نوزدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه سؤالات آزمون مرحله 2 سال تحصیلی 1402-1401

نهایی

نکات بسیار مهم

لطفاً قبل از شروع پاسخگویی به سؤالات، این قسمت را به دقت بخوانید. برای خواندن این قسمت 5 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

1) این آزمون حاوی 10 سؤال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سؤالات بین 10 سؤال توزیع شده است. در سؤالاتی که بخش‌های الف و ب و ج و ... دارند، نمره هر بخش به تفکیک داده شده است.

2) سوالات اول و دوم و سوم سوالات کوتاه هستند. این سوالات به نسبت سوال های چهارم تا دهم زمان کمتری لازم دارند و نمره آنها نیز کمتر است.

3) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سؤالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سؤالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود، حتماً آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سؤال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد، نمره کامل خواهید گرفت.

4) در بعضی از سوالات در پایان سوال توضیحاتی داده شده که به شما در حل سوال کمک می کند و یا توجه به آنها لازم است. پس حتما قبل از شروع به حل سوال، متن سوال را به طور کامل بخوانید.

5) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت‌های نرم افزار Microsoft Word فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخنامه می‌توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار		کمیت	
6.67×10^{-11}	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	ثابت جهانی گرانش	G
3.00×10^{8}	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	سرعت نور	c
5.67×10^{-8}	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	ثابت استفان-بولتزمان	σ
1.38×10^{-23}	JK^{-1}	ثابت بولتزمان	k
6.02×10^{23}	mol^{-1}	عدد آووگادرو	
9.46×10^{15}	m	سال نوری	ly
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.50×10^{11}	m	واحد نجومی	AU
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	$M_{\odot}$
6.96×10^{8}	m	شعاع خورشید	$R_{\odot}$
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	$L_{\odot}$
$+4.74$		قدر مطلق خورشید	$M_{\odot}$
-26.8		قدر ظاهری خورشید	$m_{\odot}$
5780	K	دمای مؤثر سطح خورشید	$T_{\odot}$
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین	$M_{\oplus}$
6380	km	شعاع زمین	$R_{\oplus}$
-4.6		کمترین قدر ظاهری سیاره زهره	
23.5°		تمایل محور زمین	ϵ

قدر کم نورترین ستاره قابل مشاهده با چشم غیر مسلح = 6.0

قطر مردمک چشم انسان = 6 میلیمتر

سؤال اول: (35 نمره)

کوتوله سفیدی به جرم $m = 1M_\odot$ را در نظر بگیرید که از ستاره همدم خود با آهنگ $10^{-9}\ M_\odot\ yr^{-1}$ هیدروژن را می بلعد. این فرایند به مدت 10^5 سال ادامه پیدا می کند. سپس هیدروژن بلعیده شده به یکباره و در مدت 90 روز می سوزد و به هلیوم تبدیل می شود. درخشندگی تولید شده در این فرایند چند برابر درخشندگی خورشید است؟ (در مجموعه واکنش های هسته‌ای هیدروژن سوز 0.7 درصد ماده هیدروژنی به انرژی تبدیل می شود)

<u>پاسخ:</u>

$$\Delta m = \dot{m}\Delta t = 10^{-9}\dot{M_\odot} \times 10^5 = 10^{-4}M_\odot$$

$$E_{\text{تولیدی}} = \frac{0.7}{100}\Delta mc^2 = \frac{0.7}{100}10^{-4}(1.99 \times 10^{30}) \times (3 \times 10^8)^2 = 1.254 \times 10^{41}\ J$$

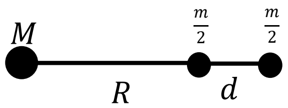
$$L_{\text{تولیدی}} = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1.254 \times 10^{41}}{90 \times 24 \times 3600} = 1.61 \times 10^{34} w \rightarrow \frac{L}{L_0} = 4.19 \times 10^7$$

سؤال دوم : (45 نمره)

فضانوردی را در نظر بگیرید که به درون یک سیاه‌چاله سقوط می‌کند. در اثر نزدیکی به سیاه‌چاله و به دلیل تغییرات شدید میدان گرانش، بدن فضانورد در راستای قد او کشیده می شود. حداکثر کشیدگی که فضانورد می‌تواند تحمل کند 1000 نیوتن است. اگر جرم این فضانورد را 100 کیلو گرم و قد او را 2 متر در نظر بگیریم، جرم سیاه چاله در چه شرایطی باید صدق کند تا فضا نورد بتواند به سلامت از افق حادثه سیاه چاله (شعاع شوارتزشیلد) عبور کند.

پاسخ:

سیستم را به صورت یک جرم مرکزی M (سیاهچاله) و دو جرم $\frac{m}{2}$ در فاصله R از سیاهچاله و d از یکدیگر درنظر می‌گیریم:



شرط مسئله به این صورت است ک اختلاف نیروی وارد شده به دو طرف فضانورد باید کمتر از $1000N$ باشد.

$$\Delta F = \left| -\frac{GM\,{}^{m}\!/_{2}}{R^2} + \frac{GM\,{}^{m}\!/_{2}}{(R+d)^2} \right| \leq 1000N\ , R = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\rightarrow \Delta F = \frac{GM\,{}^{m}\!/_{2}}{R^2}\left(-\frac{1}{\left(1+\frac{d}{R}\right)^2} + 1 \right) \approx \frac{GM\,{}^{m}\!/_{2}}{R^2} \times \frac{2d}{R} = \frac{GMmd}{R^3} = \frac{GMmd}{8G^3\,{}^{M^3}\!/_{c^6}} = \frac{c^6 md}{8G^2M^2} \leq 1000N$$

$$\rightarrow M \geq \sqrt{\frac{c^6 md}{8G^2 \times 1000N}} \rightarrow M \geq 32.0 \times 10^2 M_\odot$$

$$F = \frac{GMm}{R^2} \leq 1000N \rightarrow \frac{GMm}{\frac{4G^2M^2}{c^4}} \leq 1000N \rightarrow M \geq \frac{c^4 m}{4G \times 1000} = 1.52 \times 10^{12} M_\odot$$

سؤال سوم : (45 نمره)

تعداد ستاره هایی که با چشم غیر مسلح (حداکثر قدر ظاهری 6) در کل آسمان قابل مشاهده است حدوداً 6000 تاست. فرض کنید عالم کاملاً همگن و تمامی این ستاره ها خورشید گون هستند. در این صورت قدر ستاره ای که شار آن معادل کل شار دریافتی از این ستاره ها باشد چقدر است؟ قدر به دست آمده را با قدر سیاره زهره مقایسه کنید.

