بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
سومین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک سال ۱۳۸۵

تعداد سوالات تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
۷	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- آزمون مرحله دوم این دوره از المپیاد نجوم در دو زیر رده‌ی سنی زیر ۱۵ سال و زیر ۱۷ سال برگزار شد که تعداد سؤالات این آزمون برای هر دو رده‌ی سنی **۷ سؤال** و وقت آن **۴ ساعت** بوده است که با توجه به مشترک بودن تعدادی از سوالات در دو آزمون، دفترچه‌ی پیش روی شما دارای ۹ سوال و کل سوالات مطرح شده در این دوره است؛ که برای شبیه‌سازی آزمون می‌توانید یکی از دو سوال مربوط به خود را انتخاب کنید.
- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط آقای **کامبیز خالقی** تهیه شده است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} m^۳ kg^{-۱} s^{-۲}$
c	سرعت نور	$۳ \times ۱۰^۸ ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶} m$
Au	واحد نجومی	$۱/۵۰ \times ۱۰^{۱۱} m$
Ly	سال نوری	$۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵} m$
$R_\odot$	شعاع خورشید	$۶/۹۶ \times ۱۰^۸ m$
$R_\oplus$	شعاع زمین	$۶/۳۸ \times ۱۰^۶ m$
	شعاع ماه	$۱/۷۴ \times ۱۰^۶ m$
	شعاع مداری ماه	$۳/۸۴ \times ۱۰^۸ m$
$M_\oplus$	جرم زمین	$۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۲} kg$
$T_\odot$	دمای خورشید	$۵۷۷۷ K$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	$۳/۸۵ \times ۱۰^{۲۶} W$
	ثابت خورشیدی	$۱/۳۷ \times ۱۰^۳ Wm^{-۲}$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶/۸$
H	ثابت هابل	$۷۰ km\, s^{-۱} Mpc^{-۱}$

۱- **گروه سنی زیر۱۷ سال** مشاهده‌ی مستقیم سیاره‌های فراخورشیدی در صورتی امکان‌پذیر است که تلسکوپ نه تنها قادر به تفکیک زاویه‌ای سیاره از ستاره‌اش باشد، بلکه نوری که از سیاره دریافت می‌شود در زمینه‌ی نور ستاره، قابل رؤیت باشد. نور هر ستاره بر آشکارساز تلسکوپ به صورت لکه‌ای ظاهر می‌شود که شدت آن از رابطه‌ی

$$I_s(\phi) = I_\circ e^{-D\phi/۴\lambda}$$

تبعیت می‌کند که در این رابطه D قطر دهانه‌ی تلسکوپ، λطول موج رصد شده توسط تلسکوپ و ϕ جدایی زاویه‌ای از ستاره‌ی مرکزی است و $e = ۲/۷۲$ عدد ثابت نپر است. فرض کنید شرط رؤیت سیاره‌ای که در جدایی زاویه‌ای ϕ از ستاره‌ی خود قرار دارد، در طول موج λ، $I_p \geq ۲I_s(\phi)$ باشد که در آن I_p شدت نور سیاره است.

از این ستاره هم‌زمان به کمک دو تلسکوپ با قطر دهانه‌های $D_۱$ و $D_۲$ عکس برداری شده است. در تلسکوپ اول در طول موج $\lambda_۱ = ۸۰۰nm$ نسبت شدت نور سیاره به $I_\circ$، $۱۰^{-۶}$ و در تلسکوپ دوم در طول موج $\lambda_۲ = ۵۰۰۰nm$ نسبت شدت نور ستاره به $I_\circ$، $۱۰^{-۴}$ بوده است. نسبت $D_۱$ به $D_۲$ چقدر باشد که در هر دو تلسکوپ سیاره در آستانه‌ی رؤیت باشد.

۱- **گروه سنی زیر ۱۵ سال** توسط تلسکـوپی با دهانه‌ی ۲۰ سانتی‌متر و فاصله‌ی کانونی ۱۵۰ سانتی‌متر، از ماه عکسی با زمان نوردهی ۰/۱۵ ثانیه گرفته‌ایم.

الف) زمان نوردهی لازم برای تلسکوپی با دهانه‌ی ۱۵ سانتی‌متر و فاصله کانونی ۲۰۰ سانتی‌متر، برای تهیه‌ی عکسی یکسان با عکس فوق چقدر است؟

ب) اندازه‌ی تصویر ماه در صفحه‌ی کانونی هر تلسکوپ چقدر است؟

ج) هر دو تلسکوپ، جهت مشاهده‌ی ماه، با عدسی چشمی به فاصله کانونی ۲۵ میلی‌متر به کار می‌روند. بزرگنمایی این تلسکوپ‌ها چقدر خواهد بود؟

