جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
ششمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک سال ۱۳۸۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات تشریحی
۲۴۰	۶

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- تعداد سؤالات این آزمون **۶ سؤال** و وقت آن **۴ ساعت** است.
- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط آقای **کامبیز خالقی** تهیه شده است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^{۳} kg^{-۱} s^{-۲}$
c	سرعت نور	$۳\times ۱۰^{۸} ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶} m$
Au	واحد نجومی	$۱/۵۰\times ۱۰^{۱۱} m$
Ly	سال نوری	$۹/۴۶\times ۱۰^{۱۵} m$
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	$۶/۹۶\times ۱۰^{۸} m$
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	$۶/۳۸\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع ماه	$۱/۷۴\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع مداری ماه	$۳/۸۴\times ۱۰^{۸} m$
$M_{\oplus}$	جرم زمین	$۵/۹۷\times ۱۰^{۲۲} kg$
$T_{\odot}$	دمای خورشید	$۵۷۷۷ K$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$۳/۸۵\times ۱۰^{۲۶} W$
	ثابت خورشیدی	$۱/۳۷\times ۱۰^{۳} Wm^{-۲}$
$m_{\odot}$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶/۸$
H	ثابت هابل	$۷۰ km\, s^{-۱} Mpc^{-۱}$

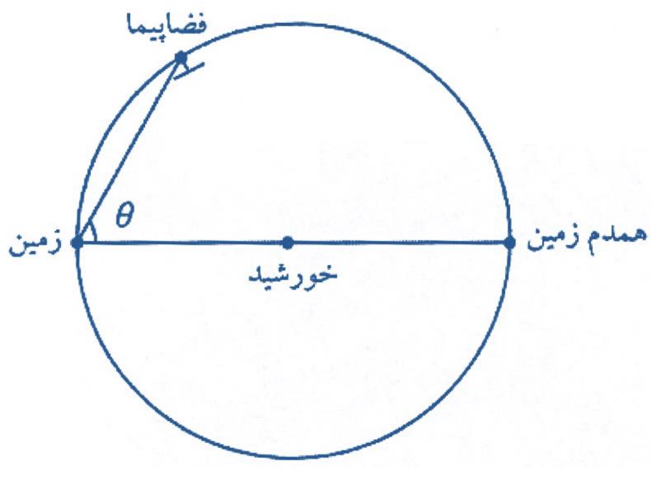
۱- یک ناظر در سطح زمین به طول جغرافیایی φ و عرض جغرافیایی λ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم زاویه‌ی مسیر مشاهده شده‌ی خورشید با سطح زمین هنگام غروب خورشید از دید این ناظر را حساب کنیم. این زاویه را با αنشان می‌دهیم. جهت خورشید هنگام غروب را با طول جغرافیایی β و عرض جغرافیایی γ نشان می‌دهیم. γ به روزی که در آن هستیم بستگی دارد. γ و λ، φ داده‌های مسئله‌اند. αزاویه‌ی بین دو صفحه است. یکی از این صفحه‌ها صفحه‌ای است که بردار عمود بر آن بردار واصل مرکز زمین به ناظر است. صفحه‌ی دوم صفحه‌ای است که شامل بردار واصل مرکز زمین به خورشید در لحظه‌ی غروب است، و بر یک مخروط مماس است. مخروطی که محور آن محور چرخش زمین، و نصف زاویهٔ رأس آن $\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$ است. این همان مخروطی است که مسیر خورشید در آن است.

الف) β را حساب کنید.

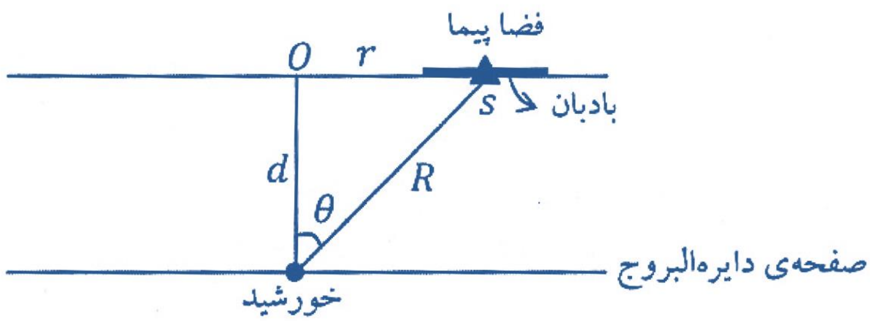
ب) جهت بردار یکه‌ی عمود بر صفحه‌ی دوم را با طول جغرافیایی χ و عرض جغرافیایی Ψنشان می‌دهیم. Ψو χرا بر حسب βو γ محاسبه کنید.