<u>پاسخ:</u>

چگالی همگن ← $n = cte$

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 8.87 \times 10^{-51}\, m^{-3} \quad , \qquad N = 6000$$

$$R: farthest\ visible\ star\ \rightarrow 6 - M_{\odot} = -2.5\log\left(\frac{(1_{AU})^2}{R^2}\right) \rightarrow R = 5.45 \times 10^{17}\, m$$

$$db = \frac{dL}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot} dN}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \times n4\pi r^2 dr = nL_{\odot} dr$$

$$b_{tot} = \int_0^{b_{tot}} db = \int_0^R nL_{\odot} dr = nL_{\odot}R = L_{\odot}\frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3}R = \frac{3L_{\odot}N}{4\pi R^2} = 1.86 \times 10^{-6}\, watt$$

$$m - M_{\odot} = -2.5\log\left(\frac{b_{tot}}{b_{\odot}}\right) \ , b_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1_{AU})^2} \rightarrow \frac{b_{tot}}{b_{\odot}} = \frac{3N(1_{AU})^2}{R^2} \Rightarrow m = -4.64$$

$$m_{Venus} = -4.6$$

تقریبا برابرند.

سوال چهارم: (70 نمره)

اخترشناسان از انتقال به سرخ z برای تعیین فاصله و یا به عنوان معیاری از زمان در کیهان شناسی استفاده می‌کنند. انتقال به سرخ نمایانگر زمانی است که اندازه عالم $\frac{1}{1+z}$ برابر اندازه کنونی بوده است. اخیرا تلسکوپ فضایی جیمز وب ستاره‌های دو کهکشان دور دست را طیف نگاری کرده است. این دو کهکشان به ترتیب در انتقال به سرخ های $z_{g1} = 11$ و $z_{g2} = 13$ قرار دارند. بر مبنای اطلاعات طیفی به نظر می رسد سن ستاره های این دو کهکشان به ترتیب $\tau_1 = 400\ Myr$ و $\tau_2 = 200\ Myr$ باشد. فرض کنید کمیت z_f انتقال به سرخ مرتبط با زمانی را نشان می دهد که ستاره های هر کدام از این دو کهکشان متولد شده اند.

الف) عبارتی کلی برای z_f بر حسب z_g و τ به دست آورید. (45 نمره)

ب) مقدار عددی z_f را برای دو کهکشان بالا حساب کنید. (25 نمره)

سن فعلی عالم را 13.8 میلیارد سال، عالم را ماده غالب و رابطه ضریب مقیاس با زمان را به شکل $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ در نظر بگیرید.

<u>پاسخ:</u>

$$\begin{cases} Z_{g1} = 11\ , Z_{g2} = 13 \\ \tau_1 = 400\ Myr\ , \tau_2 = 200\ Myr \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} t_0 = 13.8\ Myr \\ a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

الف)

$$\frac{a(z)}{a_0} = \frac{1}{1+z}\ , a_0 = 1\ \rightarrow a(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}\ \rightarrow a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t_f = t_g - \tau\ \rightarrow a(t_f) = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a(z_f)$$

$$\rightarrow (1+z_f)^{-1} = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}\ \Rightarrow z_f = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{-2}{3}} - 1$$

$$\frac{1}{1+z_g} = a(z_g) = a(t_g) = \left(\frac{t_g}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{t_g}{t_0} = (1+z_g)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{z_f = \left[(1+z_g)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\tau}{t_0}\right]^{-\frac{2}{3}} - 1}$$

ب)

$t_{g1} = 332\ Myr$

$t_{g2} = 263\ Myr$

$z_{f1} = 33.5\ Myr$

$z_{f2} = 35.2\ Myr$

سوال پنجم : (115 نمره)

رصدخانه ملی ایران (INO340) در قله گرگش واقع در 33 کیلومتری جنوب کاشان و در ارتفاع 3600 متری از سطح دریا قرار دارد. این رصد خانه مجهز به یک تلسکوپ از نوع ریچی کرتین و با میدان دید 20 دقیقه قوس است. قطر آینه اصلی آن 3.4 متر و نسبت کانونی تلسکوپ 11.24 است. این تلسکوپ در تاریخ پنجم مهرماه 1401 اولین نور خود را دریافت کرد که در طی آن از کهکشان $NGC23$ با توان تفکیک 0.65 ثانیه قوسی تصویر برداری کرد. پارامتر دید محل رصدخانه در شب های مختلف بین 0.55 تا 0.7 ثانیه قوس متغیر است.

الف) حد قدری نظری این تلسکوپ چقدر است؟ (20 نمره)

ب) قدرت تفکیک زاویه‌ای نظری این تلسکوپ در ناحیه مرئی $(\lambda = 500\ nm)$ چند ثانیه قوس است؟ (15 نمره)

ج) فاصله کانونی موثر تلسکوپ چند میلیمتر است؟ (10 نمره)

د) مقیاس صفحه این تلسکوپ چند ثانیه قوس بر میلیمتر است؟ (20 نمره)

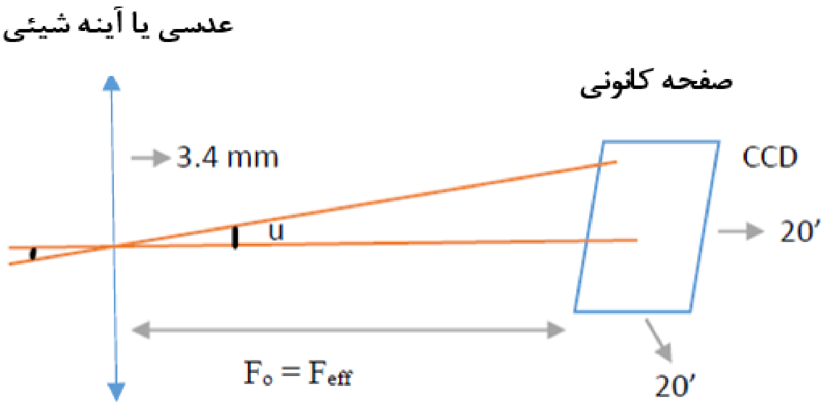
ه) ابعاد CCD مورد استفاده در $INO340$ چقدر باید باشد؟ (20 نمره)

