای ستاره‌ای پایین‌تر باشد، فراوانی خطوط جذبی مولکولی در طیف ستاره بیشتر می‌شود. پس طیف ۲ متعلق به ستاره‌ی B و طیف ۱ متعلق به ستاره‌ی A است.

ب) خطوط جذبی هیدروژن در طیف ستاره‌های گونه‌ی O و B قوی‌تر می‌شود؛ پس ستاره‌ی A از گونه‌ی طیفی O یا B است؛ اما جای دقیق‌تر ستاره از روی نمودار را می‌توان با توجه به محور دما که در بالای نمودار ذیل رسم شده است، تعیین نمود (از آنجا که هر دو ستاره در مرحله‌ی هیدروژن سوزی قرار دارند، هر دو ستاره روی رشته‌ی اصلی قرار می‌گیرند).



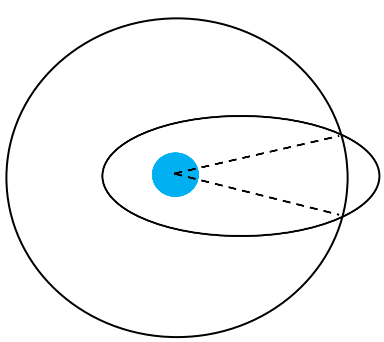
پ) از روی نمودار قدر مطلق ستاره‌های A و B به ترتیب برابر ۰ و ۶+ سنجیده می‌شود. حال می‌توانیم بنویسیم:

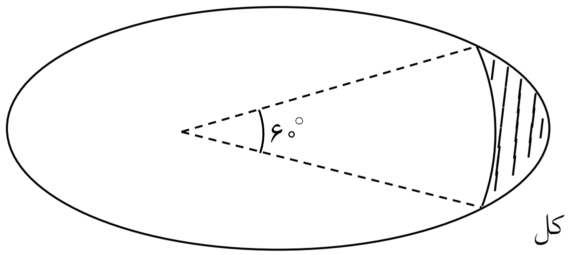
$$M_A - M_B = -۲/۵\log\frac{L_A}{L_B} \quad , \quad M_A = ۰ \quad , \quad M_B = +۶$$

در نتیجه داریم: $\frac{L_A}{L_B} = ۲۵۱$. از طرفی می‌دانستیم: $\frac{L_A}{L_B} = (\frac{M_A}{M_B})^{۳/۵}$ پس با جایگذاری این مقدار می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{M_A}{M_B} = ۰/۲۸$$

۲- الف) مرکز جرم مدارِ سفینه و فضانورد، مرکز زمین است. پس هر دو در مدارهایی مطابق شکل روبرو حرکت می‌کنند. اما مطابق شکل روبرو و با توجه به اینکه زاویه‌ی بین دو خط نقطه‌چین برابر یک ششم دوره تناوب است؛ زاویه‌ی بین دو خط $۶۰^\circ = ۶ \div ۳۶۰$ است. حال برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی بین دو خط نقطه‌چین روی مدار بیضی را چنین محاسبه می‌کنیم:





مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده بعلاوه‌ی مساحت بین دو خط نقطه‌چین که قطاع یک ششمی از مساحت دایره است؛ چنین می‌شود:

$$S_{\text{نقطه‌چین}} = \frac{۶۰\pi R^۲}{۳۶۰} + \frac{\pi R^۲}{۳۰} = \frac{\pi R^۲}{۶} + \frac{\pi R^۲}{۳۰} = \frac{\pi R^۲}{۵}$$

از آنجا که این مساحت ظرف مدت $T / ۶$ جاروب می‌شود و مساحت کل بیضی برابر است با πab؛ می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$T / ۶ \qquad\qquad \pi R^۲ / ۵$$

$$x \qquad\qquad \pi ab$$

در نتیجه: $x = \pi ab \frac{T}{۶} \times \frac{۵}{\pi R^۲} = \frac{۵}{۶} T \frac{ab}{R^۲}$ که در آن x تناوب کل مدار است.