۲- **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** یکی از ابـزارهایی که فضانـوردان آپـولـو۱۱ که به ماه سـفـر کردند روی سـطـح ایـن قمر کار گذاشتند، آینه‌ی مربع شکلی بود به ابعاد ۷۰ سانتی‌متر. این آینه از حدود ۱۰۰ تکه‌ی کوچک‌تر ساخته شده بود. هر کدام از این آینه‌ها به شکلی طراحی شده بودند که نور را در همان راستایی که به آن‌ها می‌تابند باز می‌تابانند. این آینه روی پایه‌ای نصب شده بود که به کمک آن فضانوردان آینه را به سمت زمین تنظیم کردند. به کمک این آینه‌ها اخترشناسان می‌توانند فاصله‌ی زمین تا ماه را با دقت سانتی‌متر اندازه‌گیری کنند. برای این کار از روی زمین با لیزر به سمت آینه‌ها نور می‌تابانند و زمان رفت و برگشت نور را اندازه‌گیری می‌کنند و از روی آن فاصله را به دست می‌آورند. به کمک اطلاعات بسیار دقیقی که از این طریق به دست می‌آید می‌توان آهنگ دور شدن ماه از زمین و بعضی از حرکات پوسته‌ی زمین را بررسی کرد.

رصدخانه‌ی مک دونالد در ایالت تگزاس آمریکا به طور مداوم به کمک این آینه‌ها فاصله‌ی ماه را اندازه‌گیری می‌کند. منجمان در رصدخانه‌ی مک دونالد برای اندازه‌گیری فاصله از یک لیزر قوی و یک تلسکوپ ۳۰ اینچی استفاده می‌کنند. هرچند که لیزر، نور متمرکز تولید می‌کند اما به خاطر پراش نور و اثرات جوی، قطر باریکه‌ی نور هنگامی که به سطح ماه می‌رسد در حدود۷ کیلومتر می‌شود. حساب کنید که توان لیزر (P)، چقدر باید باشد تا نور بازتابیده از آینه‌ها درون چشمی تلسکوپ با چشم قابل مشاهده باشد. از جذب نور در جو زمین صرف نظر کنید و آینه‌ها را بازتابنده کامل در نظر بگیرید.

۳- **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** دنباله‌داری در مداری بیضی شکل با نیم‌قطر بزرگ برابر با یک واحد نجومی و خروج از مرکز e، در صفحه‌ی دایره‌البروج به دور خورشید می‌گردد. نسبت زمانی که دنباله‌دار درون مدار زمین است به زمانی که خارج مدار زمین است را حساب کنید. مدار زمین را دایره فرض کنید.

۴- **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** ماهواره‌ای که همواره بر فراز استوای زمین در حال حرکت است، توسط ناظری در عرض جغرافیایی ۳۰ درجه جنوبی مشاهده می‌شود. اگر شعاع مدار این ماهواره ۳ برابر شعاع زمین باشد، حداکثر میل آن از دید ناظر چقدر است؟

۵- **گروه سنی زیر ۱۷ سال** یک شرکت بین‌المللی پستی می‌خواهد از نیروی گرانش برای انتقال بسته‌های پستی بین شهرهای مهم جهان استفاده کند. برای این کار این شرکت در نظر دارد در امتداد وتری که شهرهای بزرگ را به هم وصل می‌کند تونلی حفر کند و بسته‌های پستی را از درون این تونل‌ها به کمک نیروی گرانش ارسال کند. زمان لازم T برای انتقال یک بسته‌ی پستی بین دو شهر با طول و عرض جغرافیایی ϕ_1, λ_1 و ϕ_2, λ_2 چقدر می‌شود؟ از اصطکاک بسته‌ها با دیواره تونل صرف‌نظر کنید.

۵- **گروه سنی زیر ۱۵ سال** ناظری در نقطه‌ای با طول و عرض جغرافیایی $(0,0)$ ایستاده است و با دست به سوی نقطه‌ای روی زمین اشاره می‌کند، به طوری که سمت و ارتفاع امتداد دست وی به ترتیب A و a است $(a < 0)$. اگر بتوانیم در امتداد دست این فرد تونلی مستقیم حفر کنیم، دهانه‌ی دیگر تونل در چه طول و عرض جغرافیایی (به ترتیب l و ϕ) قرار می‌گیرد؟

۶- **گروه سنی زیر ۱۵و ۱۷ سال** تلسکوپ یک رصدخانه در عرض جغرافیایی ۳۴ درجه‌ی شمالی، ستاره‌ای را در میل ۳۶- درجه دنبال می‌کند. ابزارهای الکترونیکی رصدخانه، هم‌زمان محور اپتیکی تلسکوپ را بر روی ستاره و دهانه‌ی تلسکوپ را در مرکز شکاف گنبد تنظیم می‌کنند. به علت عوارض زمینی حداقل زاویه‌ای که بالاتر از افق دیده می‌شود ۱۰ درجه است. با فرض این که طلوع و غروب ستاره در یک شب رخ دهند، در طول مدتی که ستاره در تلسکوپ قابل رؤیت است، گنبد چه زاویه‌ای (θ) را طی می‌کند؟

۷- **گروه سنی زیر ۱۵و ۱۷ سال** فرض می‌کنیم سیاره‌ای روی دایره‌ای به شعاع a به دور خورشید می‌گردد. در یک لحظه جرم خورشید ناگهان دو برابر می‌شود. نیم‌محور بزرگ مدار جدید (a') و خروج از مرکز (e) را به دست آورید.