و) اگر پیکسلهای CCD مربعی و به ابعاد 20 میکرومتر باشند، CCD آن باید حدوداً چند مگاپیکسل داشته باشد؟ (15 نمره)

ز) هر پیکسل تقریبا چند ثانیه قوس را پوشش خواهد داد؟ (15 نمره)

<u>پاسخ:</u>

(دو داده آخر مساله در حل استفاده ندارند)



الف) با استفاده از اعداد نوشته شده در جدول ابتدای سوالات برای چشم:

$$L_M = 5log\frac{D}{D_{eye}} + m_{eye} = 5log\frac{3.4 \times 10^3}{6} + 6 = 19.77$$

ب) اگر رابطه زاویه تفکیک را بر حسب ثانیه قوسی بنویسیم:

$$\theta'' = 2.5 \times 10^5 \frac{5 \times 10^{-7}}{3.4} = 0.03676''$$

ج) با توجه به رابطه تعریف نسبت کانونی:

$$F_{\#} = \frac{F_0}{D} = \frac{F_{eff}}{D}$$

$$F_{eff} = F_{\#} \times D = 11.24 \times 3.4 = 38.216\, m = 38216\, mm$$

د) می‌خواهیم زاویه مقابل به 1mm روی صفحه کانونی تلسکوپ را بیابیم:

$$tan\, u' = \frac{1\, mm}{F_{eff}} = \frac{1\, mm}{38216\, mm} \rightarrow u' = 0.0015 \frac{\text{درجه}}{mm} = 5.397 \frac{\text{ثانیه قوس}}{mm}$$

هـ) اگر از میدان دید که20دقیقه قوسی برای ابعاد آشکارساز CCD استفاده کنیم:

$$tan\, \frac{20'}{60'} = \frac{\text{ابعاد}\ CCD}{38.216\, m} \rightarrow \text{ابعاد}\ CCD = 38.216 \times tan\, \frac{1}{3} = 0.222\, m$$

بنابراین هر ضلع CCD حدود 22/2 سانتیمتر است.

و) از نسبت ابعاد CCD می‌توان یافت:

$$Pixel\ Size\ (a) = 20\, \mu m$$

$$\frac{CCD\text{ابعاد}}{\text{اندازه پیکسل}} = \frac{22.2 \times 10^{-2^2}}{2 \times 10^{-5}} = 123.21\, Mega\ Pixel$$

ز) مقداری که روی هر پیکسل ثبت خواهد شد:

$$u'' = \tan^{-1} \frac{\text{اندازه پیکسل}}{\text{فاصله کانونی}} = \tan^{-1} \frac{20 \times 10^{-6}}{38.216} = 3 \times 10^{-5}\ \text{درجه}$$

$$3 \times 10^{-5} \times 3600 = 0.108\ \ arc\ sec$$

سؤال ششم : (115 نمره)

از روی میانگین شهاب های مشاهده شده در روز تخمین زده می شود که روزانه حدود 44000 کیلوگرم شهاب سنگ وارد جو زمین شده، می‌سوزد و به صورت گرد و غبار روی سطح زمین می نشیند. شهاب سنگ ها ذرات سرگردانی هستند که زمین با عبور خود از میان آنها (ناشی از گردش به دور خورشید) آنها را جارو می کند. سرعت میانگین این ذرات در منظومه شمسی نسبت به سرعت زمین به دور خورشید ناچیز است.

الف) با فرض جسم سیاه بودن زمین، مقدار درخشندگی زمین ناشی از دریافت انرژی از خورشید را محاسبه کنید. (25 نمره)

ب) نسبت انرژی آزاد شده یک شهاب سنگ به جرم m ناشی از گرانش (انرژی گرانشی ناشی از افتادن ذره روی سطح زمین) به انرژی آزادشده ناشی از هم سرعت شدن شهابسنگ با زمین (در اثر برخورد و اصطکاک شهاب سنگ با جو) را به دست آورید. (35 نمره)

ج) اگر انرژی تمام شهابسنگها به صورت درخشندگی تابش شود، نسبت درخشندگی شهاب سنگ ها (L_{acc}) به درخشندگی زمین (قسمت الف) چقدر است؟ (35 نمره)

د) خاکستر شهاب سنگ ها به صورت گرد و غبار روی سطح زمین می نشینند. چند سال زمان لازم است تا یک سانتیمتر گرد و غبار ناشی از شهابسنگها روی زمین جمع شود؟ چگالی گرد و غبار حدوداً $3 \times 10^3\ kgm^3$ است. (20 نمره)

<u>پاسخ:</u>

الف)

$$L_{earth} = \frac{L_{sun}}{4\pi r^2}\pi R_{earth}^2 = \frac{3.85 \times 10^{26}}{4 \times (1.5 \times 10^{11})^2} \times (6380 \times 10^5)^2 = 1.74 \times 10^{17}\omega$$

ب)

$$\frac{E_G}{E_v} = \frac{\frac{GM_e m}{R}}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{2GM_{earth}}{\frac{GM_{sun}}{r}R} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^{11} \times 5.97 \times 10^{24}}{1.99 \times 10^{30} \times (6380 \times 10^3)^2} = \frac{6.247 \times 10^7 m}{4.427 \times 10^8 m} = 0.141$$

ج)

$$E_T = (E_G + E_v) \; --> \; L_{acc} = \frac{E_T}{1\ day} = \frac{(0.625 + 4.427) \times 44000 \times 10^8}{24 \times 3600} = 2.57 \times 10^8\omega$$

$$\frac{L_{acc}}{L_{earth}} = 1.48 \times 10^{-9}$$

د)

$$v_{dust} = A_{earth} \times 1cm = 4\pi R_{earth}^2 \times 1cm = 4\pi(6380 \times 10^3)^2 \times 10^{-2} = 5.11 \times 10^{12}\ m^3$$

$$M_{dust} = \rho v = 1.534 \times 10^{16} kg$$

$$\frac{M_{dust}}{M_{1\ day}} = \frac{1.534 \times 10^{16}}{44000} = 3.5 \times 10^{11}\ days = 9.56 \times 10^8\ years$$