حال نوبت به محاسبه‌ی شعاع r در بیضی می‌رسد؛ از آنجا که شعاع بیضی برحسب زاویه نسبت به نیم‌قطر اطول، برابر است با:

$R = \frac{a(۱-e^۲)}{۱+e\cos\theta}$ و در این حالت $\theta = ۱۸۰ - ۳۰ = ۱۵۰^\circ$ پس:

$$R = \frac{۲a(۱-e^۲)}{۲-\sqrt{۳}e} \qquad (*)$$

از طرف دیگر، طبق قانون سوم کپلر داریم: $(\frac{P_۱}{P_۲})^۲ = (\frac{a_۱}{a_۲})^۳$ و از آنجا که در این سامانه هر دو جسم به دور زمین می‌گردند و دوره تناوب دومی برابر T و شعاع مداری‌اش برابر R است و دوره تناوب جسم اول برابر است با $\frac{۵}{۶} T \frac{ab}{R^۲}$ که نیم قطر اطول مدارش برابر است با a. حال اگر این مقدار را در قانون کپلر جایگزین کنیم؛ داریم:

$$\left(\frac{\frac{۲۵}{۳۶} T \frac{ab}{R^۲}}{T}\right)^۲ = \left(\frac{a}{R}\right)^۳ \Rightarrow \frac{۲۵}{۳۶} \frac{a^۲ b^۲}{R^۴} = \frac{a^۳}{R^۳} \Rightarrow \frac{۲۵}{۳۶} \frac{b^۲}{R} = a$$

اگر مقدار R را از معادله‌ی (*) جایگزین کنیم داریم:

$$\frac{۲۵}{۳۶} b^۲ \frac{۲-\sqrt{۳}e}{۲a(۱-e^۲)} = a \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^۲ = \frac{۷۲}{۲۵} \frac{۱-e^۲}{۲-\sqrt{۳}e} \quad , \quad e = \sqrt{۱-\left(\frac{b}{a}\right)^۲} \Rightarrow e^۲ = \frac{۲-\sqrt{۳}e - ۲/۸۸ + ۲/۸۸e^۲}{۲-\sqrt{۳}e} \Rightarrow$$

$$۲e^۲ - \sqrt{۳}\,e^۳ - ۲ + \sqrt{۳}\,e + ۲/۸۸ - ۲/۸۸e^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad -e^۲(\sqrt{۳}\,e + ۰/۸۸) + (\sqrt{۳}\,e + ۰/۸۸) = ۰ \Rightarrow$$

$$(\sqrt{۳}\,e + ۵/۲)(۱-e^۲) = ۰ \quad \Rightarrow e = \pm ۱ \,,\, \frac{-۰/۸۸}{\sqrt{۳}}$$

ماخ

توجه داشته باشید که در مقدار عددی خروج از مرکز، علامت مثبت یا منفی صرفاً نشان دهنده‌ی جهت قرارگیری بیضی روی دستگاه مختصات است و معنای دیگری ندارد.

ب) برای محاسبه‌ی نسبت نیم‌محور بزرگ به R داریم: $R = \frac{۲a(۱-e^۲)}{۲-\sqrt{۳}e}$ که در آن $\frac{-۰/۸۸}{\sqrt{۳}}$, $e = \pm۱$ است. پس برای نسبت؛

$$\frac{R}{a} = ۰ \;,\; ۰/۵۲$$

پ) سرعت در مدار بیضوی از رابطه‌ی ذیل بدست می‌آید:

$$v = \sqrt{Gm(\frac{۲}{r} - \frac{۱}{a})} = \sqrt{Gm(\frac{۲(۱+e\cos\theta)}{a(۱-e^۲)} - \frac{۱}{a})}$$

و در لحظه‌ی مورد نظر $\theta = ۱۸۰^\circ$ پس:

$$v = \sqrt{Gm(\frac{۲(۱+e)\cos ۱۸۰}{a(۱-e^۲)} - \frac{۱}{a})} = \sqrt{Gm(\frac{۲}{a(۱+e)} - \frac{۱}{a})}$$