۱- **گروه سنی زیر۱۷ سال** جدایی زاویه‌ای سیاره و ستاره برای هر دو طول‌موج مقداری ثابت است؛ پس برای آن که سیاره در هر دو طول موج قابل رؤیت باشد، باید در هر دو طول‌موج داشته باشیم $I_p = ۲I_s(\phi)$ یا به عبارت دیگر:

$$I_p = ۲I_\circ e^{-D\phi/۴\lambda} \quad \Rightarrow \quad I_p(\lambda) = ۲I_\circ(\lambda)e^{-D\phi/۴\lambda}$$

حال دو مقدار متفاوت طول‌موج را در این معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\lambda_۱ = ۸۰۰nm \Rightarrow I_p(\lambda_۱) = ۲I_\circ(\lambda_۱)e^{-D\phi/۴\lambda_۱} \quad ; \quad \lambda_۲ = ۵۰۰۰nm \Rightarrow I_p(\lambda_۲) = ۲I_\circ(\lambda_۲)e^{-D\phi/۴\lambda_۲}$$

اما با توجه به داده‌های موجود در صورت مسأله داشتیم:

$$\frac{I_p(\lambda_۱)}{I_\circ(\lambda_۱)} = ۱۰^{-۶} \quad ; \quad \frac{I_p(\lambda_۲)}{I_\circ(\lambda_۲)} = ۱۰^{-۴}$$

با جایگذاری این نسبت‌ها در معادله‌های شدت بر حسب طول‌موج خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰^{-۶}}{۲} = e^{-D_۱\phi/۴\lambda_۱} \quad ; \quad \frac{۱۰^{-۴}}{۲} = e^{-D_۲\phi/۴\lambda_۲}$$

با $\ln$ گرفتن از معادله‌های بالا، توجه به این نکته که $\ln e^x = x$ و پس از حل جبری عبارت‌ها خواهیم داشت:

$$\ln(\frac{۱۰^{-۶}}{۲}) = \ln(e^{-D_۱\phi/۴\lambda_۱}) \Rightarrow \ln(\frac{۱۰^{-۶}}{۲}) = -D_۱\phi / ۴\lambda_۱$$

$$\ln(\frac{۱۰^{-۴}}{۲}) = \ln(e^{-D_۲\phi/۴\lambda_۲}) \Rightarrow \ln(\frac{۱۰^{-۴}}{۲}) = -D_۲\phi / ۴\lambda_۲$$

حال با تقسیم دو طرف این معادله‌ها داریم:

$$\frac{\frac{D_۱\phi}{۴\lambda_۱}}{\frac{D_۲\phi}{۴\lambda_۲}} = \frac{\ln(\frac{۱۰^{-۶}}{۲})}{\ln(\frac{۱۰^{-۴}}{۲})} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_۱}{D_۲} \times \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\ln(\frac{۱۰^{-۶}}{۲})}{\ln(\frac{۱۰^{-۴}}{۲})}$$

و $\lambda_۱ = ۵۰۰۰nm$ ، $\lambda_۱ = ۸۰۰nm$ پس:

$$\frac{D_۱}{D_۲} = \frac{\ln(\frac{۱۰^{-۶}}{۲})}{\ln(\frac{۱۰^{-۴}}{۲})} \times \frac{۸۰۰nm}{۵۰۰۰nm} = ۰/۲۳$$

۱- **گروه سنی زیر۱۵ سال** الف) میزان روشـنایی تصاویرِ عکاسی به شار انرژی رسیده به سنسورهـای سی.سی.دی یا فیلم‌های عکاسی بستگی دارد. تلسکوپ با افزایش سطح مقطع مؤثر، میزان کل انرژی رسیده در واحد زمان را افزایش می‌دهد. برای آن که دو تصویر کاملاً مشابه باشند، باید انرژی رسیده به کل سطح دو تلسکوپ، با هم برابر باشد لذا بـــرای $E_۱ = E_۲$ و $W = E / t$ که در آن t زمان مورد نیاز و W شار کل انرژی رسیده است؛ پس داریم: $W_۱t_۱ = W_۲t_۲$

از طرف دیگر $W = b.S$ که در آن b روشنایی جسم مورد مشاهده و S سطح مقطع جمع‌آوری نور است. اما از آنجا که هر دو تلسکوپ به یک منبع نوری واحد نگاه می‌کنند، میزان روشنایی رسیده به واحد سطح دو تلسکوپ یکسان است، پس داریم:

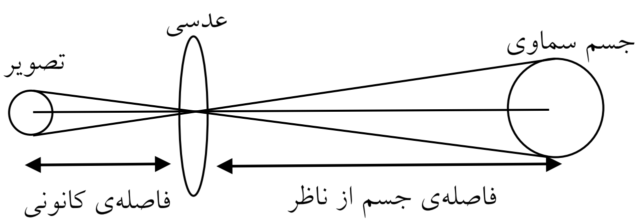
$$bS_۱t_۱ = bS_۲t_۲ \Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲} = \frac{S_۲}{S_۱}$$