ج) $\cos\alpha$ را محاسبه کنید.

۲- در یکی از نظریات عجیب در مورد موجودات فرازمینی گفته می‌شود که احتمالاً موجودات فرازمینی روی سیاره‌ی همدم زمین زندگی می‌کنند. همدم زمین سیاره‌ای است کاملاً هم شکل زمین که روی مدار فعلی زمین به دور خورشید می‌چرخد، به‌طوری‌که در نقطه‌ی مقابل قطری زمین قرار دارد، بنابراین از نظر زمینی‌ها همواره پشت خورشید قرار می‌گیرد و هیچ گاه قابل رصد نیست. فرض کنید اخترشناسان برای اینکه به وجود چنین سیاره‌ای پی ببرند فضاپیمایی را به فضا فرستاده‌اند. فضاپیما طوری به فضا پرتاب می‌شود که روی مدار زمین و در جهت خلاف حرکت زمین به سمت همدم زمین حرکت کند، به این فضاپیما آینه‌ی بزرگی به سطح A متصل است. قرار است که این آینه نور همدم زمین را به سمت رصدگران زمینی منعکس کند. اگر آینه به اندازه‌ی کافی بزرگ ساخته شده باشد، به طوری که اندازه‌ی ظاهری آن به اندازه‌ی کافی از قطر ظاهری همدم زمین از نظر ناظران زمینی بزرگ‌تر باشد. قدر همدم زمین در آینه‌ی فضاپیما از نظر رصدگران بر حسب کشیدگی فضاپیما (θ) چه قدر است؟



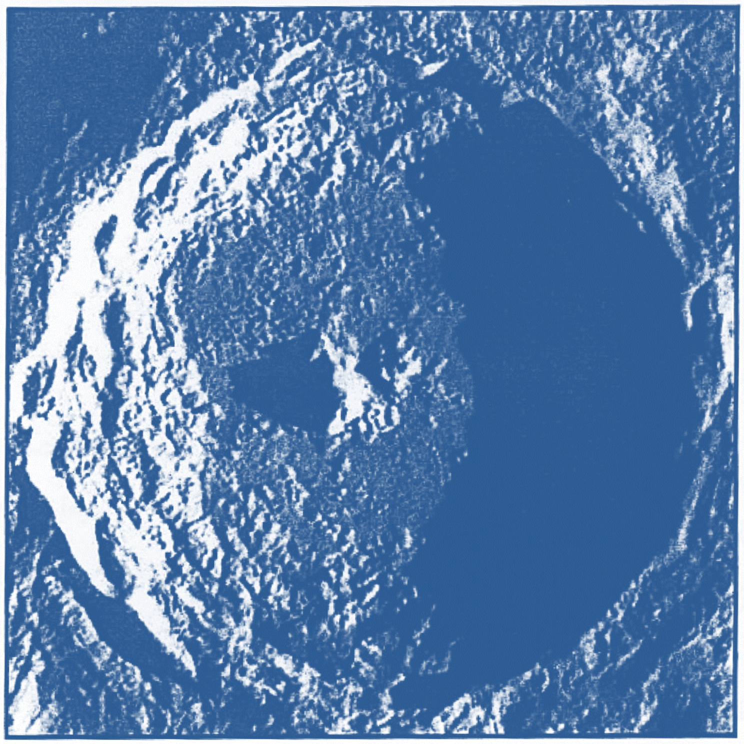
۳- بادبان خورشید از آینه‌ای بزرگ و مسطح ساخته شده، که تحت تأثیر فشار تابشی نور خورشید به جلو رانده می‌شود. در این مسئله می‌خواهیم به کمک بادبان خورشیدی فضاپیمایی را در مدار خارج از صفحه‌ی منظومه‌ی شمسی قرار دهیم. مطابق شکل فضاپیمای s به جرم m به دور مدار دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r می‌گردد. صفحه‌ی مداری فضاپیما موازی صفحه دایره‌البروج و در فاصله‌ی عمودی d از خورشید قرار دارد. فضاپیما برای حفظ تعادل خود از بادبان خورشیدی بهره می‌گیرد. مطابق شکل سطح بادبان منطبق بر صفحه‌ی مداری فضاپیما است. سطح بادبان را بر حسب پارامترهای داده شده در صورت مسئله و شکل و ثوابت فیزیکی بدست آورید.