و در مورد دایره:

$$V = \sqrt{\frac{Gm}{a}}$$

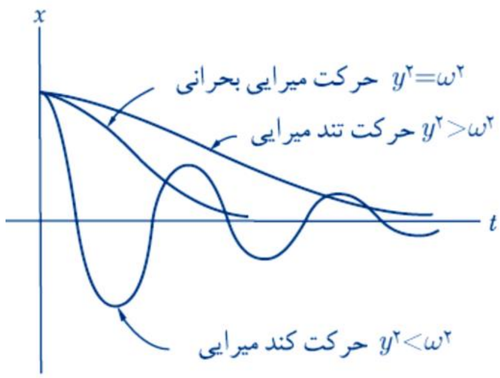
که پس از تقسیم داریم:

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{(\frac{۲}{a(۱+e)} - \frac{۱}{a})}{\frac{۱}{a}}} \;,\; e = \pm۱ \,,\, \frac{-۰/۸۸}{\sqrt{۳}} \;\Rightarrow \frac{v}{V} = ۰ \,,\, ۱/۲۶ \,,\, \infty$$

۳- الف) نقطه‌ای از خم که در آن جهت تقعر عوض می‌شود، نقطه‌ی عطف نام دارد. به طور کلی در نقطه‌ی عطف مشتق دوم معادله صفر می‌شود. عملاً نقطه‌ی عطف جایی از نمودار است که اثر کاهنده‌ی تعدادی از جملات، بر اثر افزاینده‌ی سایر جملات، غلبه می‌کند یا بالعکس. در این سوال نیز بلافاصله بعد از باز شدن بادبان‌ها خورشیدی، مؤلفه‌ای در جهت کاهش سرعت نزدیک شدن سفینه به خورشید، بر سرعت حرکت سفینه تأثیر می‌گذارد؛ پس برای پیدا کردن محل باز شدن بادبان‌ها، باید به دنبال نقطه‌ی عطف نمودار باشیم که تقریباً در مختصات زمانیِ $t = ۳۵۰۰s$ و مکانیِ $۲/۹۱\times۱۰^۹ m$ این اتفاق می‌افتد. این اطلاعات را با نوشتن معادله‌ی نیروهای مؤثر و برابر صفر قرار دادن این معادله نیز بدست آورد.

ب) از آنجا که سفینه به صورت خطی به خورشید نزدیک می‌شده و بعد از مدتی، شروع به دور شدن از خورشید کرده؛ با توجه به نمودار دو احتمال برای حرکت سفینه متصور است. نخستین احتمال اینکه، بادبان‌های سفینه به قدری بزرگ است که بعد از صفر شدن سرعت، سفینه به اعماق فضا شلیک می‌شود؛ احتمال دوم هم، اینکه سفینه حرکتی نوسانی داشته باشد که این احتمال، خود نیز به دو زیر شاخه تقسیم می‌شود. اولی نوسانگر ساده بودن سفینه و دیگری، نوسان‌گر میرا بودن آن است. اگر نوسانگر ساده باشد، مسیر حرکت باید از رابطه‌ی $A\cos(\omega t + \omega_۰)$ پیروی کند. یعنی مسیر باید بعد از لحظه‌ی باز شدن بادبان‌ها، نسبت به نقطه‌ی کمینه‌ی منحنی (سرعت صفر) متقارن باشد. اگر نمودار متقارن نباشد، نوسان‌گر میرا است؛ اما با بررسی نمودار

و با توجه به اعدادی که برای زمان در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفته، به سادگی تقارن مسیر حرکت آشکار می‌شود؛ لذا متحرک، نوسانگر ساده است؛ پس می‌توانیم مانند فنر با آن برخورد کنیم و بنویسیم: $F_s = k\Delta x$
اگر فرض کنیم دو نیروی مؤثر دیگر بر سفینه، یکی ناشی از فشار تابشی و دیگری ناشی از سقوط گرانشی سفینه باشد، می‌توانیم بنویسیم:



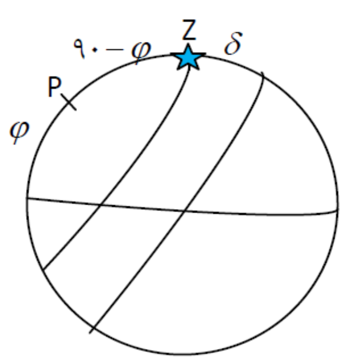
$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{GmM}{R^2} \\ F_{rad} &= \frac{\langle S\rangle A}{c}\cos\theta \end{aligned}\right\}, \; F - F_{rad} = F_s \qquad (*)$$

که در این معادله، می‌توانیم به ازای هر نقطه‌ی دلخواهی از مسیر معادله را بررسی کنیم که برای سادگی کار، جسم را در نقطه‌ی تعادل در نظر می‌گیریم تا $\Delta x = ۰$ و در نتیجه $F_s = ۰$ شود؛ علاوه بر این، در معادله‌ی (*)، A مساحت سطح جذب کننده است، در اینجا به علت سقوط عمودی سفینه روی خورشید، زاویه‌ی θ را برابر صفر در نظر می‌گیریم، S نیز روشنایی رسیده به سطح در فاصله‌ی ناظر است؛ جرم سفینه هم ۲۵ کیلوگرم است، درخشندگی ستاره هم ۱۰۰۰ برابر درخشندگی خورشید و جرم ستاره، برابر جرم خورشید است؛ بنابراین می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{GmM}{R^۲} = \frac{(\frac{۱۰۰۰L_\odot}{۴\pi R_۱^۲})A}{c} \Rightarrow A = \frac{۴GmM_\odot \pi c}{۱۰۰۰L_\odot} \Rightarrow$$

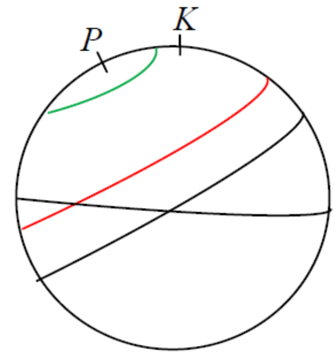
$$A = \frac{۴\times ۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^۳kg^{-۱}s^{-۲}\times ۲\times ۱۰^{۳۰}kg\times ۲۵kg\times \pi\times ۳\times ۱۰^۸ m.s^{-۱}}{۱۰۰۰\times ۳/۸۵\times ۱۰^{۲۶}W} \simeq ۳۲/۶\ m^۲$$

۴- ماخ می‌دانیم میل ستاره‌ای که از سمت‌الرأس می‌گذرد، با عرض‌جغرافیایی ناظر برابر است، پس $\phi = \delta$. حال می‌توانیم شروط مسئله را بدین شکل بازنویسی کنیم:



الف) $۹۰ - \delta > \varepsilon$

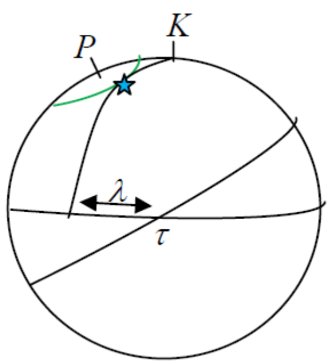
ب) $۹۰ - \delta < \varepsilon$



حال کره‌ی سماوی را برای دو دستگاه مختصات (دایره‌البروجی- بعد و میلی) رسم می‌کنیم. خط قرمز نشان‌دهنده‌ی مجموعه ستاره‌هایی‌ست که در شرط الف صدق می‌کنند بدیهی است که چنین ستاره‌هایی می‌توانند به ازای مقادیر مختلف بعد، تمامی مقادیر ممکن برای طول دایره‌البروجی را اتخاذ کنند و کم‌ترین مقدار طول هم صفر خواهد بود. اما در مورد قسمت ب موضوع کمی فرق می‌کند.

