



هجدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه پاسخنامه آزمون مرحله ۲ سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بعد از ظهر دوشنبه ۱۹ اردیبهشت ماه ۱۴۰۱ - ساعت ۱۴:۰۰ تا ۱۸:۰۰

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت	
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور	c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمان	σ
$1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	ثابت بولتزمان	k
$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	عدد آووگادرو	
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری	ly
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک	pc
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی	AU
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید	M_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
+4.74	قدر مطلق خورشید	M_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
5780 K	دمای مؤثر سطح خورشید	T_{\odot}
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین	M_{\oplus}
6380 km	شعاع زمین	R_{\oplus}
25772 yr	دوره تناوب حرکت تقدیمی زمین	
23.5°	تمایل محور زمین	ϵ

سؤال اول: (۱۳۰ نمره)

اختر شناسان با رصد دقیق، یک منظومه فراخورشیدی یافته اند که در آن سیاره‌ای به جرم m به دور ستاره‌ای به جرم M می‌گردد، بردارهای مکان و سرعت سیاره در یک لحظه از زمان به صورت زیر اندازه‌گیری شده است:

$$\vec{r} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k})$$
$$\vec{v} = \sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}$$

این دو بردار در دستگاه مختصاتی کارتزینی نوشته شده اند که مبدا آن روی مرکز ستاره و محورهای x و y در صفحه مداری سیاره و محور z عمود بر صفحه مداری در جهت راستگرد قرار دارد. \hat{i} و \hat{j} و \hat{k} بردارهای یکه در دستگاه مختصات کارتزین هستند.

الف) تعیین کنید شکل مدار کدامیک از مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، سهمی و یا هذلولی) است؟ (۳۰ نمره)

ب) مختصات کارتزین (x, y, z) نقطه حضیض مدار را تعیین کنید (۱۰۰ نمره)

توجه: فرض کنید جرم ستاره مرکزی به گونه ایست که $GM = 1$ باشد. از جرم سیاره در مقابل ستاره صرف نظر کنید. در این مسئله باید مشروح محاسبات داده شود. صرفاً نام بردن از یک مقطع مخروطی کافی نیست و در صورت درست بودن جواب، فقط نمره جواب نهایی را خواهد گرفت.

پاسخ سوال اول:

الف) یک راه ساده برای تعیین شکل مدار این است که انرژی مدار را حساب کنیم مقدار انرژی کل مدار همواره ثابت است و بر مبنای آن می توان شکل مدار را تعیین کرد

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

از داده های مسئله واضح است که

$$r^2 = \frac{1}{\lambda}(1 + 1) = \frac{1}{\xi} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$v^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow v = 2$$

با جایگذاری در معادله انرژی و در نظر گرفتن اینکه $GM = 1$ به دست می آوریم

$$E = 2m - 2m = 0$$

کل انرژی مدار همواره صفر است پس مدار سهمی خواهد بود

ب) برای تعیین نقطه حضیض ابتدا باید بردار لنز را مشخص کنیم. این بردار در راستای حضیض است برای این کار ابتدا باید بردار اندازه حرکت زاویه ای ویژه (برواحد جرم) را حساب کنیم

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) \times (\sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{3}\hat{i} - \hat{j} + \sqrt{3}\hat{k})$$

بردار لنز بنا به تعریف برابر است با

$$\vec{A} = -(\vec{L} \times \vec{v}) - \frac{G(M+m)}{r}\vec{r} = G(M+m)\vec{e}$$

جاییکه بردار \vec{e} برداری است در جهت نقطه حضیض با اندازه خروج از مرکز مدار با توجه به فرضیات این مسئله داریم

$$-(\vec{L} \times \vec{v}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 3\hat{k}) - \frac{2}{2\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}) = \vec{e}$$

واضح است که طول بردار \vec{e} برابر واحد است که سهمی بودن مدار را دوباره تایید می کند. با این حساب بردار \vec{e} برداری یکه است در جهت حضیض. برای پیدا کردن مختصات کارتزین حضیض کافی است این بردار را در فاصله حضیض ضرب کنیم تا مختصات حضیض به دست آید. در مدار سهمی شکل می دانیم که فاصله حضیض برابر است با

$$r_p = \frac{L^2}{\gamma G(M+m)} = \frac{L^2}{\gamma} = \frac{\gamma}{16}$$

در نهایت داریم

$$\vec{r}_p = \frac{\gamma}{32\sqrt{2}} (2\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + \hat{k})$$

مولفه های این بردار مختصات حضیض را نشان می دهد.

توجه: در این مسئله به اشتباه گفته شده که صفحه xy چارجوب کارتزین در صفحه مدار است که با مقدار بردار مکان سیاره سازگار نیست. هر چند این اشتباه در راه حل مسئله اثری ندارد با وجود این اگر دانش آموز با در نظر گرفتن این فرض و رعایت قواعد فیزیک و ریاضی به پاسخ نهایی یعنی مختصات کارتزین حضیض برسد نمره کامل خواهد گرفت.

سؤال دوم : (۸۰ نمره)

حد قدری یک تلسکوپ عبارت است از قدر ظاهری کم نورترین ستاره‌ای که به کمک آن تلسکوپ قابل رصد است.

الف) حد قدری تلسکوپ m_l است. کم جرمترین ستاره‌ای که در یک خوشه ستاره‌ای به فاصله r (بر حسب پارسک) به کمک این تلسکوپ قابل رصد است، چند برابر جرم خورشید جرم دارد؟ (راهنمایی: سعی کنید روابط را بر حسب $\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right)$ بنویسید.) (۳۵ نمره)

ب) اگر میزان خاموشی محیط میان ستاره‌ای به صورت αr سبب افزایش قدر ستاره شود (α ضریب خاموشی، بر حسب قدر بر کیلو پارسک است)؛ کم جرم ترین ستاره قابل مشاهده توسط این تلسکوپ چند برابر جرم خورشید خواهد بود؟ (۲۰ نمره)

ج) یک خوشه ستاره‌ای در فاصله $r = 2000$ پارسکی از ما قرار گرفته است. اگر ضریب خاموشی $\alpha = 0.75$ قدر بر کیلوپارسک باشد، نسبت جرم قسمت ب به جرم قسمت الف چند است؟ (نمره ۲۵)

همه ستاره‌های خوشه، ستاره‌های رشته اصلی هستند و برای آنها رابطه $L \propto M^3$ برقرار است که در آن M جرم و L درخشندگی ستاره است.