۴- عرض جغرافیایی ناظر در چه بازه‌ای باشد تا دو ستاره که هم‌زمان طلوع می‌کنند، بتوانند هم سمت شوند؟

۵- می‌دانیم، دمای تابش زمینه‌ی کیهان (CMB) در راستایی که با مختصات کهکشانی $b = ۴۸^\circ$ و $\ell = ۲۶۴^\circ$ داده می‌شود، بیشینه‌ی مقدار را دارد که به اندازهٔ $\Delta T = ۳/۳۵\, mK$ بیشتر از متوسط است. سرعت کهکشان راه شیری نسبت به تابش زمینه چه قدر است؟ (سرعت و جهت حرکت خورشید نسبت به مرکز کهکشان $۲۲۰ km$ در جهت مختصات کهکشانی $b_\circ = ۰^\circ$ و $\ell_\circ = ۹۰^\circ$ است.)

۶- رصدگر علاقه‌مند به ماه تصمیم می‌گیرد با استفاده از تلسکوپ رصدخانه و ابزار تصویربرداری CCD، تصویر نمای بسته از دهانه "تیکو" بگیرد. دهانه تیکو دهانه‌ای است با قطر $۸۸km$ که مطابق شکل زیر در مرکز آن قله‌ای دیده می‌شود به ارتفاع $۲۴۰۰m$. طول و عرض جغرافیایی ماه مرکزی تیکو $۱۱/۲^\circ$ غربی و ۴۳° جنوبی است. اگر در تصویر بدست آمده قطر دهانه‌ی تیکو ۲۰۱۰ پیکسل و حداکثر طول سایه قله مرکزی ۲۷۲ پیکسل باشد، فاز ماه را در هنگام عکس برداری بر حسب درصد روشن قرص ماه حساب کنید.



طول و عرض جغرافیایی ماه مرکزی:

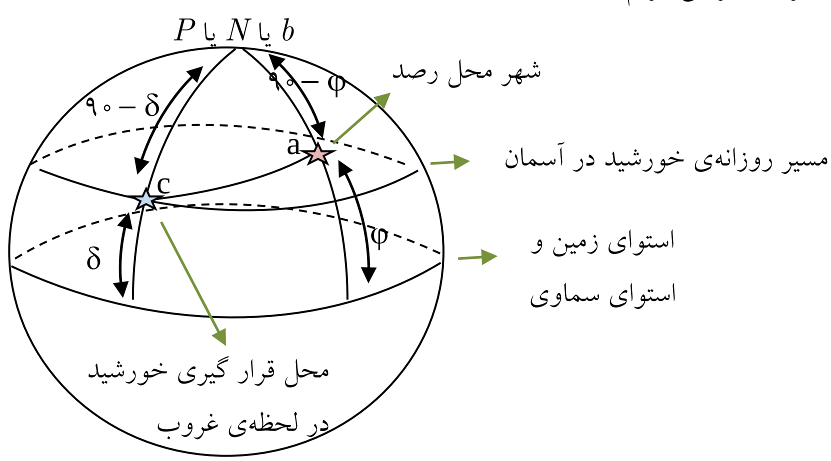
فرض می‌کنیم صفحه‌ی مداری ماه به دور زمین منطبق بر صفحه‌ی دایره‌البروج باشد در این صورت دایره‌ی استوای ماه عبارت است از فصل مشترک صفحه‌ی دایره‌البروج با سطح کره‌ی ماه. ناظر زمینی وقتی به قرص ماه نگاه می‌کند استوای ماه را به شکل قطری می‌بیند که از مرکز قرص می‌گذرد. عرض‌جغرافیایی همانند کره زمین به صورت زاویه‌ای که شعاع هر نقطه از کره‌ی ماه با صفحه‌ی استوای ماه (که همان صفحه‌ی دایره‌البروج است) می‌سازد، تعریف می‌شود. برای تعیین طول جغرافیایی به نصف‌النهار مبدأ نیاز داریم. نصف‌النهار مبدأ، نصف‌النهاری است که از مرکز قرص ماه از نظر ناظر زمینی می‌گذرد. به این ترتیب مرکز قرص ماه طول و عرض جغرافیایی صفر دارد. روی قرص ماه نقاطی با طول جغرافیایی صفر تا ۹۰ درجه غربی و صفر تا ۹۰ درجه شرقی دیده می‌شوند. نقاطی که طول جغرافیایی آن‌ها بیش از ۹۰درجه است در نیم کره پشتی ماه هستند و هرگز دیده نمی‌شوند.