و از آنجا که سطح مقطع گردآوری نور تلسکوپ دایره است داریم: $S = \pi r^۲$ و $r_۱ = ۲۰cm = ۰/۲m$ و $r_۲ = ۱۵cm = ۰/۱۵m$

در نتیجه:

$$\frac{t_۱}{t_۲} = (\frac{r_۲}{r_۱})^۲ \ , \ t_۱ = ۰/۱۵s \ \Rightarrow \ t_۲ = ۰/۱۵ \times (\frac{۰/۲}{۰/۱۵})^۲ = ۰/۲۶s$$

ب) در تلسکوپ‌ها برای ثبت تصاویر واضح از اجرام سماوی، باید سنسور حساس یا فیلم عکاسی را در فاصله‌ای برابر فاصله‌ی کانونی تلسکوپ از آینه یا عدسی شیئی قرار داد؛ در این صورت شکل شماتیک ایجاد تصویر چنین می‌شود؛



حال با توجه به برقراری تشابه در مثلث‌ها داریم:

$$\frac{\text{قطر جسم سماوی}}{\text{فاصله‌ی جسم از ناظر}} = \frac{\text{قطر تصویر}}{\text{فاصله‌ی کانونی}}$$

در نتیجه پس از عددگذاری به ازای هر دو مقدار فاصله‌ی کانونیِ تلسکوپ‌ها:

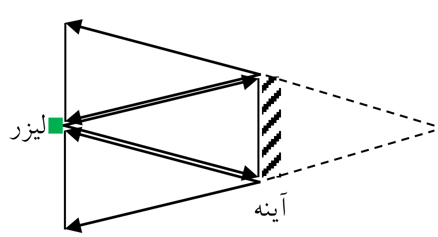
$$\frac{x_۱}{۱۵۰cm} = \frac{۲(۱/۷۴ \times ۱۰^۶)m}{۳/۸۴ \times ۱۰^۸ m} \Rightarrow x_۱ = ۱/۳۵cm$$

$$\frac{x_۲}{۲۰۰cm} = \frac{۲(۱/۷۴ \times ۱۰^۶)m}{۳/۸۴ \times ۱۰^۸ m} \Rightarrow x_۲ = ۱/۸۱cm$$

ج) بزرگنمایی تلسکوپ برابر نسبت فاصله‌ی کانونی عدسی شیئی به فاصله‌ی کانونی عدسی چشمی است؛ لذا:

$$m = \frac{F_o}{F_e} \ \Rightarrow \ m_۱ = \frac{۱۵۰cm}{۲/۵cm} = ۶۰ \ , \ m_۲ = \frac{۲۰۰cm}{۲/۵cm} = ۸۰$$

۲- **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** قطر باریکه‌ی لیزر به دلیل موازی نبودن پرتوهایش و اثر پراش، هنگامی که به سطح ماه رسیده است، برابر هفت کیلومتر شده است. پس در مسیر برگشت و پس از انعکاس نور از سطح آینه‌ها نیز مجدداً اثر پراش باعث پخش شدن باریکه‌ی نور می‌شود؛ مطابق شکل مقابل و با توجه به قوانین تشابه، قطر باریکه‌ی لیزر وقتی به سطح زمین بر می‌گردد، دو برابر می‌شود. یعنی تقریباً ۱٤ کیلومتر.



حال اگر لیزر با توان اولیه‌ی P تابیده باشد و نور لیزر در مساحتی دایروی به ابعاد $\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲$ روی سطح ماه پخش شده باشد، روشنایی رسیده به هر واحد سطح برای ناظری که روی سطح ماه ایستاده است، برابر می‌شود با:

$$b = \frac{P}{\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲}$$

اما توجه داشته باشید که کل نور رسیده به سطح ماه، بازتابیده نمی‌شوند. چرا که آینه‌های کار گذاشته شده روی سطح ماه مربع هستند نه دایره؛ پس برای محاسبه‌ی سهم بازتابیده شده، میزان روشنایی واحد سطح را در مساحت بازتابنده یعنی مساحت آینه، ضرب می‌کنیم:

$$L = \frac{P}{\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲}.S\ ,\ S = ۰/۷\times ۰/۷ m^۲ \Rightarrow L = \frac{۰/۴۹ P}{\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲}$$

درخشندگی آینه‌ها روی سطح ماه محاسبه شده‌اند، حال باید ببینیم روشنایی این آینه‌ها در فاصله‌ی زمین از آینه‌ها چقدر می‌شود. از آنجا که فاصله‌ی مؤثر ناظر از لیزر دو برابر فاصله‌ی زمین تا ماه است، سطح مقطع نور بازتابیده از سطح ماه، ٤ برابر می‌شود، لذا داریم:

$$b' = \frac{L}{۴(۰/۷\times ۰/۷ m^۲)} \Rightarrow b' = \frac{۰/۴۹ P}{\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲ \times ۴\times ۰/۴۹} = \frac{P}{۴\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲}$$