پاسخ سوال دوم:

(الف)

$$M_l - M_{\odot} = -2.5 \text{ Log } \frac{F}{F_{\theta}} = -2.5 \log \left(\frac{\frac{L}{\xi \pi r^2}}{\frac{L_{\odot}}{\xi \pi (1.0)^2}} \right)$$

$$= 2.5 \text{ Log } \left[\left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \left(\frac{1.0}{r} \right)^2 \right]$$

$$\text{Log} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = \frac{2}{3} \text{ Log} \left(\frac{r}{1.0} \right) - \frac{m_l - M_{\odot}}{2.5 \times 3}$$

که در آن فاصله بر حسب پارسک است.

(ب) تنها جمله‌ی مربوط به خاموشی میان ستاره‌ای افزوده می‌شود و رابطه به صورت زیر در خواهد آمد که در آن فاصله بر حسب پارسک است.

$$\text{Log} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = \frac{2}{3} \text{ Log} \left(\frac{r}{1.0} \right) - \frac{m_l - M_{\odot} - \frac{\alpha r}{1.0 \dots}}{2.5 \times 3}$$

(ج)

$$\text{Log} \frac{M_b}{M_{\text{الف}}} = \text{Log} \left(\frac{M_b M_{\odot}}{M_{\odot} M_{\text{الف}}} \right) = \text{Log} \left(\frac{M_b}{M_{\odot}} \right) - \text{Log} \left(\frac{M_{\text{الف}}}{M_{\odot}} \right)$$

$$= \left[\frac{2}{3} \text{Log} \frac{r}{1.0} - \frac{m_l - M_{\odot} - \frac{\alpha r}{1.0 \dots}}{2.5 \times 3} \right] - \left[\frac{2}{3} \text{Log} \frac{r}{1.0} - \frac{m_l - M_{\odot}}{2.5 \times 3} \right] = \frac{\alpha \left(\frac{r}{1.0 \dots} \right)}{2.5 \times 3}$$

$$= \frac{0.75 \times 2}{2.5 \times 3} = 0.2$$

$$\frac{M_b}{M_{\text{الف}}} = 1.0^{0.2} = 1.08$$

سؤال سوم: (۱۲۰ نمره)

سازمان فضایی می‌خواهد ماهواره‌ای را طی مانوری خاص به خارج از منظومه خورشیدی بفرستد. این مانور به این گونه است که ماهواره در هر مرحله در مدار بیضوی‌ای قرار دارد و لحظه‌ای که در اوج مداری قرار دارد سرعتی به اندازه u در جهت عمود به حرکت به آن اضافه می‌شود.

فرض کنید مدار ابتدایی یک مدار دایروی با شعاعی بسیار نزدیک به شعاع زمین است و در این حالت سرعت u عمود بر مسیر حرکت اضافه می‌شود.

الف) خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مدار مرحله دوم را بر حسب u به دست بیاورید. (۲۵ نمره)

ب) فرض کنید ماهواره در مرحله i ام در مداری با خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ e_i و a_i باشد، خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ ماهواره را در مرحله بعدی بر حسب a_i و e_i و u و ثوابت فیزیکی بدست بیاورید. (۴۰ نمره)

ج) خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مرحله i ام را فقط بر حسب i و u و ثوابت فیزیکی بدست بیاورید. (۳۵ نمره)

د) بعد از چند مرحله این ماهواره به مرحله فرار می‌رسد؟ (۲۰ نمره)

پاسخ سوال سوم :
(الف)

$$E_1 = \frac{-GMm}{r R_e} \rightarrow E_2 = \frac{-GMm}{r R_e} + \frac{1}{2} m u^2$$

$$E_2 = \frac{-GMm}{r a} \rightarrow a = \frac{1}{\frac{1}{R_e} - \frac{u^2}{GM}}$$

$$h = \sqrt{GM R_e} = \sqrt{GM a (1 - e^2)} \rightarrow 1 - e^2 = \frac{R_e}{a} = 1 - \frac{R_e u^2}{GM}$$

$$\rightarrow e = u \sqrt{\frac{R_e}{GM}}$$

(ب)

$$E_i = \frac{-GMm}{r a_i}, E_{i+1} = \frac{-GMm}{r a_i} + \frac{1}{2} m u^2$$

$$a_{i+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_i} - \frac{u^2}{GM}}$$

$$h_i = h_{i+1} \rightarrow a_i (1 - e_i^2) = a_{i+1} (1 - e_{i+1}^2)$$

$$1 - e_{i+1}^2 = (1 - e_i^2) \left(1 - \frac{a_i u^2}{GM} \right) = 1 - e_i^2 - \frac{a_i u^2}{GM} + \frac{a_i u^2 e_i^2}{GM}$$

$$\rightarrow e_{i+1} = \sqrt{e_i^2 - \frac{a_i u^2}{GM} (1 - e_i^2)}$$

(c)

$$E_i = E. + i \frac{\lambda}{r} m u^r \rightarrow a_i = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{R_e} - \frac{i u^r}{GM}}$$