سؤال هفتم : (125 نمره)

می خواهیم از رابطه جرم-درخشندگی ادینگتون، به رسم دقیقِ از رشته اصلیِ ستارگان بر روی نمودار هرتسپرونگ-راسل برسیم!
اگر رابطه ضابطه‌مند ادینگتون برای محدوده های جرمی مختلف ستارگانِ رشته اصلی بصورت زیر باشد

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & M \leq 0.6M_\odot \\ M^{4.5} & 0.6\,M_\odot < M \leq 4M_\odot \\ M^3 & 4M_\odot < M \end{cases}$$

و همچنین بدانیم رابطه دمای درونی (T_I) در این ستارگان با دمای سطحی (T_s) آنها، برحسب عمق اپتیکی (τ) بصورت

$$T_I = T_s(\tau + 1)^{\frac{1}{4}}$$

است.

الف) ابتدا دمای سطحی این ستارگان را به صورت تابعی از جرم و شعاعشان به دست آورید. (25 نمره)
ب) اگر بخواهیم برای ستارگان رشته اصلی رابطه‌ای توانی بین شعاع و جرمشان بیابیم، برای هر محدوده جرمی توان این رابطه را بدست آورید. (40 نمره)
ج) با استفاده از رابطه بدست آمده و علم به این مطلب که بر روی نمودار هرتسپرونگ-راسل می توان درخشندگی را برحسب دمای سطحی رسم کرد، در بازه های جرمی مختلف ابتدا رابطه میانِ این دو کمیت را برای ستارگان رشته اصلی بدست آورید و سپس بر روی نموداری که در پاسخ نامه‌ی این سوال به شما داده شده است، خطوط ضابطه مند مربوط به ستارگان رشته اصلی را ترسیم نمایید. (60 نمره)

توجه: مقدار عمق نوری در مرکز تمامی ستاره های رشته اصلی تقریباً یکسان و برابر 10^{12} است. روی سطح ستاره دمای گاز را تقریبا برابر دمای موثر در نظر بگیرید

__پاسخ:__

چون در انتها برای همه ستارگان عمق اپتیکی در مرکز را تقریبا یکسان و 10^{12} گرفته است.

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & M \leq 0.6M_\odot \\ M^{4.5} & 0.6\,M_\odot < M \leq 4M_\odot \\ M^3 & 4M_\odot < M \end{cases}$$ ضابطه های معادله ادینگتون

$$T_I = T_s(\tau + 1)^{\frac{1}{4}} \longrightarrow T_I \cong 10^3\,T_{eff}$$

زیرا در اولین بخش ما در تقریب خطی سازی دمای مرکز ستاره را باید جایگذازی نماییم، اما در نمودار HR دمای موثر داریم.

الف)

با استفاده از تعادل هیدرواستاتیک برای این ستارگان داریم: $\frac{dp}{dr} = \frac{-G\,M(r)\,\rho(r)}{r^2}$

خطی سازی : $\frac{P_c}{R} = \frac{M\frac{M}{R^3}}{R^2} \rightarrow P_c \propto \frac{M^2}{R^4}$

$$P = \frac{\rho k T}{\bar{m}} \rightarrow P_c \propto \frac{M}{R^3}.T_c \rightarrow T_c \propto \frac{M}{R} \rightarrow T_{eff} \propto \frac{M}{R}$$

ب) اگر از رابطه تابندگی استفاده کنیم:

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4 \rightarrow L \propto R^2 T^4 \equiv M^\alpha$$

$$R^2\left(\frac{M}{R}\right)^4 \propto M^{\alpha} \;\rightarrow\; \frac{M^4}{R^2} \propto M^{\alpha} \;\rightarrow\; M^{4-\alpha} \propto R^2 \;\rightarrow\; R \propto M^{\frac{4-\alpha}{2}}$$

$$R \propto \begin{cases} M^{0.75} & M \leq 0.6M_{\odot} \\ M^{-0.25} & 0.6\,M_{\odot} < M \leq 4M_{\odot} \\ M^{0.5} & 4M_{\odot} < M \end{cases}$$

ج) اگر توان‌های ضابطه‌ای بالا را β فرض کنیم:

$$L \propto R^2T^4 \;, R \propto M^{\beta} \;, T \;\propto \frac{M}{R}$$

$$T \;\propto \frac{R^{\frac{1}{\beta}}}{R} \;\propto\; R^{\frac{1}{\beta}-1} \;\propto\; R^{\frac{1-\beta}{\beta}} \longrightarrow \; R \propto T^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

$$L \propto R^2T^4 \;\propto\; T^{\frac{2\beta}{1-\beta}}.T^4 \;\propto\; T^{\frac{2\beta+4-4\beta}{1-\beta}} \longrightarrow \; L \propto T^{\frac{4-2\beta}{1-\beta}}$$

$$L \propto \begin{cases} M^{\frac{2.5}{0.25}} \equiv M^{10} & M \leq 0.6M_{\odot} \\ M^{\frac{4.5}{1.25}} \equiv M^{3.6} & 0.6\,M_{\odot} < M \leq 4M_{\odot} \\ M^{\frac{3}{0.5}} \equiv M^{6} & 4M_{\odot} < M \end{cases}$$

برای رسم یک نمودار تمام لگاریتمی توان بصورت شیب ظاهر می گردد:

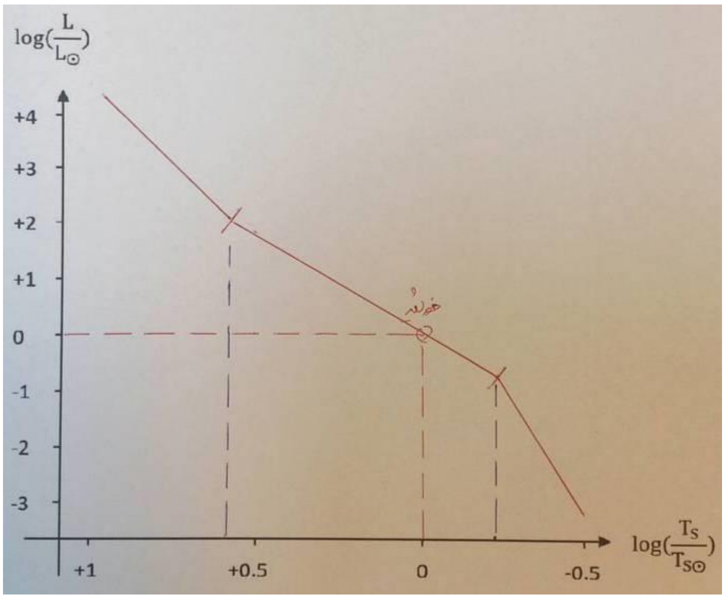
$$\text{شیب نمودار تمام لگاریتمی} = \frac{\dfrac{\Delta y(cm)}{\text{طول سیکل عمودی}\ (cm)}}{\dfrac{\Delta x(cm)}{\text{طول سیکل افقی}\ (cm)}}$$

اطول سیکل افقی 7.8 cm

طول سیکل عمودی $\quad 1.25\ cm \quad \equiv \frac{7.8}{1.25}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$

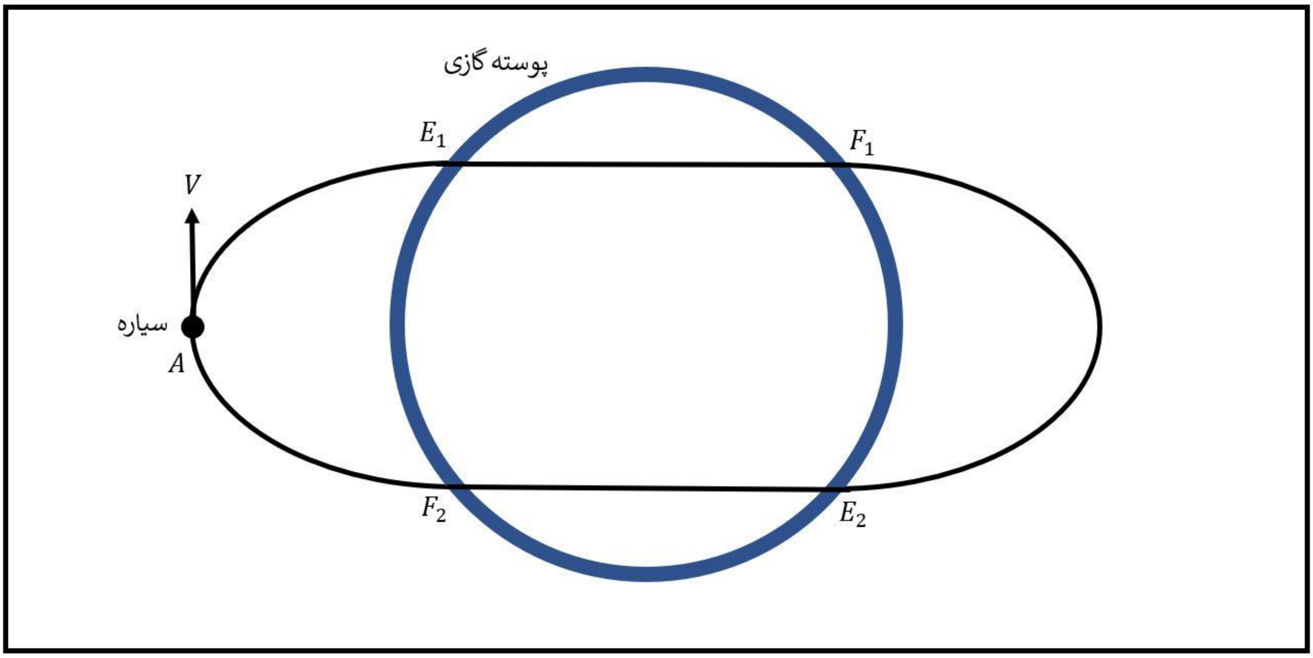
در نتیجه مقادیر شیب باید این‌گونه باشد

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \propto \begin{cases} 1.6 \equiv 58^{o} \\ 0.58 \equiv 30^{o} \\ 0.96 \equiv 43.9^{o} \end{cases}$$



سؤال هشتم : (140 نمره)

فرض کنید ستاره‌ای با ساختار غیرعادی داریم به صورتی که هسته ستاره منفجر شده و ذرات آن به بیرون پراکنده شده‌اند و این اتفاق باعث شده تا ستاره به پوسته‌ای گازی کروی شکل و رقیق که جرم آن به اندازه جرم ستاره و ضخامت آن در مقابل شعاع پوسته کوچک است تبدیل شود. سیاره‌ای به دور این ستاره در گردش است. مطابق شکل زیر سیاره در ابتدا در نقطه A قرار دارد جاییکه بردار سرعت آن V بر شعاع مداری سیاره عمود است. مدار سیاره به پوسته کروی نزدیک است به گونه‌ای که در نقطه E_1 سیاره وارد پوسته کروی می شود و مسیر نقطه E_1 تا F_1 را درون پوسته طی می کند و در نقطه F_1 از پوسته خارج می شود. در ادامه مسیر دوباره در نقطه E_2 وارد و در نقطه F_2 از پوسته خارج می شود و در نهایت به نقطه A می رسد و مدار کامل می شود.



اگر جرم پوسته $1.2\ M_{\odot}$ و شعاع آن $1.5\ R_{\odot}$ و فاصله اولیه سیاره تا مرکز ستاره $2.1\ R_{\odot}$ باشد آنگاه:

الف) سرعت اولیه (V) سیاره باید چقدر باشد تا این حرکت به این گونه انجام شود؟(50 نمره)

ب) مدت زمان یک دوره تناوب کامل سیاره چقدر است؟(45 نمره)

ج) آیا مقدار غیرصفر دیگری برای سرعت سیاره در آن نقطه وجود دارد که در نهایت به همان نقطه اول بازگردد؟ اگر این امکان وجود ندارد با استدلال توضیح دهید و اگر وجود دارد یک مثال بزنید.(45 نمره)

پاسخ:

الف) نقطه A اوج مدار

$$r_A = a(1+e) \longrightarrow 2.1R_{sun} = a(1+e)$$

مسیر E_1 تا F_1 مسیر مستقیم است و اگر دستگاهی را تعریف کنیم که مرکز آن مرکز ستاره است و راستای x آن در جهت A، در این دستگاه در نقطه E_1 سرعت راستای y صفر است.