اما ناظر تنها به اندازه‌ی سهمی که به مساحت سطح گردآوری نور تلسکوپش می‌رسد، از این روشنایی بهره‌مند می‌شود؛ از آنجا که تلسکوپ رصدخانه ۳۰ اینچی است و هر اینچ ۲/٥٤ سانتی‌متر است، سطح مقطع مؤثر برابر می‌شود با:

$$S_t = \pi(\frac{D}{۲})^۲ = \pi(\frac{۳۰\times ۲/۵۴ cm}{۲})^۲ = ۴/۵\times ۱۰^۳ cm^۲ = ۰/۴۵ m^۲$$

پس روشنایی رسیده به کل سطح تلسکوپ برابر است با $b'S_t$ که برابر است با:

$$b' = \frac{۰/۴۵ P}{۴\pi(\frac{۷\times ۱۰^۳ m}{۲})^۲}$$

حال باید ببینیم اگر نور این لیزر در مرز دیده شدن و دیده نشدن (قدر ظاهری ۶+) قرار گرفته باشد، توان لیزر چقدر باید باشد؟ برای این کار از مقایسه‌ی روشنایی چنین ستاره‌ای با روشنایی خورشید استفاده می‌کنیم:

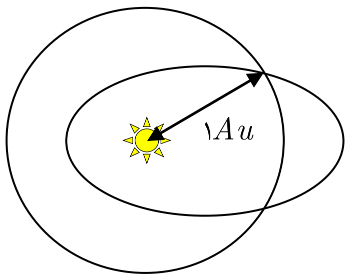
$$m_e - m_\odot = -۲/۵ \log\frac{b_e}{b_\odot}$$

که در آن $m_e = +۶\ ,\ m_\odot = -۲۶/۸\ ,\ b_\odot = ۱۳۷۰$ ؛ پس از جایگذاری این مقادیر در عبارت فوق خواهیم داشت، $b_e = ۱۰^{-۱۰} Wm^{-۲}$ که باید ببینیم از این مقدار چه سهمی وارد چشم ناظر می‌شود (b_{eff}). از آنجا که قطر مردمک چشم در

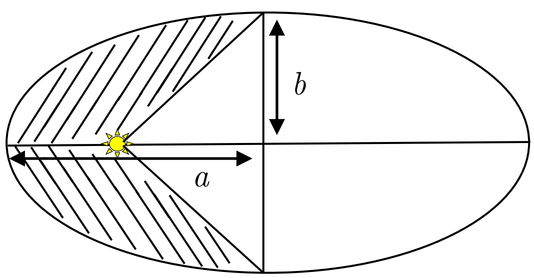
حالت ایده‌آل تقریباً به ۷ میلی‌متر می‌رسد، داریم: $b_{eff} = \pi(\frac{۷\times۱۰^{-۳}m}{۲})^۲ \times ۱۰^{-۱۰} = ۳/۸\times۱۰^{-۱۵}$ که باید با b' برابر شود، لذا داریم:

$$b_e = b' \Rightarrow ۳/۸\times۱۰^{-۱۵} = \frac{۰/۴۵P}{۴\pi(\frac{۷\times۱۰^{۳}}{۲})^۲} \Rightarrow P = ۱/۲۹\times۱۰^{-۶}W = ۱/۲۹\mu W$$

۳- **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** برای آنکه دنباله‌دار در چنین مداری حرکت کند، خورشید باید در یکی از کانون‌های بیضی قرار بگیرد. از طرف دیگر می‌دانیم که خورشید در مرکز مدار دایره‌وار زمین نیز قرار گرفته است و از آنجا که شعاع مداری زمین هم برابر $۱Au$ است؛ پس نقطه‌ای که روی مدار دنباله‌دار و مدار زمین قرار گرفته، در فاصله‌ی ۱ واحد نجومی از خورشید واقع است.



از طرف دیگر در تعریف بیضی داشتیم، مجموع فاصله‌ی تمام نقاط واقع بر روی محیط بیضی تا دو کانون آن برابر قطر اطول یا $۲a$ است که در مورد این دنباله‌دار خاص، مقدار آن برابر $۲Au$ می‌شود. پس به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که محل تقاطع دو مدار، روی قطر اصغر بیضی قرار گرفته است. حال کافیست مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده را نسبت به مساحت کل بیضی (πab) محاسبه کنیم، که برابر می‌شود با:

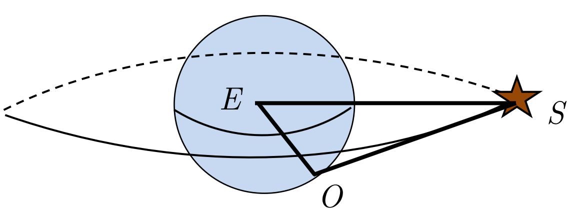


$$S_{\text{هاشور}} = \frac{S_{\text{بیضی}}}{۲} - S_{\text{مثلث}} \Rightarrow S_{\text{هاشور}} = \frac{\pi ab}{۲} - ab$$

و مقدار مطلوب برابر است با:

$$\frac{S_{\text{هاشور}}}{S_{\text{بیضی}}} = \frac{\frac{\pi ab}{۲} - ab}{\pi ab} = \frac{ab(\pi-۲)}{۲\pi ab} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\pi} \simeq ۰/۱۸$$