(برای ساده‌سازی و درک بهتر و شهودی سؤال می‌توانستید سوال را با این پرسش معروف که: «بیشترین مقدار سمت ستاره‌های با میل معلوم را بدست آورید» متناظر قرار دهید.)

در این حالت K,P جای خود را به P,Z می‌دادند و قسمت ب هم شبیه به استخراج بیشینه سمت ستاره‌هایی که در عبور بالایی از شمال سمت‌الرأس می‌گذشتند، می‌شد. برای حل این سؤال کمانی را بر مسیر حرکت ظاهری ستاره مماس می‌کردیم و اثبات کرده بودیم که ستاره در جایی به بیشترین سمت می‌رسد که محور ارتفاع بر محور میل عمود گردد. «این موضوع، هم به صورت شهودی قابل اثبات است هم با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در مثلث PZS برحسب زاویه‌ی رأس Z؛ در این حالت تنها مقدار نامعلوم در طرف دیگر عبارت مقدار ارتفاع ستاره بود. آن هم با مشتق گرفتن بر حسب محور ارتفاع قابل استخراج بود (از مشتق برای بدست آوردن بیشینه عبارت جبری استفاده می‌کردیم).»



حال عبارت‌های جبری را برای مسئله‌ی مدّ نظر سؤال و در مثلث PKS بازنویسی می‌نماییم. با توجه به این نکته، PK برابر انحراف دایره‌البروج است، و این نکته که در حالت بیشینه‌ی طول دایره‌البروجی، PK بر KS عمود است؛ قضیه‌ی سینوس‌ها را چنین می‌نویسیم:

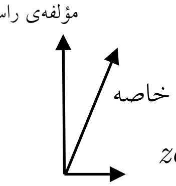
$$\frac{\sin ۹۰}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(۹۰-\lambda)}{\sin(۹۰-\delta)} \Rightarrow \cos\lambda = \frac{\cos\delta}{\sin\varepsilon}$$

از قبل و شکل اول به یاد داریم که در این مسئله، عرض جغرافیایی برابر میل است، پس در رابطه اخیر عرض را جایگذاری می‌کنیم: $\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{\sin\varepsilon}$

۵- الف) $V_{obs} = \pm v_r + v_{H_0}$ و از رابطه‌ی انتقال به سرخ داشتیم:

$V_{obs} = zc \Leftarrow \frac{V_{obs}}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = z$ و از طرف دیگر $v = H_0 r$ پس داریم: $zc \times ۱۰^{-۳} = \pm v_r + H_0 r$

در نتیجه: $v_r = zc - H_0 r$.



ب) این سؤال ترجمه‌ی سؤال ۲-۲ از کتاب *An introduction to modern cosmology* نوشته‌ی اندرو لیدل است.

در تعریف انتقال به سرخ داریم:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emitted}}{\lambda_{obs}} = \frac{R_{obs} - R_{emitted}}{R_{obs}}$$

در نتیجه داریم: $\frac{R_{emitted}}{R_{obs}} = ۱ + z$ و خواسته‌ی سؤال از ما این است که در اندازه‌گیری فاصله ۵ درصد خطا داشته باشیم،

یعنی؛ ۰/۹۵ یا $۱/۰۵ \simeq \frac{۱}{۱/۰۵}$ یا $\frac{۱}{۰/۹۵} = \frac{R_{emitted}}{R_{obs}}$ در نتیجه مقدار انتقال به سرخ برابر می‌شود با: $z = ۱ - ۱/۰۵ = \pm ۰/۰۵$

از طرفی با دانستن سرعت ذاتیِ خود جسم در راستای میدان دید (یعنی $v_r = ۶۰۰ km / s$)، می‌توانیم بنویسیم $zc = H_\circ r$ پس داریم:

$$r = \frac{v_r - zc}{H_\circ} = \frac{۶ \times ۱۰^۵ m.s^{-۱} \pm ۰/۰۵ \times ۳ \times ۱۰^۸ m.s^{-۱}}{۷۲۰۰۰\ m.s^{-۱} Mpc^{-۱}} = ۲۱۶Mpc \text{ یا } ۲۰۰Mpc$$