۱- یکی از روش‌های نامتعارفی که در طراحی این سوال مورد توجه قرار گرفته، تعویض نمادگذاری‌هاست که در اینجا برای فرار از این ترکیب طرح سوال، ابتدا عناوین را با علامات قراردادی و متعارفمان جایگزین می‌کنیم و سپس در انتهای مسئله، آن‌ها را با آنچه مد نظر سوال بوده جایگزین می‌نماییم:

عبارت	نام قراردادی	نام به کار رفته در مسئله
طول جغرافیایی محل رصد	l	φ
عرض جغرافیایی محل رصد	φ	λ
	میل $= \delta$	عرض جغرافیایی $= \gamma$
$\alpha \pm x = \beta$	بُعد $= \alpha$	طول جغرافیایی $= \beta$

صفحه‌ی عمود بر بردار واصل مرکز زمین–ناظر، همان افق است (صفحه‌ی اول)

صفحه‌ی دوم هم، همان صفحه‌ی دایرهٔ عظیمه‌ای است که خورشید در طی ۲۴ ساعت بر روی آن حرکت می‌کند. برای ترسیم شکل، کره‌ی زمین و کره‌ی آسمان را هم‌اندازه و منطبق بر یکدیگر در نظر می‌گیریم.



از آنجا که فاصله‌ی سمت‌الرأسی خورشید در هنگام غروب ۹۰° است، فاصله‌ی شهر محل رصد تا محل قرارگیری خورشید هم، به صورت نظیر به نظیر همان مقدار ۹۰° را پیدا می‌کند.

حال اگر در مثلث abc قضیه‌ی کسینوس‌ها را بنویسیم؛ داریم:

$$\cos ac = \cos bc \cos aab + \sin bc \sin ab \cos abc$$

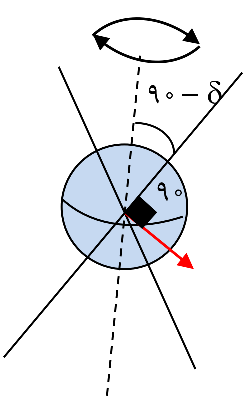
$$\Rightarrow \cos ۹۰ = \cos(۹۰ - \varphi)\cos(۹۰ - \delta) + \sin(۹۰ - \varphi)\sin(۹۰ - \delta)\cos(\alpha - l)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - l) = -\tan\delta\tan\varphi$$

با جایگذاری نمادهای به کار رفته در مسأله چنین خواهیم داشت:

$$\cos(\beta - \varphi) = -\tan\gamma\tan\lambda$$

که همان پاسخ قسمت الف مسأله است.



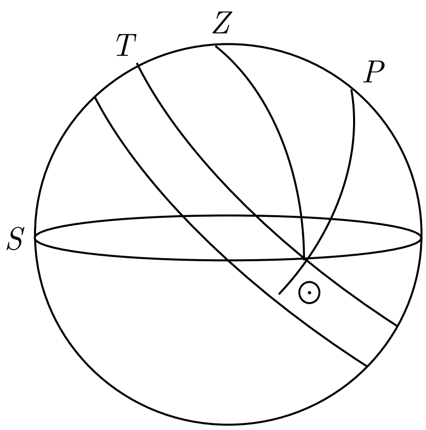
حال به سراغ قسمت ب می‌رویم. همان‌طور که در صورت سوال هم مطرح شده، زمین در حال گردش به دور محورش است که در شکل زیر با خطچین نشان داده شده. خورشید با این محور زاویه‌ی $۹۰ - \delta$ می‌سازد که با خط پر رنگ نمایش داده شده. این خطوط پررنگ همان یال‌های مخروط هستند پس جهت بردار عمود بر صفحه‌ی زمین–خورشید مطابق شکل با فلش قرمز نشان داده شده است.

بدیهیست که زاویه‌ی بردار و استوا با زاویه‌ی صفحه و استوا یکی است (یعنی هر دو، استوا را در یک نقطه قطع می‌کنند) پس طول جغرافیایی هر دو، برابر و برابر $\alpha - l$ خواهد بود.

و از طرف دیگر، به صورتی کاملاً شهودی می‌توان نتیجه گرفت که زاویه‌ی بردار با استوای سماوی $\delta - ۹۰$ درجه است. پس داریم:

$$\psi = ۹۰ - \gamma \quad , \quad \chi = \beta - \varphi$$

و در نهایت برای بدست آوردن زاویه‌ی دایره‌ی صغیره‌ی خورشید با افق چنین عمل می‌کنیم:



مطلوب است بدست آوردن زاویه‌ی $T \odot S$ ؛ می‌دانیم $Z \odot S$ برابر ۹۰ درجه است. پس به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که: $T \odot S = Z \odot P$. حال برای بدست آوردن $Z \odot P$ قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع $۹۰ - \varphi$ چنین می‌نویسیم:

$$\cos(۹۰ - \varphi) = \cos(۹۰ - \delta)\cos ۹۰ + \sin(۹۰ - \delta)\sin ۹۰ \cos Z \odot P$$

$$\Rightarrow \cos Z \odot P = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$$