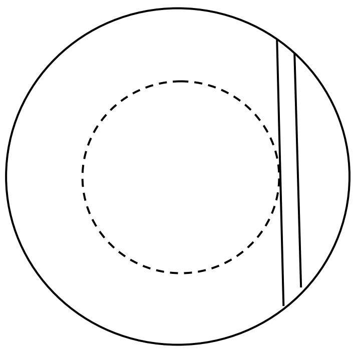
۴- **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** از آنجا که مدار ماهواره دایروی و منطبق بر استوای زمین است، بیشترین میل زمانی اتفاق می‌افتد که ماهواره بیشترین اختلاف منظر را نسبت به استوای سماوی داشته باشد؛ بیشترین اختلاف منظر هم، زمانی اتفاق می‌افتد که ماهواره در کمترین فاصله‌ی مستقیم از ناظر قرار داشته باشد؛ لذا مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی EOS، ابتدا فاصله‌ی خطی ناظر تا ماهواره و سپس زاویه‌ی اختلاف منظر را محاسبه می‌کنیم؛ در این مثلث زاویه‌ی بین دو ضلع ES و EO برابر عرض جغرافیایی محل رصد (در این مسأله برابر ۳۰ درجه است)، ES هم که برابر شعاع مدار ماهواره و EO برابر شعاع زمین است، لذا داریم:



$$OS^۲ = EO^۲ + ES^۲ - ۲EO\times ES\cos SEO \Rightarrow OS = \sqrt{(۳R)^۲ + (R)^۲ - (۳R)R\cos ۳۰} \simeq ۲/۱۹R$$

حال در همین مثلث از قضیه‌ی سینوس‌ها برای پیدا کردن زاویه‌ی اختلاف منظری یا ESO استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 30}{2/19R} = \frac{\sin x}{R} \Rightarrow x = 13/19^\circ$$



۵- ماخ **گروه سنی زیر ۱۷ سال** تونل بین دو شهر باید مطابق شکل مقابل باشد. با توجه به صورت سؤال، تنها عامل محرک، و نیروی مؤثر در جابجا کردن مرسوله‌ها، نیروی جاذبه‌ی بین دو جسم است. مقدار این نیرو از رابطه‌ی $F = \frac{GmM}{r^2}$ بدست می‌آید؛ که در آن m جرم مرسوله و r فاصله تا مرکز زمین است. M نیز جرم مؤثر بر جابه‌جایی وزنه است که طبیعتاً با توجه به فاصله‌ی مرسوله از مرکز زمین تغییر می‌کند. لذا رابطه‌ای برای محاسبه‌ی جرم M مؤثر برحسب فاصله‌ی مرسوله از مرکز بدست می‌آوریم.

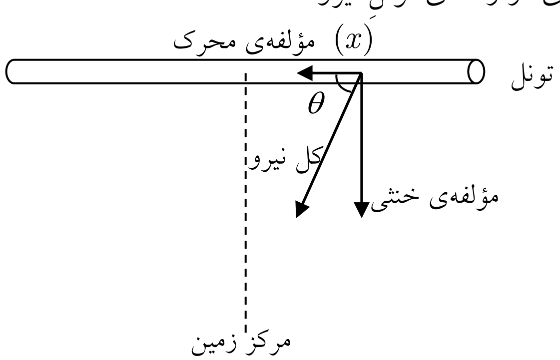
از آن‌جا که به طور تقریبی و با دقت خوبی چگالی زمین در همه‌جا یکسان است، می‌توانیم بنویسیم: $\rho_1 = \rho_2$ پس داریم:

$$\frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} \Rightarrow \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} \Rightarrow M_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 M_1$$

که در آن M_1 جرم زمین، r_1 شعاع زمین و r_2 فاصله‌ی مرسوله از مرکز زمین است؛ با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی نیرو داریم:

$$F = \frac{Gm}{r^2} \times M_\oplus \left(\frac{r}{r_\oplus}\right)^3 = \frac{GmM_\oplus}{r_\oplus^3} \times r$$

توجه داشته باشید که جهت این نیرو در راستای مرکز زمین است، پس می‌توان این نیرو را به دو مؤلفه‌ی در راستای تونل و عمود بر تونل تجزیه کرد. با توجه به صورت سؤال و با توجه به بی‌تأثیر بودن اصطکاک، مؤلفه‌ی عمود بر راستای تونل خنثی می‌شود. تنها عاملی که باعث به حرکت درآمدن مرسوله می‌شود، مؤلفه‌ی در راستای تونل نیرو است.