پ) $v_r = ۶۰۰ km.s^{-۱}$ و $V_{obs} = zc = ۰/۰۴ \times ۳ \times ۱۰^۸ m.s^{-۱} = ۱/۲ \times ۱۰^۴ km.s^{-۱}$، از طرف دیگر در قسمت (الف) به دست آوردیم که $V_{obs} = \pm v_r + H_\circ r$ پس داریم: $H_\circ r = ۱۱۴۰۰ km.s^{-۱}$ یا $۱۲۶۰۰ km.s^{-۱}$. همچنین می‌دانستیم که $zc = H_\circ r$. در نتیجه:

$$z = \frac{H_\circ r}{c} = \frac{۱۱۴۰۰ km / s}{۳ \times ۱۰^۵ km / s} \text{ یا } \frac{۱۲۶۰۰ km / s}{۳ \times ۱۰^۵ km / s} = ۰/۰۳۸ \text{ یا } ۰/۰۴۲$$

۶- الف) از آنجا که فاصله‌ی بین اعضای منفرد خوشه‌های کهکشانی در برابر فاصله‌ی بسیـار زیاد این خوشه‌ها تا ناظر زمینی، ناچیز است؛ به سادگی می‌توانیم همه‌ی کهکشان‌های این خوشه‌ها را در یک صفحه در نظر بگیریم، آن گاه در رابطه‌ی جرم–درخشندگی پارامتر فاصله حذف می‌شود و نسبت‌های درخشندگی‌ها بدست می‌آید. حال یکی از کهکشان‌ها را به عنوان معیار در نظر گرفته و درخشندگی باقی کهکشان‌ها را با آن مقایسه می‌کنیم:

$$B_۲ - B_۱ = -۲/۵ \log \frac{L_{B۲}}{L_{B۱}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{L_{B۲}}{L_{B۱}} = ۲/۷۵ \quad , \quad \frac{L_{B۳}}{L_{B۱}} = ۴۸/۷۵ \quad , \frac{L_{B۴}}{L_{B۱}} = ۱۷/۸۶ \quad , \quad \frac{L_{B۵}}{L_{B۱}} = ۳۲۲۱ \quad , \quad \frac{L_{B۶}}{L_{B۱}} = ۱۲۰۲۲ \quad , \quad \frac{L_{B۷}}{L_{B۱}} = ۵۳۹۵$$

$$\frac{L_{B۸}}{L_{B۱}} = ۶۶۰ , \quad \frac{L_{B۹}}{L_{B۱}} = ۱۱۹ \quad , \quad \frac{L_{B۱۰}}{L_{B۱}} = ۱۱۴۸$$

حال با مقایسه‌ی قدر مطلق خورشید (خورشید در یک پارسکی) با قدر ظاهری کهکشان ۱ (در فیلتر آبی)، روشنایی کهکشان ۱ را بدست آورده و سپس با توجه به دانستن فاصله‌ی خوشه‌ی کهکشانی، درخشندگی کهکشان ۱ و بعد؛ درخشندگی هر یک از کهکشان‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$B_\odot - B_۱ = -۲/۵ \log \frac{b_\odot}{b_{B۱}} \quad , \quad b = \frac{L}{۴\pi d^۲} \quad \Rightarrow \quad ۵/۴۷ - ۱۹/۰۱ = -۲/۵ \log\left(\frac{\frac{L_\odot}{d_\odot^۲}}{\frac{L_۱}{d_۱^۲}}\right) \Rightarrow \frac{d_۱^۲ L_\odot}{d_\odot^۲ L_۱} = ۲/۶ \times ۱۰^۵$$