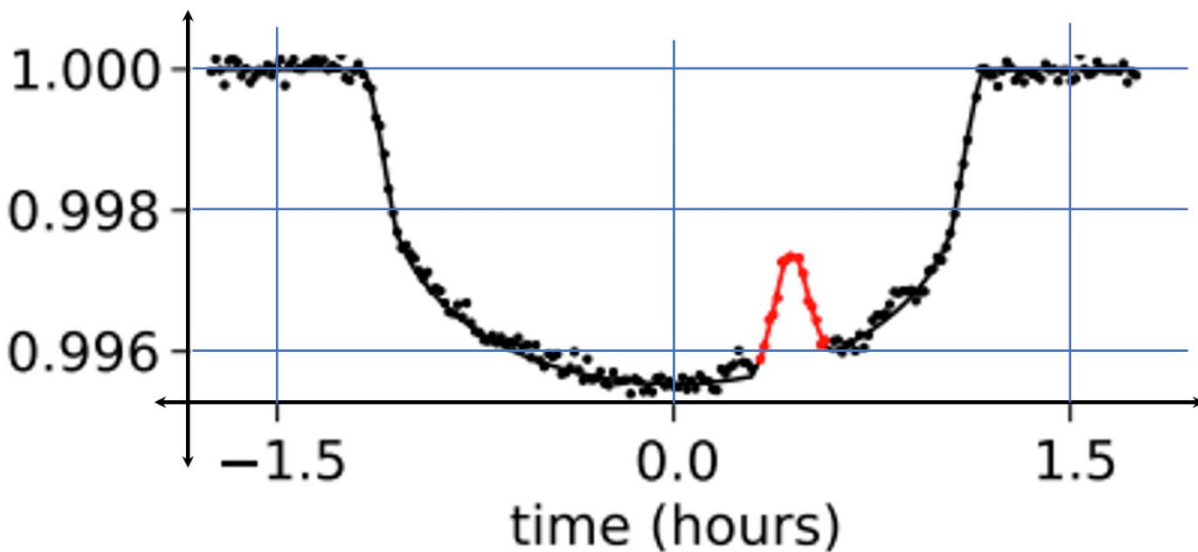
$$h. = h_i \rightarrow R_e = a_i (\lambda - e_i)^r \rightarrow e_i = u \sqrt{\frac{i R_e}{GM}}$$

(d)

$$e_i > \lambda \rightarrow i > \frac{GM}{u^r R_e} \rightarrow i = \left| \frac{GM}{u^r R_e} \right| + \lambda$$

سؤال چهارم: (۱۳۰ نمره)

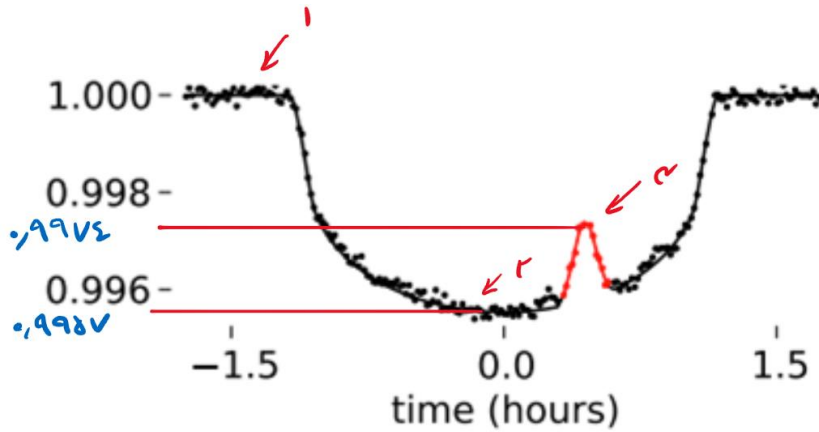
منظومه‌ای فراخورشیدی را در نظر بگیرید که ستاره‌ای خورشیدگون دارد و سیاره آن در مدار دایروی با تمایل مداری 87° گرد ستاره‌اش می‌گردد. منحنی نوری زیر را از یکی از گرفت‌های سیاره ثبت کرده‌ایم که اثرات یک لکه‌ی ستاره‌ای نیز در آن مشهود است. لکه‌های ستاره‌ای نواحی نسبتاً سرد روی سطح ستاره-ها هستند که معمولاً ابعاد بزرگتری از سیارات دارند و دمای آنها در حدود 1000 درجه از دمای سطح ستاره کمتر است و نسبت به سطح ستاره تاریکتر دیده می‌شوند. در بعضی از ستاره‌ها ممکن است ابعاد لکه آنچنان بزرگ باشد که اثر آن در درخشانی ستاره قابل اندازه‌گیری شود.



- الف) دمای سطحی لکه‌ی ستاره‌ای چند کلوین است؟ (۲۵ نمره)
 ب) شعاع سیاره چند برابر شعاع زمین است؟ (۱۵ نمره)
 ج) شعاع مدار گردش سیاره به دور ستاره را پیدا کنید. (۲۵ نمره)
 د) سرعت مداری سیاره چقدر است؟ (۲۰ نمره)
 ه) ابعاد لکه را بر حسب شعاع زمین تخمین بزنید. (۱۵ نمره)
 و) اگر لکه با سرعت 350 m s^{-1} خلاف جهت حرکت سیاره حرکت کند، منحنی نوری در گرفت بعدی چه تغییری می‌کند؟ آن را رسم کنید. فرض کنید دمای لکه ثابت باقی بماند، همچنین لکه روی خط گرفت حرکت کند. (۳۰ نمره)

پاسخ سوال چهارم :

الف و ب) سیاره‌ای داریم که جلوی ستاره را گرفته است؛ در سه حالت مشخص شده روی منحنی نوری، میزان درخشندگی را می‌توان به صورت زیر نوشت.



۱. وقتی گرفتی رخ نداده باشد:

$$I_1 = S_{\odot} \sigma T_{\odot}^4$$

۲. وقتی سیاره کاملاً روی ستاره باشد:

$$I_2 = I_1 - S_p \sigma T_{\odot}^4$$

۳. وقتی سیاره روی لکه است:

$$I_3 = I_1 - S_p \sigma T_{\text{لکه}}^4$$

با تقسیم کردن I_2 و I_3 خواهیم داشت:

$$\frac{I_2}{I_1} = 1 - \frac{S_p}{S_{\odot}}$$

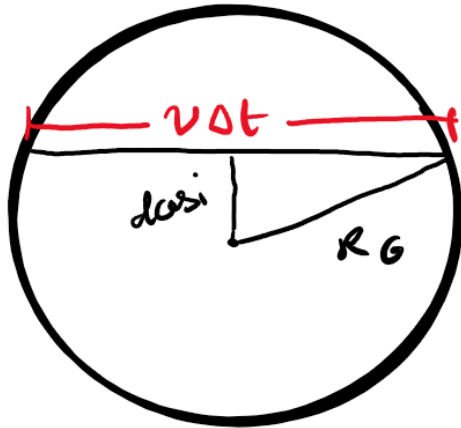
$$\frac{I_3}{I_1} = 1 - \frac{S_p}{S_{\odot}} \left(\frac{T_{\text{لکه}}}{T_{\odot}} \right)^4$$

با توجه به عددهای خوانده شده از نمودار می‌توانیم هر دو مجهول S_p و $T_{\text{لکه}}$ را به دست آوریم.

$$R_p = \sqrt{\frac{S_p}{S_{\odot}}} R_{\odot} = 0.0656 R_{\odot} = 4.59 \times 10^6 m = 7.17 R_{\oplus}$$

$$T_{\text{لکه}} = 0.882 T_{\odot} = 5100 K$$

ج) اگر خط گرفت را روی ستاره رسم کنیم شکل زیر به دست می‌آید.