اگر θ را زاویه‌ی بین بردار مؤلفه‌ی در راستای مسیر حرکت و مرکز زمین بنامیم، نیروی مؤثرمان برابر خواهد شد با:

$$F_{\text{مؤثر}} = F_{\text{کل}} \times \cos\theta \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

در نتیجه:

$$F_{\text{کل}} = \frac{GmM_\oplus}{r_\oplus^3} \times r \times \frac{x}{r} = \frac{GmM_\oplus}{r_\oplus^3} \times x$$

که تشابه جالبی با معادله‌ی نیروی فنر دارد ($F = Kx$). از برقراری تناظر یک به یک بین این دو معادله خواهیم داشت:

$$K = \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^{۳}}$$

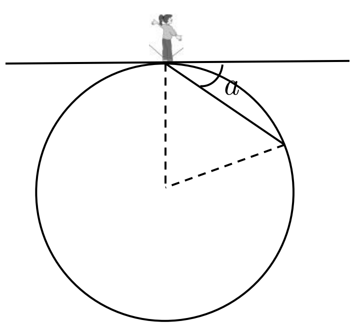
پس حرکت مرسوله‌ی مورد نظر به صورت فنری و رفت و برگشتی خواهد بود. در بخش مطالعه‌ی فنر آموخته بودیم که دوره تناوب نوسان فنر از رابطه‌ی $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$، بدست می‌آید که در آن m جرم وزنه و K درجه سختی فنر است که در این مورد خاص مقدارش را از قبل محاسبه کرده بودیم؛ در نتیجه:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^{۳}}}} = ۲\pi\sqrt{\frac{r_{\oplus}^{۳}}{GM_{\oplus}}}$$

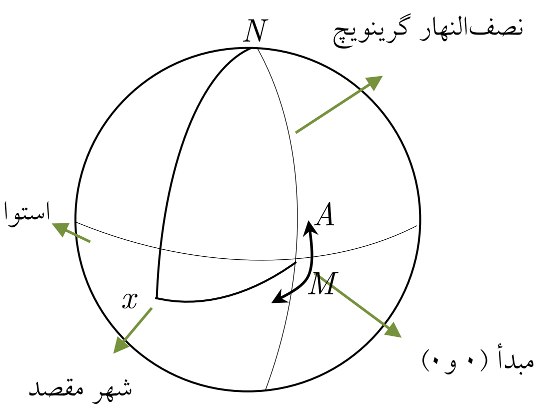
اما برای ارسال مرسوله به سوی دیگر تونل، تنها کافیست به اندازه‌ی نصف دوره تناوب نوسان صبر کنیم یعنی زمان t مطلوب برابر است با $\frac{T}{۲}$. پس از مقدار گذاری با توجه به جدول ثوابت، به مقدار ۴۲ دقیقه برای نیم دوره تناوب می‌رسیم.

همان‌طور که از معادله نیز مشخص است، مقدار عددی این انتقال، مستقل از طول تونل (یا مختصات شهر مبدأ و مقصد) و وزن مرسوله است.

۵- ماخ **گروه سنی زیر ۱۵ سال** می‌دانیم فرد در حال اشاره به نقطه‌ای از زمین است و تونل نیز از همان نقطه بیرون خواهد آمد. از طرفی می‌دانیم که از هر دو نقطه بر سطح کره، فقط و فقط یک دایره‌ی عظیمه عبور می‌کند، پس می‌توانیم به گونه‌ای به شکل نگاه کنیم که هر دو نقطه‌ی مبدأ و مقصد روی دیواره‌ی کره قرار بگیرند.



از مرکز زمین خطوط مستقیمی به این دو نقطه وصل می‌کنیم: از آنجا که یکی از تعریف‌های افق مماس بر سطح کره است و فرد در حال اشاره به نقطه‌ای با ارتفاع a است، زاویه‌ی بین خط مماس و تونل برابر a خواهد بود. حال طبق تعریف زاویه‌ی ظلّی فاصله‌ی دو نقطه‌ی مبدأ و مقصد برابر کمان $۲a$ خواهد شد.



در گام بعدی مختصات دو شهر را روی کره‌ی زمین معین می‌کنیم:

۱- می‌دانیم طول دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از دو شهر، یکتا و برابر $۲a$ است.

۲- سمت شهر مورد اشاره‌ی رصدگر را می‌دانیم و همچنین می‌دانیم که سمت از راستای شمال اندازه‌گیری می‌شود و آنرا با نماد A بر روی شکل نمایش می‌دهیم.

بسته به اینکه سمت در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار داشته باشد (A یا $۳۶۰-A$)، قضیه‌ی کسینوس‌ها را در مثلث MxN می‌نویسیم؛ چنین خواهیم داشت (برای رأس m):