با جایگزین کردن پارامترهای قرارداد شده در مسئله خواهیم داشت:

$$\cos \alpha = \sin \lambda \sec \gamma$$

۲- ماخ با توجه به آنکه در مثلث فضاپیما-زمین-همدم، ضلع زمین- همدم همان قطر دایره است؛ زاویه‌ی روبه‌رو به این ضلع برابر نصف کمان روبرویش می‌شود؛ یعنی می‌توانیم بنویسیم: زاویه‌ی زمین-فضاپیما-همدم همواره برابر ۹۰ درجه است. با توجه به این نکته طول ضلع همدم-فضاپیما برابر می‌شود با: $۲R\sin\theta$ که در آن R شعاع مداری زمین است. به طور مشابه داریم: ضلع زمین-فضاپیما برابر است با $۲R\cos\theta$. حال به سراغ حل مسئله می‌رویم. قدر همدم زمین به میزان نور رسیده به آینه و سهم بازتاب شده از آینه و در نهایت فاصله‌ی زمین تا آینه بستگی دارد؛ لذا ابتدا روشنایی همدم را در فاصله‌ی آینه تخمین می‌زنیم (از این پس همدم را با حرف اختصاری b نمایش می‌دهیم) از آنجا که سیاره مشابه زمین است، روشنایی رسیده از خورشید به سطح این سیاره نیز مشابه زمین بوده و برابر ۱۳۷۰ وات بر متر مربع است؛ حال برای محاسبه‌ی درخشندگی این سیاره باید سهم انرژی رسیده به کل سطح و رو به آینه را حساب کنیم.

درخشندگی بخشی از سیاره که نور دریافت می‌کند برابر می‌شود با: $L = \frac{۴\pi r_{\oplus}^{۲}}{۲} \times ۱۳۷۰$ اما تمام بخش روشن سیاره، رو به آینه نیست لذا باید این مقدار را ضربدر فاز سیاره از دید ناظر مستقر روی آینه کنیم؛ از طرف دیگر مطابق آنچه در ابتدا بدست آوردیم فاصله‌ی فضاپیما تا همدم برابر است با $۲R\sin\theta$. پس برای روشنایی همدم در فاصله‌ی فضاپیما داریم: $b_b = \frac{L \times \phi}{۴\pi d^{۲}}$ که در آن ϕ فاز سیاره است. برای محاسبه‌ی فاز هم مطابق رابطه داریم: $\phi = \frac{۱ - \cos x}{۲}$ که در اینجا $\phi = \frac{۱ - \cos(۹۰ - \theta)}{۲}$

پس از جایگذاری تمامی مقادیر، روشنایی سیاره از دید ناظر روی فضاپیما را چنین بدست خواهیم آورد:

$$b_b = \frac{\frac{۴\pi r_{\oplus}^{۲}}{۲} \times ۱۳۷۰ \times (\frac{۱-\cos(۹۰-\theta)}{۲})}{۴\pi(d)^{۲}} = \frac{\pi r_{\oplus}^{۲} \times ۱۳۷۰ \times (۱-\sin\theta)}{۴\pi(d)^{۲}}$$

حال از آنجا که آینه یک بازتاب کننده‌ی کامل و تقریباً ایده‌آل است، کل روشنایی رسیده را بازتاب می‌دهد؛ از آنجا که در حالت متعارف مساحت آینه در کسر بازتاب شده از نور رسیده تأثیرگذار است و طبق خواسته‌ی صورت سوال چنین اتفاقی نباید بیافتد، تنها پارامتر تأثیرگذار توسط آینه را افزایش فاصله در نظر می‌گیریم! حال فاصله‌ی همدم تا فضاپیما و تا ناظر برابر می‌شود با:

$$۲R\sin\theta + ۲R\cos\theta$$

که همان مقدار مناسب برای d است. با جایگذاری این مقدار در عبارت b_b خواهیم داشت:

$$b_b = \frac{\pi r_{\oplus}^{۲} \times ۱۳۷۰ \times (۱-\sin\theta)}{۱۶R^{۲}\pi(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}}$$

حال برای محاسبه‌ی قدر ظاهری کافیست این مقدار از روشنایی را در عبارت قدر- روشنایی جایگزین کنیم:

$$m_b - m_{\odot} = -۲/۵\log\frac{\frac{\pi r_{\oplus}^{۲} \times ۱۳۷۰ \times (۱-\sin\theta)}{۱۶R^{۲}\pi(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}}}{۱۳۷۰} = -۲/۵\log\frac{r_{\oplus}^{۲} \times (۱-\sin\theta)}{۱۶R^{۲}(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}}$$