با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث خواهیم داشت:

$$d^2 \cos^2 i + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = R_G^2$$

و $\Delta t \approx 2/3 \text{ hr}$ همچنین از مدار دایروی داریم:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}}$$

با جایگذاری و حل معادله درجه سوم (به صورت عددی یا هر طور دیگر) سه جواب به دست می‌آید که دو جواب زیر مثبت و قابل قبول هستند. برای کسب نمره‌ی کامل لازم است به همه‌ی جواب‌ها اشاره شود هر چند به دست آوردن یکی از جواب‌های قابل قبول (مثبت) منجر به کسب کسر زیادی از نمره خواهد شد.

$$d = 9/5 \times 10^9 \text{ m}$$

$$d = 5/7 \times 10^9 \text{ m}$$

د) تنها با جایگذاری فاصله در رابطه‌ی سرعت مدار دایروی $v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}}$ داریم:

$$v = 12. \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v = 15. \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

ه) با ضرب δt در سرعت مداری و یا نسبت تناسب بستن با $2\sqrt{R_{\odot}^2 - \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$ می‌توان ابعاد لکه را تخمین زد.

$$\delta t = 14 \text{ min}$$

$$l \approx 16 R_{\oplus}$$

$$l \approx 20 R_{\oplus}$$

و) جهت حرکت سیاره راست به چپ است؛ همچنین طی یک دوره تناوب که زمان ۱۴۰ ساعت می‌باشد، لکه تقریباً به اندازه‌ی $\frac{R_{\odot}}{4}$ به چپ منتقل شده است و تبعاً برآمدگی با همین ابعاد به همین اندازه به چپ منتقل می‌شود.

جهت حرکت سیاره راست به چپ است؛ همچنین طی یک دوره تناوب که زمان ۶۶ ساعت می‌باشد، لکه تقریباً به اندازه‌ی $\frac{R_{\odot}}{1}$ به چپ منتقل شده است و تبعاً برآمدگی با همین ابعاد به همین اندازه به چپ منتقل می‌شود.

سؤال پنجم: (۱۲۰ نمره)

سرعت نور یکی از ثوابت اساسی در عالم است. ثابت بودن سرعت نور به ما این امکان را می‌دهد که میزان مسافتی که نور در فضا می‌پیماید را برحسب زمان بیان کنیم. در یک عالم منبسط شونده با ضریب مقیاس $a(t)$ ، مسافتی (d) را که یک پرتو نور از زمان تابش (زمانی که فوتون تولید می‌شود) تا زمان جذب (زمانی که فوتون توسط ابزارهای ما رصد می‌شود)، در چارچوب همراه، می‌پیماید از رابطه زیر به دست می‌آید

$$d = x(t_e) - x(t.) = \int_{t_e}^{t.} \frac{cdt'}{a(t')}$$

که در آن $a(t)$ ضریب مقیاس تابعی از زمان، c سرعت نور، t_e زمان تابش فوتون و $t.$ زمان حال یا زمان رصد فوتون و به همین ترتیب $x(t_e)$ مکان فوتون در زمان تابش و $x(t.)$ مکان فوتون در زمان رصد در چارچوب همراه است. در کیهان‌شناسی چارچوب همراه چارچوبی است که در آن مختصات و فواصل در یکای ضریب مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند. برای تعیین فواصل در این دستگاه باید ابتدا مختصات را در چارچوب فیزیکی تعیین کنیم و سپس آن را به ضریب مقیاس تقسیم کنیم. در رابطه بالا cdt' مسافت فیزیکی است که نور در زمان dt' می‌پیماید با تقسیم این مسافت بر ضریب مقیاس و انتگرال‌گیری روی زمان کل مسافت طی شده توسط فوتون در چارچوب همراه به دست می‌آید. چون مختصات فیزیکی و ضریب مقیاس هر دو به یک نسبت در عالم منبسط می‌شوند مختصات در دستگاه همراه، همواره ثابت می‌ماند. توجه کنید که مبداء دستگاه مختصات همراه که x در آن اندازه‌گیری می‌شود روی زمین است.

بدون توجه به جزئیات مهبانگ، در نظر بگیرید که همه نقاط عالم در لحظه مهبانگ در یک نقطه متمرکز بوده‌اند. فرض کنید هم زمان با رخ داد مهبانگ یک فوتون هم تابش شده باشد. این فوتون بعد از سفری طولانی در فضا زمان، در زمان حال ($t.$) توسط ابزارهای نجومی ما روی زمین رصد می‌شود.

الف) فاصله فیزیکی لحظه‌ای این فوتون را در هر لحظه از زمان (t) از زمین برحسب c و $t.$ به دست آورید. (۹۰ نمره)

ب) این فوتون در زمان مهبانگ به همراه تمامی نقاط عالم با ما هم مکان بوده است در زمان حال هم که به کمک ابزارهای ما رصد شده با ما هم مکان است، بنابراین فاصله فوتون از ما باید یک بیشینه داشته باشد. مقدار بیشینه فاصله فیزیکی را بر حسب پارامترهای مسئله به دست آورید. (۳۰ نمره)

جهان را تخت و ماده غالب در نظر بگیرید در چنین جهانی ضریب مقیاس به شکل

$$a(t) = \left(\frac{t}{t.}\right)^{\frac{2}{3}}$$

با زمان رابطه دارد.