ناحیه ۳ $\cos(۹۰+\varphi)=\cos ۹۰ \cos ۲a+\sin ۹۰ \sin ۲a \cos(۳۶۰-A)$

ناحیه ۲ $\cos\varphi=\cos ۹۰ \cos ۲a+\sin ۹۰ \sin ۲a \cos(۳۶۰-A)$

ناحیه ۱ $\cos\varphi=\cos ۹۰ \cos ۲a+\sin ۹۰ \sin ۲a \cos A$

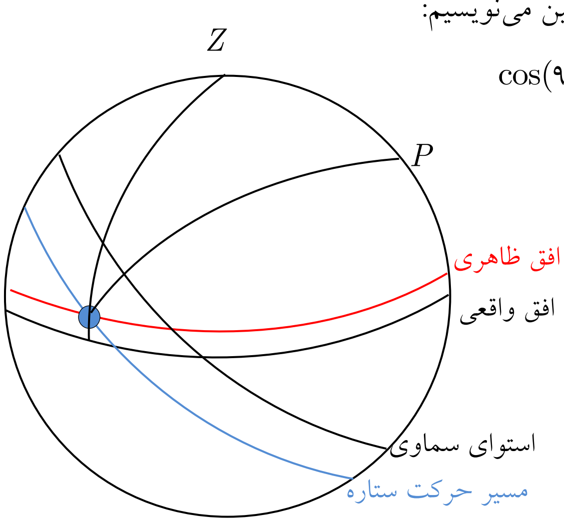
ناحیه ٤ $\cos(۹۰+\varphi)=\cos ۹۰ \cos ۲a+\sin ۹۰ \sin ۲a \cos A$

از این روابط عرض جغرافیایی شهر مقصد را بدست می‌آوریم.

برای استخراج طول جغرافیایی هم از قضیه‌ی سینوس‌ها در همان مثلث استفاده می‌کنیم، برای مثال مطابق شکل (در ناحیه‌ی ۳) داریم:

$$\frac{\sin(۳۶۰-A)}{\sin(۹۰+\varphi)}=\frac{\sin l}{\sin ۲a}$$ (طول جغرافیایی غربی است)

۶- ماخ **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** منظور سؤال از بیان این نکته که گنبد چند درجه جابجا می‌شود، بدست آوردن مقداری است که طی این مدت، سمت ستاره تغییر کرده است. برای محاسبه‌ی این مقدار، میزان سمت جنوبی ستاره را در هنگام طلوع بدست می‌آوریم. در مثلث PZS قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع PS چنین می‌نویسیم:



$$\cos(۹۰+\delta)=\cos(۹۰-\varphi)\cos(۹۰-a)+\sin(۹۰-\varphi)\sin(۹۰-a)\cos x$$

پس از جایگذاری مقادیر داریم:

$$\cos ۱۲۶=\cos ۸۰ \cos ۵۶+\sin ۸۰ \sin ۵۶ \cos A \Rightarrow A=۱۴۷^\circ$$

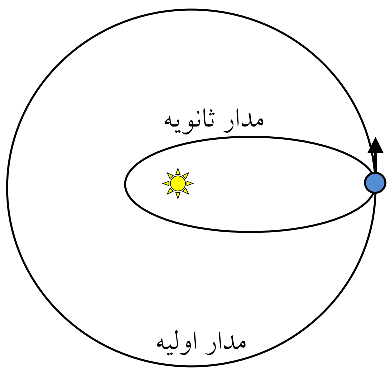
میزان سمت ستاره در هنگام غروب هم برابر می‌شود با $۳۶۰-A$ (به جهت تقارن کره) پس سمت غروب برابر است با: ۲۱۳ بنابراین از لحظه‌ی طلوع تا غروب، گنبد باید به اندازه‌ی $۲۱۳-۱۴۷=۶۶^\circ$ موازی افق بچرخد.

۷- ماخ **گروه سنی زیر ۱۵ و ۱۷ سال** با تغییر جرم جسم مرکزی، اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای تغییر نمی‌کند؛ اما از آنجا که میزان نیروی گرانش اعمال شده از سوی جسم مرکزی افزایش می‌یابد؛ جسم از حرکت روی مدار دایروی به حرکت روی مدار بیضوی تغییر موقعیت می‌دهد. پس می‌توانیم اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای برای جسمی که بر مدار دایروی حرکت می‌کند $(L=m\sqrt{GMa})$ و برای جسمی که بر مدار بیضوی حرکت می‌کند $(L'=m\sqrt{GM'a'(۱-e^۲)})$ را برابر قرار دهیم. آنگاه خواهیم داشت: $L=L' \Rightarrow m\sqrt{GMa}=m\sqrt{GM'a'(۱-e^۲)}$

اما جرم جسم مرکزی دو برابر شده است، پس داریم: $M' = ۲M$. بعد از جایگذاری و ساده‌سازی جبری خواهیم داشت:

$$a = ۲a'(۱ - e^۲) \qquad (*)$$

زمانی که افزایش جرم اتفاق می‌افتد، جسم ثانویه از حرکت روی مدار دایره‌ای به حرکت روی مدار بیضوی تغییر وضعیت می‌دهد پس در لحظه‌ی افزایش جرم، جسم ثانویه در اوج (بیشترین فاصله از جسم مرکزی) مدار ثانویه (مدار بیضوی) قرار می‌گرفته است (به شکل دقت کنید).



برای فاصله‌ی اوج در مدار بیضوی داریم که: $r = a'(۱ + e)$

اما این فاصله برابر شعاع مدار دایـــروی اولیه است؛ لذا داریم: $a = a'(۱ + e)$

از ترکیب این معادله، با معادله‌ی (*) داریم:

$$۲(۱ - e^۲) = (۱ + e) \Rightarrow ۲ - ۲e = ۱ \Rightarrow e = \frac{۱}{۲} \;,\; a' = \frac{۲}{۳}a$$