و $m_{\odot} = -۲۷$ پس داریم:

$$m_b = -۲۷ - ۲/۵\log\frac{r_{\oplus}^{۲} \times (۱-\sin\theta)}{۱۶R^{۲}(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}}$$

۳- مؤلفهٔ شتاب در راستای عمود بر صفحه‌ی مداری صفر است، پس تنها کافیست مؤلفهٔ عمودی ناشی از فشار تابشی با مؤلفه عمودی ناشی از جاذبه‌ی گرانشی در تعادل قرار بگیرد: مؤلفهٔ عمودی جاذبه‌ی گرانشی برابر است با $f_G = \frac{GmM}{R^{۲}}\cos\theta$. حال نوبت به محاسبه‌ی فشار تابشی می‌رسد.

انرژی فوتون $E = P_{\circ}C \Rightarrow$ تکانه خطی $P_{\circ} = \frac{E}{C}$

انرژی = $\frac{\text{توان × مقطع سطح ×زمان}}{\text{واحد سطح}}$

$$E = bA\Delta t \Rightarrow P_{\circ} = \frac{bA\Delta t}{C}$$

اندازه حرکت فوتون پس از برخورد با جذب کننده $P = m\Delta V = m(V_{۲} - V_{\circ}) = -mV_{\circ} = -P_{\circ}$

سفینه $P = m\Delta V = \frac{bA\Delta t}{c} \Rightarrow m_{\circ}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{bA}{c} \Rightarrow ma = \frac{bA}{c} \Rightarrow f = \frac{bA}{c}$

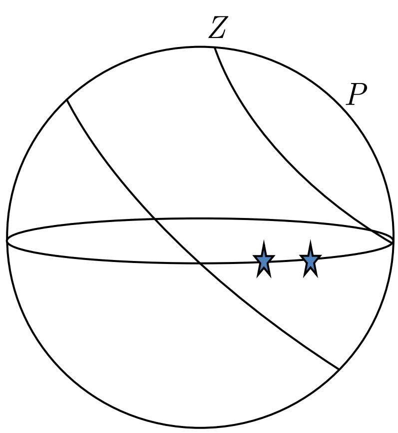
که مؤلفهٔ عمود بر مدار برابر می‌شود با $f' = \frac{bA}{c}\cos\theta$ از طرف دیگر، بادبان بر تابش‌های خورشیدی عمود نیست؛ لذا برای محاسبه‌ی تکانه‌ی موثر، کل این مقدار را در $\cos\theta$ و در متمم آلبدوی سفینه ضرب می‌کنیم تا F_{abs} را بدست آوریم. سپس این مقدار را با فشار تابشی فوتون‌ها که از فشار تابشی بردار پوئین‌تینگ ناشی می‌شود و برابر $F_{rad} = \frac{۲\langle S\rangle A}{c}\cos^۲\theta$ است، جمع می‌کنیم.

حال داریم: $f_{eff} = F_{rad} + F_{abs} = \frac{bA}{c}\left[۲\alpha + (۱-\alpha)\right]\cos^۲\theta$ پس:

$$f_G = f_{eff} \Rightarrow \frac{GmM}{R^۲}\cos\theta = \frac{bA}{c}(۱+\alpha)\cos^۲\theta \Rightarrow$$

$$A = \frac{GmMc}{b(۱+\alpha)\cos\theta\, R^۲}$$

۴- می‌دانیم دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از دو نقطه‌ای که در فاصله‌ی کمتر از ۱۸۰ درجه از هم قرار دارند، یکتا است. اگر در هنگام طلوع، هر دو ستاره روی دایره‌ی عظیمه‌ی افق قرار گرفته باشند و قرار باشد این دو ستاره هم ارتفاع شوند؛ این دایره‌ی عظیمه باید به واسطه‌ی دوران (به دور ستاره‌ی قطبی) در جایی از مسیر حرکتش بر افق عمود شود. در هنگامی که دایره‌ی عظیمه‌ی مورد نظر ما بر افق عمود می‌شود، از نقطه‌ی سومی هم می‌گذرد که همان سمت‌الرأس است. به عبارت دیگر در لحظه‌ی مطلوب ما هر سه نقطه‌ی ستاره‌ی اول، ستاره‌ی دوم و سمت‌الرأس بر یک دایره‌ی عظیمه قرار می‌گیرند. حال سوال را به این شکل ساده‌سازی می‌کنیم:



در کدام بازه از عرض‌های جغرافیایی ستاره‌ای که در سمت‌الرأس قرار دارد می‌تواند غروب کند؟

(یعنی مسیر حرکت ستاره‌ی واقع در سمت‌الرأس، افق را قطع کند)

دو مسأله نظیر به نظیر و یکسان‌اند.