در نقطه E_1:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = 1.5R_{sun}\ ,\ \ v_y = \frac{\mu}{h}(e+\cos\theta) = 0 \longrightarrow \cos\theta = -e$$

$$r = 1.5R_{sun} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = a \longrightarrow a = 1.5R_{sun}$$

$$e = \frac{2.1R_{sun}}{1.5k_{sun}} - 1 = 0.4 \longrightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} = 255.6\ km/s$$

ب)

$$T = 4t_{AE_1} + 2t_{E_1F_1}$$

$$t_{AE_1}: \ \cos\theta = -e \longrightarrow r = a, r = a(1 - e\cos E) \longrightarrow E_{E_1} = \frac{\pi}{2}, \ E_A = \pi$$

$$\omega t_{AE_1} = E_A - E_{E_1} - e(\sin E_A - \sin E_{E_1}) = \frac{\pi}{2} - 0.4(-1) = \frac{\pi}{2} + 0.4$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 3.72 \times 10^{-4}\, rad/s$$

$$\longrightarrow t_{AE_1} = 5300s$$

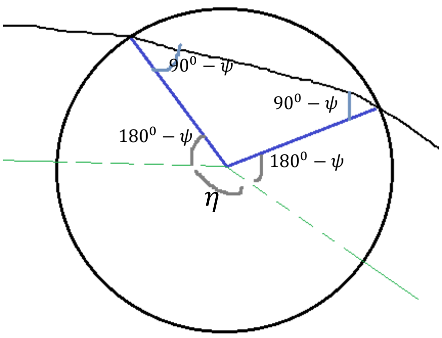
$$v_{E_1} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_{E_1}} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{1}{a}\right)} = 390.5\ km/s$$

$$t_{E_1F_1} = \frac{d_{E_1F_1}}{v_{E_1}} = \frac{2ae}{v_{E_1}} = 2151.3s$$

$$T = 25502\ s = 7^h5^m$$

ج)

در یک بار رخ دادن این اتفاق مدار به اندازه η درجه می‌چرخد. اگر θ آنومالی حقیقی و ψ زاویه پرواز باشد، آنگاه:



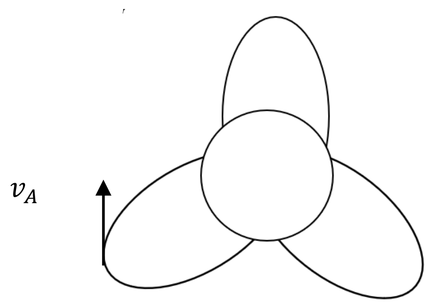
$$\eta = 360^0 - 2(180^0 - \theta) - (180^0 - 2(90^0 - \psi)) = 2\theta - 2\psi$$

حال اگر η ضریب $\frac{p}{q}$ ای از 2Π باشد بعد از q بار دور زدن جسم به جای اول باز می گردد پس شرط مساله:

$$2\theta - 2\psi = 2\Pi\ \frac{p}{q} \mid p, q \in N$$

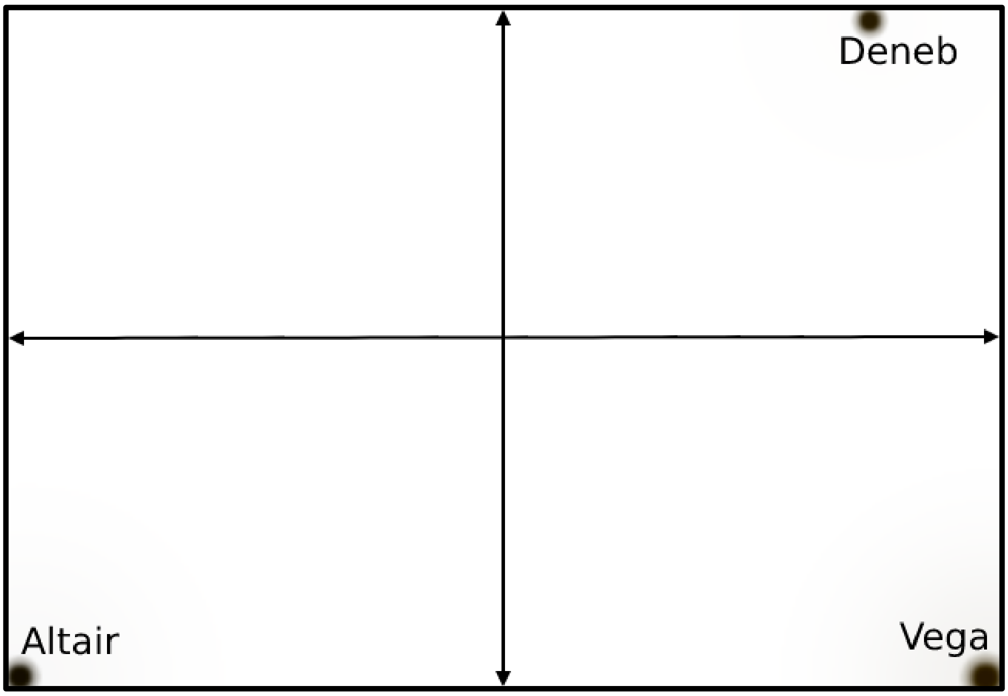
سپس بعد از یافتن θ، v_A را می‌یابیم.

مثال:



سؤال نهم : (170 نمره)

رصدگری در یک شب تابستانی در حال عکاسی از آسمان است و تصمیم می‌گیرد که از مثلث تابستانی عکس بگیرد. این رصدگر به دنبال آن است که عکسی از این مثلث بگیرد که کمترین مساحت از آسمان را اشغال کرده باشد. این رصدگر بعد از تلاش‌های بسیار توانسته‌است عکس زیر را بگیرد که با توجه به اینکه ستارگان وگا و الطیر در دو گوشه تصویر هستند و ستاره دنب نیز بر روی ضلع بالای آن است کمترین مساحت را از آسمان اشغال کرده است.