و $d_\odot = ۱۰ pc$ و $d_۱ = ۶۲ \times ۱۰^۶ ly = ۶۲ \times ۱۰^۶ \times ۳/۲۶ pc = ۲/۰۲ \times ۱۰^۸$

پس از جایگذاری در عبارت بالا، نسبت درخشندگی کهکشان ۱ به خورشید چنین می‌شود: $\frac{L_{B۱}}{L_\odot} = ۱/۳ \times ۱۰^۷$

با توجه به صورت سؤال و ستون چهارم جدول مقادیر $\frac{M / L_B}{M_\odot / L_{B\odot}}$ را داریم؛ پس مثلاً برای کهکشان ۱ می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{M_i / L_{Bi}}{M_\odot / L_{B\odot}} = ۷/۲۳ \quad \text{و چون} \quad \frac{L_{B۱}}{L_\odot} = ۱/۳۶\times ۱۰^{۷} \quad \text{پس داریم:} \quad \frac{M_۱}{M_\odot} = ۹/۸۳\times ۱۰^{۷}$$

با تکرار همین روند برای سایر کهکشان‌ها داریم:

$$\frac{L_{B۲}}{L_\odot} = ۳/۵\times ۱۰^{۷} \;,\; \frac{L_{B۳}}{L_\odot} = ۶/۳\times ۱۰^{۸} \;,\; \frac{L_{B۴}}{L_\odot} = ۲/۳\times ۱۰^{۸} \;,\; \frac{L_{B۵}}{L_\odot} = ۴/۱\times ۱۰^{۱۰} \;,\; \frac{L_{B۶}}{L_\odot} = ۱/۵\times ۱۰^{۱۱}$$

$$\frac{L_{B۷}}{L_\odot} = ۷\times ۱۰^{۱۱} \;,\; \frac{L_{B۸}}{L_\odot} = ۸/۵\times ۱۰^{۹} \;,\; \frac{L_{B۹}}{L_\odot} = ۱/۵\times ۱۰^{۹} \;,\; \frac{L_{B۱۰}}{L_\odot} = ۱/۵\times ۱۰^{۱/}$$

پس داریم:

$$\frac{M_۲}{M_\odot} = ۹/۸۳\times ۱۰^{۸} \;,\; \frac{M_۳}{M_\odot} = ۴/۶\times ۱۰^{۹} \;,\; \frac{M_۴}{M_\odot} = ۱/۶۸\times ۱۰^{۹} \;,\; \frac{M_۵}{M_\odot} = ۱/۸\times ۱۰^{۱۱} \;,\; \frac{M_۶}{M_\odot} = ۷/۶\times ۱۰^{۱۱}$$

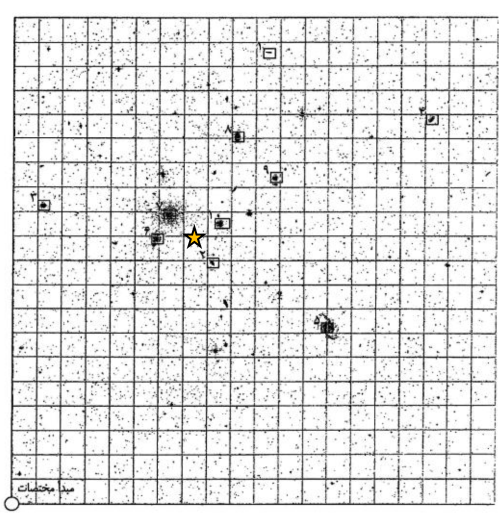
$$\frac{M_۷}{M_\odot} = ۶/۵\times ۱۰^{۱۲} \;,\; \frac{M_۸}{M_\odot} = ۸/۵\times ۱۰^{۱۰} \;,\; \frac{M_۹}{M_\odot} = ۵/۱\times ۱۰^{۹} \;,\; \frac{M_{۱۰}}{M_\odot} = ۸/۵\times ۱۰^{۱۰}$$