این اتفاق در عرض‌های جغرافیایی ۴۵ درجه‌ی شمال و جنوبی تا استوا می‌افتد.

$$-۴۵ \le \varphi \le +۴۵$$

۵- سرعت خورشید v به دو مؤلفهٔ اصلی تفکیک می‌شود، یکی سرعت خورشید در کهکشان $v_\odot$ و دیگری سرعت خود کهکشان v_G؛ لذا داریم: $\vec{v} = \vec{v}_\odot + \vec{v}_G$

بردار سرعت را در دستگاه مختصاتی به مرکز مبدأ کهکشان باز می‌کنیم:

$$\vec{v} = v\cos b\cos l\,\vec{i} + v\cos b\sin l\,\vec{j} + v\sin b\,\vec{k}$$

با توجه به مقادیری که از راستای حرکت خورشید در صورت سوال آمده است، بردار سرعت خورشید هم برابر می‌شود با:

$$\vec{v}_\odot = v_\odot\vec{j}$$

پس برای بردار سرعت کهکشان می‌توانیم چنین بنویسیم: $\vec{v}_G = v\cos b\cos l\,\vec{i} + (v\cos b\sin l - v_{\odot})\,\vec{j} + v\sin b\,\vec{k}$

از آنجا که تمامی مقادیر معلوم‌اند تنها کافی است مقدار سرعت کل را حساب کنیم؛ با توجه به قانون وین داریم: $\lambda_{\max}T = ۰/۰۰۲۹$

پس: $\lambda = \frac{۰/۰۰۲۹}{T}$ و برای محاسبه‌ی تغییرات دوپلری باید میزان تغییرات طول‌موج را داشته باشیم: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} = \frac{\lambda}{\lambda_{\circ}} - ۱$

پس از جایگذاری وین داریم: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} = \frac{\frac{۰/۰۰۲۹}{T}}{\frac{۰/۰۰۲۹}{T_{\circ}}} - ۱ = \frac{T_{\circ}}{T} - ۱ = -\frac{\Delta T}{T}$ و دمای میانگین تابش پس زمینه‌ی کیهان ۲/۷۳ کلوین است؛

پس $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} = -\frac{\Delta T}{T} = ۱/۲\times۱۰^{-۳}$

با برابرنهیِ این مقدار با معادله‌ی سرعت دوپلر نسبیتی داریم:

$$۱/۲\times۱۰^{-۳} = \sqrt{\frac{۱+\frac{v}{c}}{۱-\frac{v}{c}}}$$

که از آنجا سرعت کل $۳۶۸\,km.s^{-۱}$ بدست می‌آید.

مقدار سرعت کهکشان از جمع جبری $\vec{v}_G = v\cos b\cos l\,\vec{i} + (v\cos b\sin l - v_{\odot})\,\vec{j} + v\sin b\,\vec{k}$ بدست می‌آید، لذا:

$$\vec{v}_G = \sqrt{v_{\odot}^{۲} + v^{۲} - ۲v_{\odot}v\cos b\sin l} = ۵۴۲\,km.s^{-۱}$$

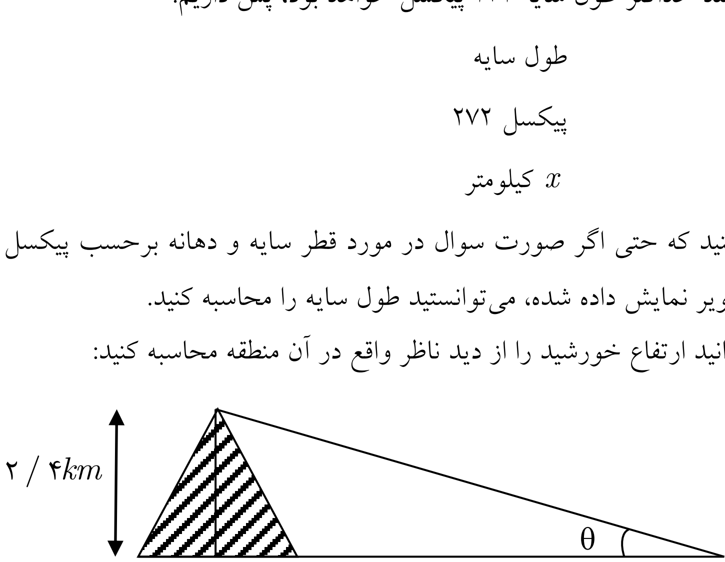
۶- برای حل این سوال در گام اول، طول سایه‌ی قله را برحسب کیلومتر و با استفاده از تناسب بدست می‌آوریم. همان‌طور که در متن سوال هم توضیح داده شده، اگر قطر دهانه ۲۰۱۰ پیکسل باشد حداکثر طول سایه ۲۷۲ پیکسل خواهد بود، پس داریم:

قطر دهانه	طول سایه
۲۰۱۰ پیکسل	۲۷۲ پیکسل
۸۸ کیلومتر	x کیلومتر

که از اینجا مقدار x برابر $۱۱/۹km$ بدست می‌آید. توجه کنید که حتی اگر صورت سوال در مورد قطر سایه و دهانه برحسب پیکسل چیزی نمی‌گفت، به سادگی و با استفاده از خط‌کش بر روی تصویر نمایش داده شده، می‌توانستید طول سایه را محاسبه کنید.

از آنجا که ارتفاع قله $۲۴۰۰m$ داده شده است، به سادگی می‌توانید ارتفاع خورشید را از دید ناظر واقع در آن منطقه محاسبه کنید:

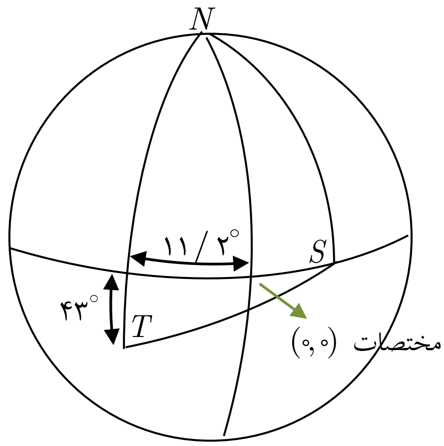
$$\tan\theta = \frac{۲/۴km}{۱۱/۹km} \Rightarrow \theta = ۱۱/۴^{\circ}$$



یعنی از دید ناظر واقع بر قله، ارتفاع خورشید ۱۱/٤ درجه و فاصله‌ی سمت الرأسی آن ۷۵/٦ درجه خواهد شد.

حال در ادامه‌ی کار از یک تناظر برای ساده شدن حل مسئله استفاده می‌کنیم:

از آنجا که طبق صورت سوال مدار گردش زمین و ماه، منطبق بر هم فرض شده‌اند، می‌توانیم نقاطی نظیر خورشید و زمین را بر سطح ماه، تصویر کنیم. حال به سراغ رسم شکل می‌رویم:



که در آن T محل قرارگیری گودال تیکو است.

از آنجا که با توجه به شکل، سایه در جهت شرق به غرب کشیده شده، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که محل خورشید در سمت شرق گودال قرار گرفته و از آنجا که خورشید روی استوای ماه حرکت می‌کند، شکل مطابق آنچه در مقابل می‌بینید ترسیم می‌شود.

حال در مثلث NST قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع TS چنین می‌نویسیم:

(کمان TS نظیر فاصله‌ی سمت الرأسی خورشید از گودال تیکو است)

$$\cos ST = \cos NS \cos NT + \sin NS \sin NT \cos SNT$$

$$\Rightarrow \cos ۷۸/۶ = \cos ۹۰ \cos ۱۳۳ + \sin ۹۰ \sin ۱۳۳ \cos SNT$$

$$\Rightarrow S\hat{N}T = ۷۴^\circ$$

بدیهی است که زاویه‌ی SNT برابر است با مجموع طول جغرافیایی شرقی خورشید به علاوهٔ طول جغرافیایی گودال تیکو (غربی) که نتیجه می‌دهد:

$$SNT = \lambda_S + \lambda_T \Rightarrow \lambda_S = ۷۴^\circ - ۱۱/۲^\circ = ۶۲/۸^\circ$$

از طرفی می‌دانیم که فاز ماه از دید ناظر زمینی، از رابطه‌ی $\phi = \frac{۱ + \cos\alpha}{۲} \times ۱۰۰$ بدست می‌آید. پس در مورد این حالت خاص داریم:

$$\phi = \frac{۱ + \cos ۶۲/۸}{۲} \times ۱۰۰ = ۷۲/۸\%$$

توجه داشته باشید که برخی در هنگام حل این مسئله حالت دومی را برای طول جغرافیایی غربی خورشید در نظر می‌گیرند. این حالت با توجه به تصویر داده شده در صورت سؤال، غیر قابل قبول است (یعنی خورشید لزوماً باید در سمت راست گودال باشد).