پاسخ سوال پنجم:

الف) فوتون در زمان رخداد مهبانگ منتشر شده است، بنابراین داریم $t_e = 0$. ما فاصله فیزیکی فوتون از زمین را می‌خواهیم با استفاده از رابطه بالا ابتدا باید مختصات فوتون در چارچوب همراه که مرکز آن روی زمین است به دست آوریم سپس آن را در ضریب مقیاس ضرب کنیم. طبق رابطه داده شده در مسئله داریم

$$x(t) = x(t_e = 0) - \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

$$x(t) = x(t_e = 0) - ct \int_0^t \frac{dt'}{t'^{\frac{1}{\gamma}}} = x(0) - \frac{3}{2} ct \cdot t^{\frac{1}{\gamma}}$$

برای محاسبه $x(0)$ کافی است بدانیم که این فوتون قرار است در زمان t روز زمین رصد شود بنابراین مختصات همراه این فوتون در زمان حال برابر صفر است

$$x(t) = x(0) - \frac{3}{2} ct = 0 \Rightarrow x(0) = \frac{3}{2} ct.$$

با جایگذاری مقدار $x(0)$ و ضرب کردن مقدار $x(t)$ در ضریب مقیاس فاصله فیزیکی لحظه ای به دست می‌آید

$$r(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{3}{2} ct_0 - \frac{3}{2} ct_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) = \frac{3}{2} ct_0 \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{t}{t_0} \right]$$

ب) در این قسمت باید از $r(t)$ نسبت به زمان مشتق بگیریم

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\gamma} c \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} - \frac{3}{2} c = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\gamma^2} t_0.$$

اگر این مقدار را در رابطه $r(t)$ جایگذاری کنیم فاصله بیشینه به دست می‌آید

$$r\left(\frac{1}{\gamma^2} t_0\right) = \frac{3}{2} ct_0 \left[\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{\gamma^2} \right] = 0.44 ct_0.$$

سؤال ششم: (۱۵۰ نمره)

دو ستاره داریم که هم‌اکنون در مختصات زیر هستند:

$$A \begin{cases} \alpha = 2^h 32^m \\ \delta = 42^\circ \end{cases} \quad B \begin{cases} \alpha = 2^h 32^m \\ \delta = 71^\circ \end{cases}$$

همان‌طور که مشخص است این دو ستاره هم‌اکنون هم‌بعد هستند.

الف) حساب کنید چند سال دیگر دوباره این دو ستاره هم‌بعد خواهند شد؟ این مدت زمان را Δt می‌نامیم. (۴۰ نمره)

ب) بعد از گذشت هزار سال از زمان حال، بیشینه عرض جغرافیایی که می‌تواند این دو ستاره را هم‌سمت ببیند چقدر است؟ (۵۰ نمره)

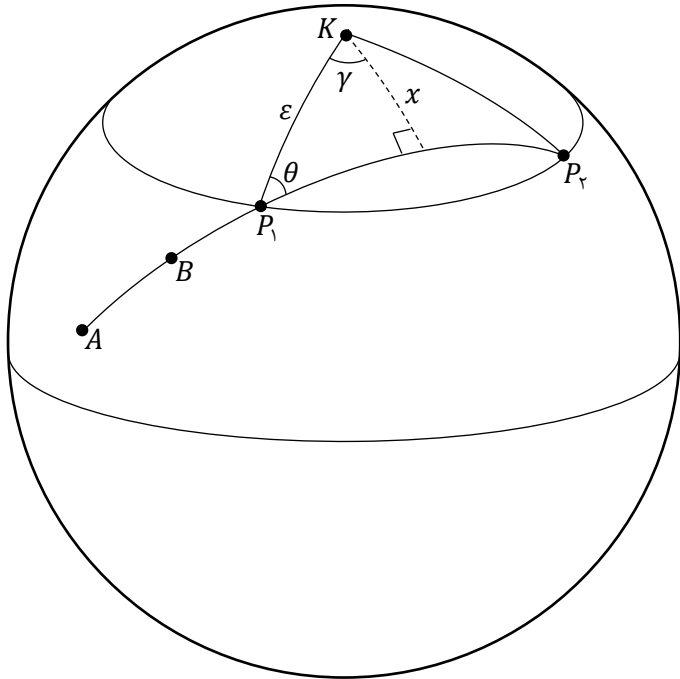
ج) ثابت کنید بعد از گذشت $\frac{\Delta t}{4}$ از زمان حال، فاصله زمانی دوبار هم‌سمت شدن پیاپی این دو ستاره برای ناظری در عرض جغرافیایی ϕ از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$\Delta H = 2 \cos^{-1}(Q \tan \phi)$$

که در آن Q یک ثابت است و مقدار عددی آن را نیز محاسبه کنید. (۶۰ نمره)

پاسخ سوال ششم :

الف) برای هم بعد شدن باید دایره عظیمه AB از قطب بگذرد. این اتفاق در دو نقطه میفتد که اختلاف زمانی این دو نقطه خواسته این بخش است.



$$\theta = 18.0^\circ - (9.0^\circ + \alpha) = 9.0^\circ - \alpha$$

$$\cos 9.0^\circ = -\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \varepsilon$$

$$\rightarrow \tan \gamma = \frac{\tan \alpha}{\cos \varepsilon} \rightarrow \gamma = 40.43^\circ$$

$$\Delta t = (36.0^\circ - 2\gamma) \times \frac{26.0 \dots}{36.0} = 2.160 \text{ سال}$$

ب) برای هم سمتی در این حالت باید سرسو از دایره عظیمه AB بگذرد. بیشترین عرض جغرافیایی ممکن وقتی است که از قطب شمال سماوی در این لحظه (P') به این دایره عظیمه عمود کنیم. شکل در صفحه بعد آمده است.