مختصات این سه ستاره به صورت زیر است:

Vega: $\alpha = 18^h\,37^m$ $\quad \delta = 38.8°$

Altair: $\alpha = 19^h\,51^m$ $\quad \delta = 8.9°$

Deneb: $\alpha = 20^h\,42^m$ $\quad \delta = 45.3°$

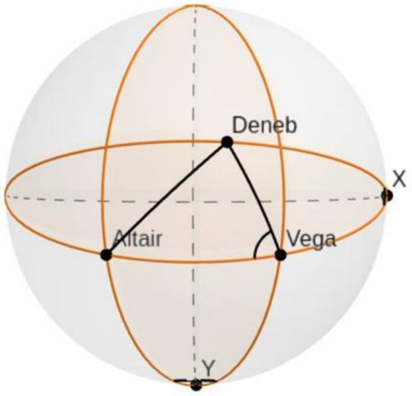
الف) با استفاده از مختصات این سه ستاره ابعاد عکس را بدست بیاورید. (ابعاد زاویه ای پیکان های روی عکس را به دست آورید، 110 نمره)

ب) مساحت این عکس چند استرادیان است؟ (60 نمره)

زاویه η داخل پاسخ ها همان زاویه Deneb-Vega-Altair هست

پاسخ:

الف) خطوط بالا پایین و چپ و راست تصویر دوایر عظیمه ای هستند که دو به دو اگر امتداد یابند به نقاط X, Y می رسند. زوایای راس X, Y را x, y می نامیم با توجه به این که فاصله این دو نقطه از مرکز تصویر 90o است، پس x, y همان عرض و طول تصویر اند.



$$\cos\theta_{pA} = \sin\delta_A \sin\delta_D + \cos\delta_A \cos\delta_D \cos(\alpha_A - \alpha_D)$$

$$\theta_{DA} = 38° \quad , \theta_{DV} = 23.8° \quad , \theta_{VA} = 34.3°$$

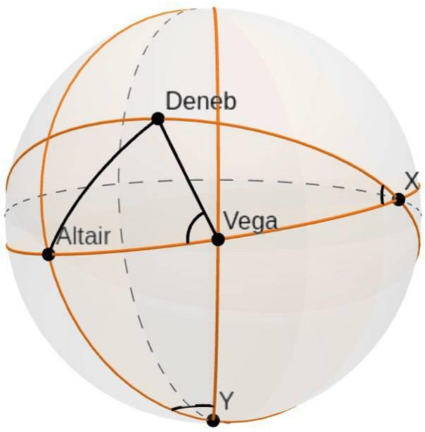
$$\cos\eta = \frac{\cos\theta_{DA} - \cos\theta_{DV}\cos\theta_{VA}}{\sin\theta_{PV}\sin\theta_{VA}} \quad \rightarrow \quad \eta = 81.8°$$

$$XV = 90° - \frac{\theta_{VA}}{2}$$

$$-\sin\frac{\theta_{VA}}{2}\cos\eta = \cos\frac{\theta_{VA}}{2}\cot\theta_{DV} - \sin\eta\cot x \rightarrow \quad x = 24.1°$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos 90 = \cos\frac{x}{2}\cot\frac{\theta_{VA}}{2} - \sin 90\cot\frac{y}{2} \rightarrow \tan\frac{y}{2} = \frac{\tan\frac{\theta_{VA}}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad y = 35°$$

ب)



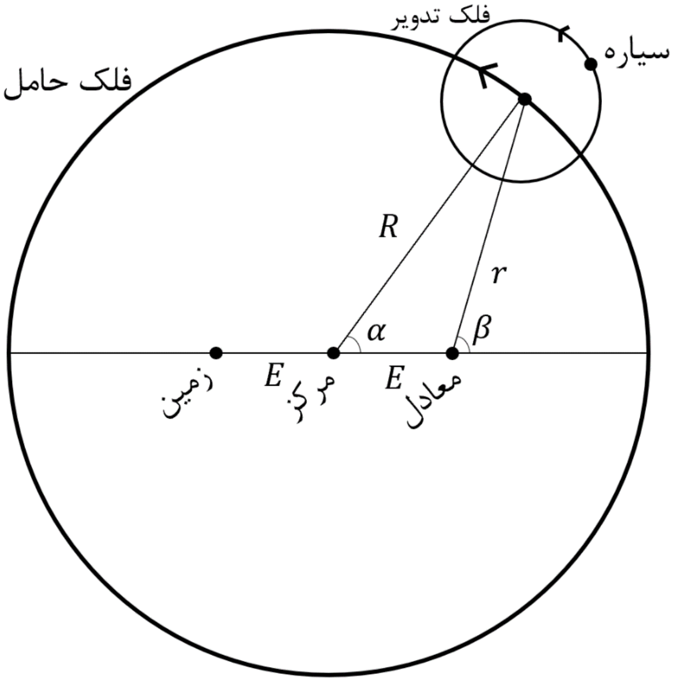
عکس5= $4\beta - 2\pi$

$$0 = \sin\frac{\theta_{VA}}{2}\tan\frac{x}{2} + \cos\beta \quad \rightarrow \quad \beta = 97.52°$$

عکس5=0.525 str

سؤال دهم : (140 نمره)

یکی از اولین مدل‌های پیشنهادشده در کتاب بطلمیوس برای توضیح حرکت سیارات در نظریۀ زمین‌مرکزی فلک تدویر است. در این مدل سیاره بر روی یک فلک تدویر حرکت می‌کند که مرکز این فلک مطابق شکل زیر روی محیط فلک حامل به مرکزیت زمین قرار دارد. این مدل تا مدت‌ها مورد استفاده قرار گرفت، اما در مواردی با شواهد رصدی متناقض بود و یا پیش‌بینی‌های آن برای پدیده‌های نجومی اشتباه بودند. در طی زمان اصلاحاتی در این مدل صورت گرفت. در اولین قدم مرکز دایره فلک حامل را نقطه‌ای غیر از زمین قرار دادند. این مدل نیز تا مدت‌ها مورد قبول بود تا آنکه با دقیق‌تر شدن مشاهدات، این مدل نیز در توضیح بعضی مسائل، مثل تغییر سرعت زاویه‌ای سیاره در فواصل مختلف از زمین، ناتوان ماند.