برای محاسبه‌ی مرکز جرم از رابطه‌ی $M_{total}R_i = \sum M_x R_{x\,i}$, $M_{total}R_j = \sum M_x R_{x\,j}$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{total}R_i = \sum M_x R_{x\,i} \Rightarrow R_i = \frac{\sum M_x R_{x\,i}}{M_{total}} = \sum \frac{M_x}{M_{total}} R_{x\,i}$$

و برای بدست آوردن جرم کل بر حسب جرم خورشید، جرم تمامی کهکشان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$M_{total} = M_۱ + M_۲ + \ldots + M_{۱۰} = ۱/۷\times ۱۰^{۱۲} M_\odot$$



پس:

$$R_i = \sum \frac{M_x R_{x\,i}}{۱/۷\times ۱۰^{۲۴} M_\odot} = \frac{۱/۲۶\times ۱۰^{۲۵} M_\odot}{۱/۷\times ۱۰^{۲۴} M_\odot} \simeq ۷/۴۵$$

$$R_j = \sum \frac{M_x R_{x\,j}}{۱/۷\times ۱۰^{۲۴} M_\odot} = \frac{۱/۸\times ۱۰^{۲۵} M_\odot}{۱/۷\times ۱۰^{۲۴} M_\odot} \simeq ۱۰/۸۱$$

لذا مختصات مرکز جرم از این قرار است: $(۷/۴۵ \,,\, ۱۰/۸۱)$

این نقطه را روی نمودار با علامت ستاره نشان داده‌ایم.

ب) مساحت این عکس برابر است با $۴۷' \times ۴۷'$ و هر دقیقه $۶۰''$ قوسی است؛ پس مساحت کل عکس برابر است با:

$۴۷' \times ۴۷' \times ۶۰ \times ۶۰ = ۷/۹ \times ۱۰^{۶}$ ثانیه‌ی قوسی مربع

اما طبق گفته‌ی سؤال، ۱۰ درصد درخشندگی کل خوشه برابر است با مجموع درخشندگی تک تک اعضای موجود در نمودار؛

پس داریم: $\frac{L_{total}}{L_{\odot}} = ۳ \times ۱۰^{۱۲}$. اما ما می‌خواهیم قدر $(۷/۹ \times ۱۰^{۶})/۱$ از کل خوشه را حساب کنیم؛ پس درخشندگی این مساحت برابر می‌شود با: $۳/۷ \times ۱۰^{۵} L_{\odot}$

از اینجا و با مقایسه با خورشید قدر مطلق کهکشان را حساب می‌کنیم: $M_{total} - M_{\odot} = -۲/۵ \log \frac{L_{total}}{L_{\odot}}$

پس $M_{total} - M_{\odot} = -۲/۵ \log(۳/۷ \times ۱۰^{۵})\ ,\ M_{\odot} = ۵/۴۷ \quad \Rightarrow \quad M_{total} = -۸$

حال باید قدر ظاهری این ناحیه را با استفاده از رابطه‌ی $m - M = ۵\log d - ۵$ حساب کنیم؛ که در آن d فاصله‌ی کهکشان بر حسب پارسک است؛ داریم:

$$d = ۶۲ \times ۱۰^{۶} ly = ۶۲ \times ۱۰^{۶} \times ۳ \times ۱۰^{۸} \times ۳۶۰۰ \times ۲۴ \times ۳۶۵ \div (۲۰۶۲۶۵ \times ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱}) = ۱/۸ \times ۱۰^{۷} pc$$

پس:

$$m = ۵\log(۱/۸ \times ۱۰^{۷}) - ۵ - ۸ \simeq ۲۲/۸$$

۷- الف) دبّ‌اصغر، دبّ‌اکبر، تنین، عوّا، اکلیل شمالی، جاثی، قیفاووس، ذات‌الکرسی، عقاب، فرس اعظم، مارافسای

ب) جبار، ثور، دوپیکر، سرطان، ارّابه‌ران

پ) ۲۱ مهر

ت) ۶۰ درجه

ث) سماک اعزل