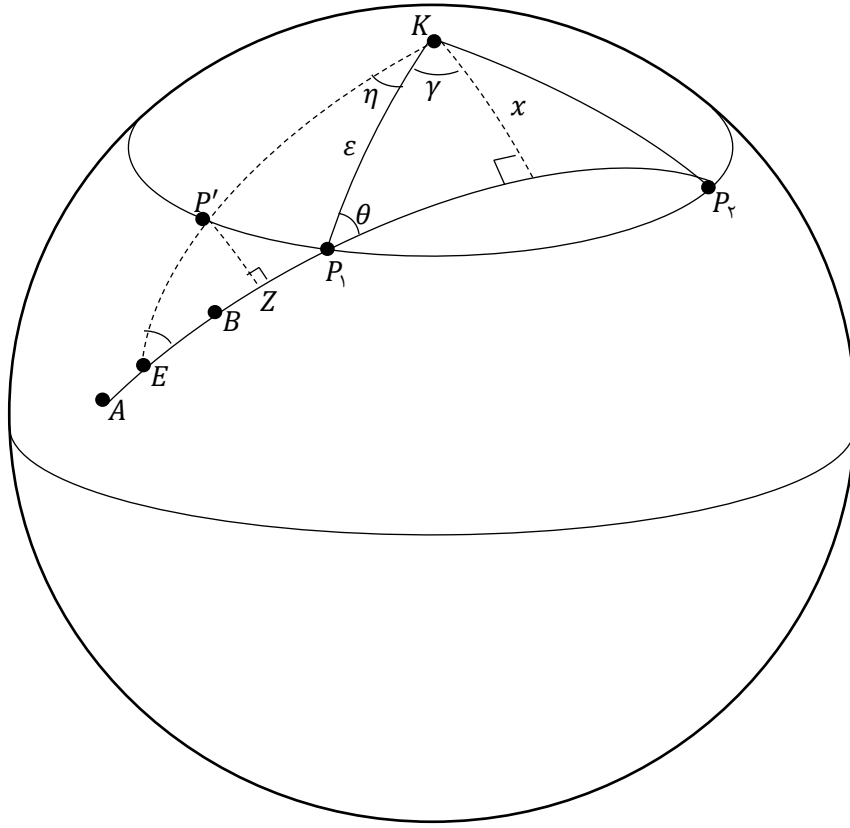
$$\eta = \frac{1.0 \dots}{26.0 \dots} \times 36.0^\circ = 13.85^\circ, \quad \sin x = \sin \theta \sin \varepsilon \rightarrow x = 18.31^\circ$$

$$\cos E = -\cos 9.0^\circ \cos(\eta + \gamma) + \sin 9.0^\circ \sin(\eta + \gamma) \cos x \rightarrow E = 39.58^\circ$$

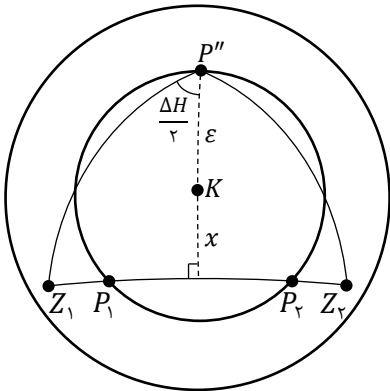
$$\cos(\eta + \gamma) \cos x = \sin x \cot KE - \sin(\eta + \gamma) \cot 9.0^\circ \rightarrow KE = 29.54^\circ$$

$$P'E = KE - \varepsilon \rightarrow P'E = 7.4^\circ$$

$$\sin P'Z = \sin E \sin P'E \rightarrow P'Z = 3.85^\circ, \quad P'Z = 9.0^\circ - \phi_{\max} \rightarrow \phi_{\max} = 86.16^\circ$$



ج) در این حالت قطب شمال سماوی را P'' می‌نامیم و چون این نقطه دقیقاً بین P_1 و P_2 است پس تقارن در مساله وجود دارد و با توجه به سرسوی ناظر فاصله $P''Z_1$ و $P''Z_2$ نیز در هر صورت برابر خواهد بود.



$$P''Z_1 = P''Z_2 = 90^\circ - \phi$$

$$\cos \frac{\Delta H}{r} \cos(\epsilon + x) = \sin(\epsilon + x) \tan \phi - \sin \frac{\Delta H}{r} \cot 90^\circ$$

$$\rightarrow \Delta H = r \cos^{-1}(\tan(\epsilon + x) \tan \phi) = r \cos^{-1}(Q \tan \phi)$$

$$Q = \tan(\epsilon + x) = 0,7894$$

سؤال هفتم: (۱۴۰ نمره)

کهکشانی با تعداد 10^{11} ستاره را در نظر بگیرید که در ابتدای شکل گیری ($t = 0$) از سه نوع ستاره با قدرهای مطلق $M_1 = 5$ و $M_2 = 2.5$ و $M_3 = 0$ تشکیل شده است. اگر نسبت تعداد ستاره ها به صورت $\frac{N_1}{N_2} = 10$ و $\frac{N_2}{N_3} = 10$ باشد، مقادیر جرم کهکشان (m)، درخشندگی کل (L)، قدر مطلق کل (M) و نسبت جرم به درخشندگی ($\frac{m}{L}$) را در زمان های خواسته شده در جدول زیر محاسبه کنید. فرض کنید ستاره های این کهکشان در روند تحولی خود تبدیل به کوتوله سفید می شوند که جرم آنها با جرم اولیه ستاره به شکل زیر رابطه دارد

$$m_{wd} = 0.108 m_i + 0.48 m_{\odot}$$

در این رابطه m_i جرم اولیه ستاره است.

	$t = 0$	$t = 0.10 \text{ Gyr}$	$t = 2.10 \text{ Gyr}$
m			
L			
$\frac{m}{L}$			
M			

توجه: منظور از جرم در این سوال جرم ستاره ای و بازمانده های ستاره ایست. از درخشندگی کوتوله های سفید صرف نظر کنید. در این سوال مشروح محاسبات باید در پاسخ نامه بیاید. بعد از اینکه محاسبات را انجام دادید جدولی شبیه جدول بالا در پاسخ نامه رسم کنید و نتایج محاسبات خود را در آن وارد کنید. توجه کنید که برگه سوال تصحیح نخواهد شد. همه موارد خواسته شده در جدول را بر حسب مقادیر خورشیدی (m_{\odot} و L_{\odot} و $\left(\frac{m}{L}\right)_{\odot}$) بیان کنید. ($1 \text{ Gyr} = 10^9 \text{ yr}$)

پاسخ سوال هفتم :

ابتدا تعداد ستاره های هرگونه و نیز درخشندگی آن ها را محاسبه می کنیم :

$$N_1 + N_2 + N_3 = 10^{11}$$

$$\rightarrow N_2 + 10 \cdot N_2 + 100 \cdot N_2 = 10^{11}$$

$$\rightarrow N_2 = \frac{10^9}{1/11} , \quad N_2 = \frac{10^{10}}{1/11} , \quad N_1 = \frac{10^{11}}{1/11}$$

$$M_1 - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_1}{L_{\odot}} \rightarrow 0 - 4.74 = 2.5 \text{Log} \frac{L_1}{L_{\odot}} \rightarrow L_1 = 0.18 L_{\odot}$$

$$M_2 - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_2}{L_{\odot}} \rightarrow L_2 \approx 7.9 L_{\odot} \rightarrow L_2 \approx 8 L_{\odot}$$

$$M_3 - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_3}{L_{\odot}} \rightarrow L_3 \approx 78.7 L_{\odot} \rightarrow L_3 \approx 80 L_{\odot}$$