در مرحله بعدی از اصلاح، نقطۀ معادلی پیشنهاد شد که نسبت به مرکز دایره فلک حامل در نقطه مقابل زمین و در همان فاصله از مرکز قرار دارد (نقطه معادل در شکل). مرکز فلک تدویر نسبت به نقطه مرکز همواره فاصله ثابت (R) دارد، اما سرعت زاویه‌ای حرکت آن ($\Omega = \frac{d\beta}{dt}$) نسبت به نقطه معادل ثابت است.

الف) با نوشتن روابط هندسی بین پارامترهای شکل، روابط زیر را اثبات کنید. (35 نمره)

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \frac{E}{R}}$$

$$E\sin(\beta) = R\sin(\beta - \alpha)$$

ب) از آن‌جاییکه سرعت زاویه‌ای حول نقطه معادل ثابت است($\Omega =$ ثابت)، سرعت زاویه‌ای حول مرکز با زمان تغییر می‌کند و این تغییر سرعت زاویه‌ای مشاهده شده توسط ناظران زمینی را توجیه می‌کند. با مشتق‌گیری از روابط هندسی و نتایج قسمت الف رابطه زیر را اثبات کنید. (35 نمره)

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{r}}{E\sin(\beta)}$$

ج) بار دیگر از روابط هندسی قسمت الف استفاده کرده و رابطه‌ای برای $\dot{r}$ برحسب r، E، Ω و β به‌دست آورید. با جای‌گذاری این رابطه در رابطه قسمت ب و حذف $\dot{r}$، رابطه زیر را اثبات کنید. (45 نمره)

$$\omega(t) = \left[1 - \frac{\frac{E}{R}\cos(\Omega t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{R}\sin(\Omega t)\right)^2}}\right]\Omega$$

د) با داشتن $\frac{E}{R} = 0.2$ ، نسبت $\frac{\omega}{\Omega}$ را بر حسب Ωt رسم کنید (نمودار را برای پنج نقطه با فاصله یکسان در بازه صفر تا 2π رسم کنید. 25 نمره)

پاسخ:

الف)

$$R\sin\alpha = r\sin\beta\ (I)\ ,\ \ R\cos\alpha = r\cos\beta\ \ (II)\ \to \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \frac{E}{R}}$$

$$E = R\cos\alpha - r\cos\beta = R\cos\alpha - \frac{R\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta \to E\sin\beta = R[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\alpha]$$
$$= R\sin(\beta - \alpha)$$

ب)

$$\Omega = \frac{d\beta}{dt} = K\ \ ,\ \ \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$$

به ترتیب از روابط (I) و (II) مشتق می‌گیریم:

$$R\cos\alpha\,.\,\dot{\alpha} = \dot{r}\sin\beta + r\cos\beta\,.\,\dot{\beta}, -R\sin\alpha\,.\,\dot{\alpha} = \dot{r}\cos\beta + r\sin\beta\,.\,\dot{\beta}$$

$$\to \dot{\beta} = \frac{R\cos\alpha\,.\,\omega - \dot{r}\sin\beta}{r\cos\beta} = \frac{R\sin\alpha\,.\,\omega + \dot{r}\cos\beta}{r\sin\beta}$$

$$\to R\sin\beta\cos\alpha\,.\,\omega - \dot{r}\sin^2\beta = \dot{r}\cos^2\beta + R\omega\sin\alpha\ \cos\beta$$

$$\to \dot{r} = R\omega(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = E\sin\beta\,.\,\omega \to \boxed{\omega = \frac{\dot{r}}{E\sin\beta}}$$

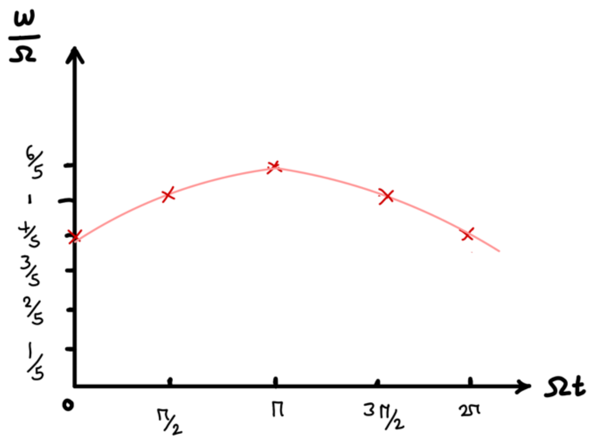
ج)

$$R\cos\alpha = r\cos\beta + E \to R^2\cos^2\alpha = r^2\cos^2\beta + E^2 + 2rE\cos\beta\ \ , R^2\sin^2\alpha = r^2\sin^2\beta$$

$$\to R^2 = r^2 + E^2 + 2rE\cos\beta\ \ (III)$$

از رابطه (III) مشتق می‌گیریم:

$$0 = 2r\dot{r} + 2E\dot{r}\cos\beta - 2Er\sin\beta\,.\,\Omega \to \dot{r} = \frac{rE\sin\beta\,.\,\Omega}{\mathrm{r} + \mathrm{E}\cos\beta}$$



$$\rightarrow \omega = \frac{rE\sin\beta\,.\Omega /_{\mathrm{r}+\mathrm{E}\cos\beta}}{\mathrm{E}\sin\beta} = \frac{r\Omega}{\mathrm{r}+\mathrm{E}\cos\beta} = \frac{-E\,cos\beta + \sqrt{R^2 - E^2\sin^2\beta}}{\sqrt{R^2 - E^2\sin^2\beta}}.\Omega$$

$$= \left[1 - \frac{\frac{E}{R}\cos\beta}{\sqrt{1-\left(\frac{E}{R}\sin\beta\right)^2\beta}}\right].\Omega$$

همچنین از رابطه (III) داریم:

$$r = -E\cos\beta + \sqrt{E^2\cos^2\beta - (E^2 - R^2)} = -E\cos\beta + \sqrt{R^2 - E^2\sin^2\beta}$$

د)

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 - \frac{0.2\cos(\Omega\mathrm{t})}{\sqrt{1-(0.2\cos(\Omega\mathrm{t}))^2}}$$

$$\begin{cases} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi & \frac{6}{5} \\ \frac{3\pi}{2} & 1 \\ 2\pi & 4/5 \end{cases}$$