در لحظه $t = 0$

$$L_{tot}(0) = N_1 L_1 + N_2 L_2 + N_3 L_3 = 2.14 \times 10^{11} L_{\odot}$$

$$M_{tot}(0) - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_{tot}(0)}{L_{\odot}} \rightarrow M_{tot}(0) = -23.58$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \rightarrow \begin{cases} m_1 \approx 0.93 m_{\odot} \\ m_2 \approx 2 m_{\odot} \\ m_3 \approx 4.3 m_{\odot} \end{cases}$$

جرم گونه های مختلف ستاره

$$M_{tot}(0) = \sum N_i m_i = N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_3 = 1/0.5 \times 10^{11} m_{\odot}$$

$$\left(\frac{m}{L} \right)_{(0)} \approx 0.494 \frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

برای زمان‌های بعدی ابتدا طول عمر رشته اصلی ستارگان و نیز جرم ستاره کوتوله سفید مربوطه را باید محاسبه کنیم:

$$\frac{\tau}{\tau_{\odot}} = \left(\frac{m}{m_{\odot}} \right) \rightarrow \tau_1 = 10 \text{ Gyr} (0.93)^{-2/5} \rightarrow \tau_1 = 11.9 \text{ Gyr}$$

$$\tau_2 = 1.76 \text{ Gyr} \quad \tau_3 = 0.26 \text{ Gyr}$$

پس در زمان $t = 2.5 \text{ Gyr}$ ستاره‌های نوع ۲ حتماً به کوتوله سفید تبدیل شده‌اند.

در زمان $t = 0.5 \text{ Gyr}$ ستاره‌های نوع ۳ نیز به کوتوله سفید تبدیل شده‌اند.

و فقط سهم جرم کوتوله‌ای لحاظ می‌شود.

$$m_{wd,2} = 0.8 \times (2) + 0.48 \rightarrow m_{wd,2} = 0.74 m_{\odot}$$

$$m_{wd,3} = 0.8 \times (0.3) + 0.48 \rightarrow m_{wd,3} = 0.824 m_{\odot}$$

در زمان $t = 0.5 \text{ Gyr}$

$$L_{tot} = N_1 L_1 + N_2 L_2 = 1.43 \times 10^{11} L_{\odot}$$

$$M_{tot} - M_{\odot} = -2.5 \text{ Log} \frac{L_{tot}}{L_{\odot}} \rightarrow M_{tot} = -23.15$$

$$m_{tot} = N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_{wd,3} = 1.2 \times 10^{11}$$

$$\left(\frac{m}{L} \right) = \left(\frac{m_{tot}}{L_{tot}} \right) (t = 0.5 \text{ Gyr}) = 0.71 \frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

در زمان $t = 2.5 \text{ Gyr}$

$$L_{tot} = N_1 L_1 = \frac{1.11}{1.11} \times 0.78 = 0.72 \times 1.11 L_{\odot}$$

$$M_{tot} - M_{\odot} = -2.5 \text{ Log} \frac{L_{tot}}{L_{\odot}} \rightarrow M_{tot} = -22.4$$

$$m_{tot} = N_1 m_1 + N_2 m_{wd,2} + N_3 m_{wd,3}$$

$$= \frac{1.11}{1.11} \times 0.93 + \frac{1.11}{1.11} \times 0.74 + \frac{1.9}{1.11} \times 0.824$$

$$m_{tot} = 0.902 \times 1.11 m_{\odot}$$

$$\left(\frac{m}{L}\right) = \left(\frac{m_{tot}}{L_{tot}}\right) (t = 2.5 \text{ Gyr}) = 1.25 \frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

جدول

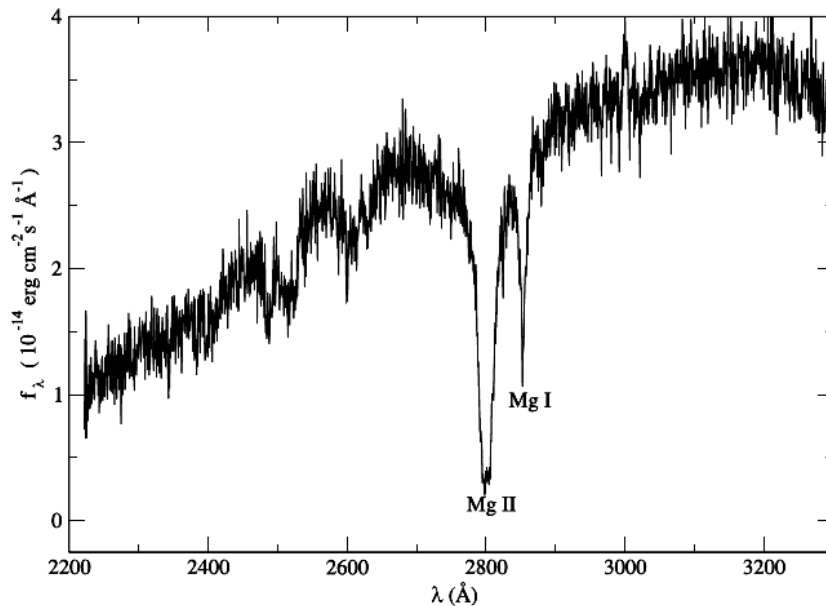
	$t = .$	$t = 0.5 \text{ Gyr}$	$t = 2.5 \text{ Gyr}$
m	1.05×1.11	1.02×1.11	0.902×1.11
l	2.14×1.11	1.43×1.11	0.72×1.11
m/L	0.494	0.71	1.25
M	-23.58	-23.15	-22.4

توجه :

پاسخهایی که با فرض رابطه $L = m^{3.5}$ انجام داده اند نیز نمره کامل را خواهند گرفت.

سؤال هشتم: (۱۳۰ نمره)

در تصویر زیر نمودار نورسنجی از یک کوتوله سفید DZ و سرد (Cool DZ White Dwarf) در محدوده پرتوهای فرابنفش نشان داده شده است. این دسته از کوتوله های سفید کمی سردتر و با خطوط فلزی بیشتر نسبت به هیدروژن و هلیوم در طیف خود هستند. در این نورسنجی تصحیح شده (اثرات حرکتی و ناشی از انتقال به قرمز حذف شده اند)، خطوط جذبی عنصر منیزیم خنثی Mg و یونیزه Mg^+ بخوبی مشخص هستند؛ که به ترتیب در طول موج های ۲۸۵۲ و ۲۷۹۹ آنگستروم ثبت شده اند.



- الف) مشخص کنید دمای مؤثر سطحی برای این ستاره حدوداً چقدر است؟ (۱۵ نمره)
- ب) اگر انرژی یونش برای این عنصر ۷۳۸ کیلوژول بر مول باشد، هر اتم منیزیم در چه دمایی یونیزه می شود؟ آیا در سطح این ستاره اکثر منیزیم ها یونیزه اند؟ بله یا خیر؛ فقط توضیح دهید. (۲۵ نمره)
- ج) شار دریافتی یا روشنایی در قله این نمودار چند وات بر متر مربع در هر نانومتر است؟ هر ایرگ 10^{-7} ژول است. (۲۵ نمره)
- د) می دانیم برای این ستارگان با توجه به برقراری تعادل هیدرواستاتیک، رابطه شعاع-جرم بصورت $R_{wd} = M_{wd}^{-\frac{1}{3}}$ است. اگر جرم این ستاره در ابتدا ۱/۵ برابر جرم خورشید بوده باشد و بدانیم خورشید در انتهای عمرش به یک کوتوله سفی
- د با شعاع $\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$ مقدار کنونی تبدیل خواهد شد، تابندگی این ستاره را بدست آورید. (۲۵ نمره)
- ه) اگر بخواهیم با استفاده از خط جذبی $MgII$ اثر انتقال به قرمز گرانشی را در طیف سنجی از این ستاره تشخیص دهیم، حداقل وضوح طیف سنج چقدر باید باشد؟ این ستاره نسبت به ما حرکت شعاعی ندارد. (۴۰ نمره)
- توجه: در این سوال برای تعیین جرم کوتوله سفید از رابطه ای که در مسئله هفتم داده شده کمک بگیرید.

پاسخ سوال هشتم :

(الف) اگر قله نمودار تابش پلانک را در حدود 3200 \AA در نظر بگیریم:

$$\lambda_{max} \cdot T_{eff} = 2.898 \times 10^{-3} \rightarrow T_{eff} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{3.2 \times 10^{-7}} \cong 9056 \text{ K}$$

البته این مقدار حدوداً دقیق است و کلیه پاسخها در بازه ۹۰۰۰ تا حدود ۹۲۰۰ کلون درست هستند.

(ب) انرژی یونش $\frac{KJ}{mol}$ ۷۳۸ است؛ در نتیجه انرژی یونش برای هر اتم خواهد بود:

$$\frac{738 \times 10^3}{6.022 \times 10^{23}} = 1.23 \times 10^{-18} \text{ Joule} (= 7.75 \text{ eV}) \cong \frac{3}{2} kT$$

$$\rightarrow T = \frac{1.23 \times 10^{-18}}{1.5 \times 1.38 \times 10^{-23}} \cong 5920 \text{ K}$$

با مقایسه دماهای بدست آمده در موارد فوق، مشخص است که در سطح ستاره با دمای مؤثری که بدست آمد، اکثر اتم های منیزیم غیر یونیزه باقی خواهند ماند. به همین علت الکترون های مقید به هسته ها قادر به ایجاد خطوط جذبی مشاهده شده در طیف خواهند بود.

(ج) اگر قله نمودار در $\frac{\text{Erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{\AA}}$ 3.7×10^{-14} باشد:

$$3.7 \times 10^{-14} \times \frac{1}{10^{-7}} \times 10^{-4} \times 10 = 3.7 \times 10^{-16} \frac{\text{watt}}{\text{m}^2 \cdot \text{nm}}$$

(تبدیل واحد های انجام شده، بترتیب برای تبدیل ایرگ به ژول، سانتیمتر مربع به متر مربع و نیز آنگستروم به نانومتر است.)

البته اعداد خوانده شده از روی نمودار می توانند در بازه ۳/۵ تا 3.7×10^{-14} نیز باشند...

(د) با استفاده از رابطه جرم نهایی برای کوتوله های سفید، برای خورشید و این ستاره داریم:

$$M_{wd,\odot} = 0.08 M_{\odot} + 0.48 M_{\odot} = 0.56 M_{\odot}$$

$$M_{DZ} = 0.08 \times 1.5 M_{\odot} + 0.48 M_{\odot} = 0.70 M_{\odot}$$

$$\frac{R_{DZ}}{R_{wd,\odot}} = \left(\frac{M_{DZ}}{M_{wd,\odot}} \right)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow R_{DZ} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \times 7.97 \times 10^8 \times \left(\frac{0.70}{0.56} \right)^{-\frac{1}{3}} \cong 9.2 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\rightarrow L_{DZ} = 4\pi R_{DZ}^2 \sigma T_{DZ}^4 = 4.05 \times 10^{23} \text{ watt}$$

این مقدار نیز با توجه به بازه های قابل قبول در موارد (الف) و (ب) نمره دهی خواهد شد.

(ه) اگر حرکت شعاعی نداشته باشیم تنها انتقال به قرمز گرانشی دخیل است:

$$z_g \cong \frac{\Delta \lambda_{MgII}}{\lambda_{MgII}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_{Sch}}{R_{DZ}}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM_{DZ}}{R_{DZ}c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1$$

$$z_g = \frac{1}{\left(1 - \frac{2 \times 6,673 \times 10^{-11} \times 0,7 \times 1,99 \times 10^{30}}{9,2 \times 10^7 \times 9 \times 10^{16}}\right)^2} - 1 = 9,62 \times 10^{-6}$$

$$\rightarrow \Delta\lambda_{MgII} = z_g \cdot \lambda_{MgII} = 9,62 \times 10^{-6} \times 2799 \cong 0,27 \text{ \AA} \equiv 0,27 \text{ nm}$$

و می دانیم که حداقل وضوح طیف سنجی نیز می تواند در همین حد باشد، تا بتوان تشخیص داد.