جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب ..... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۷ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب ..... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

شانزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۹/۰۴/۲۵ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.

نکات بسیار مهم

لطفا قبل از شروع پاسخ گویی به سوالات، این قسمت را به دقت بخوانید برای خواندن این قسمت 10 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

1) این آزمون حاوی 7 سوال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سوالات بین 7 سوال توزیع شده است. در سوالاتی که بخش های الف و ب و ج و... دارند نمره هر بخش به تفکیک داده شده است. بعد از برگزاری آزمون پاسخ های تشریحی و بارم بندی دقیق پاسخ سوالات منتشر خواهد شد به گونه‌ای که هر دانش آموز می تواند نمره خود را در هر بخش از هر سوال، حساب کند.

2) در سوالاتی که به جواب عددی منتهی می شوند، دقت پاسخ داده شده است. در این سوالات نمره پاسخ نهایی وقتی داده خواهد شد که پاسخ نهایی در محدوده دقت باشد. منظور از محدوده دقت این است که اگر پاسخ نهایی A و دقت پاسخ X باشد جواب هایی که در بازه $[A-X\,,A+X]$ باشند پذیرفته خواهند شد. مثلاً فرض کنید در یک سوال از شما خواسته باشند یک زاویه را حساب کنید و دقت پاسخ را یک درجه داده باشند. فرض کنید جواب درست 135 درجه باشد، در این صورت اگر جواب شما بزرگتر و مساوی 134 و کوچکتر و مساوی 136 باشد نمره پاسخ نهایی را خواهید گرفت. در غیر این صورت نمره پاسخ نهایی شما صفر است. توجه داشته باشید که این موضوع فقط مربوط به پاسخ نهایی سوال است و شامل بخش های دیگر پاسخ نمی‌شود مثل نوشتن روابط لازم و حل معادلات، رسم شکل و... اگر در سوالی دقت جواب نهایی داده نشده باشد، مقدار پیش فرض X برابر است با $X=0.1A$.

3) در بعضی از بخش های بعضی از سوالات علامت کوتاه پاسخ دیده می شود. "کوتاه پاسخ" سوالی است که فقط جواب نهایی آن نمره دارد. لازم نیست در این سوالات شما مشروح محاسبات را در پاسخ نامه بنویسید. نوشتن جواب نهایی کافی است. اگر جواب نهایی در بازه دقتِ جواب درست باشد نمره کامل داده خواهد شد. دقت کنید که هر جا علامت کوتاه پاسخ دیده شد، فقط همان قسمت کوتاه پاسخ است. بقیه بخش‌های سوال باید به طور معمول به شکل تشریحی پاسخ داده شوند. مثلا اگر در کنار بخش ب) از یک سوال علامت کوتاه پاسخ دیده شد، فقط بخش ب) شامل کوتاه پاسخ می شود بخش های الف) و ج) و... باید به طور تشریحی پاسخ داده شوند. بعضی از کوتاه پاسخ ها تستی هستند. در این مورد فقط دور گزینه درست خط بکشید. کوتاه پاسخ های تستی نمره منفی ندارند. اگر در کوتاه پاسخ تستی بیش از یک گزینه علامت زده شود نمره صفر داده می شود.

4) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سوالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سوالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود حتما آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سوال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد نمره کامل خواهید گرفت.

5) توجه کنید که سوال دوم، قسمت الف، **کوتاه پاسخ نیست.** در این قسمت باید مشروح محاسبات مربوط به روش برازش خطی در پاسخ نامه نوشته شود. اگر از برازشگر داخلی ماشین حساب استفاده کنید و فقط مقدار A و B به دست آمده از ماشین حساب را بنویسید، نمره ای به شما تعلق نمی گیرد.

6) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت‌های نرم افزار میکروسافت ورد فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخ نامه می توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	6.67×10^{-11}
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	3.00×10^{8}
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	5.67×10^{-8}
ly	سال نوری	m	9.46×10^{15}
pc	پارسک	m	3.09×10^{16}
AU	واحد نجومی	m	1.50×10^{11}
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	1.99×10^{30}
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	6.96×10^{8}
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	3.85×10^{26}
$M_\odot$	قدر مطلق خورشید		4.83
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		-26.8
$T_\odot$	دمای موثر سطح خورشید	K	5880
R_m	شعاع ماه	km	1737
r_m	فاصله متوسط ماه از زمین	km	384400
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	5.97×10^{24}
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	6380
ϵ	تمایل محور زمین		23.5°

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس استفاده

کنید مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی تصحیح

نخواهد شد

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال اول (150 نمره)

ناظری در ظهر روز انقلاب تابستانی، در عرض جغرافیایی 30 درجه شمالی، یک شاخص عمودی را روی سطح تراز شدهٔ زمین نصب می کند و می‌خواهد به کمک ساعت خود سرعت چرخش سایه شاخص روی زمین را اندازه گیری کند. مقدار این سرعت برحسب ثانیه قوس بر ثانیه چقدر است؟ (دقت پاسخ 1 ثانیه قوس بر ثانیه).

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال دوم (150 نمره)

میزان انرژی نورانی که یک جرم نجومی در طول موج های مختلف تابش می کند، یکسان نیست. تحلیل این تابش جزء اصلی‌ترین تحلیل‌هایی است که ستاره شناسان از طریق آن شکل‌گیری و تکامل کهکشان های دوردست را بررسی می کنند. تابع توزیع انرژی طیفی (SED) تابعی است که میزان شدت تابش در هر بازه طول موج را نشان می دهد. در جدول زیر توزیع انرژی طیفی ستاره دوتایی HD13974 داده شده است. در این جدول ستون اول از چپ طول موج برحسب میکرومتر ($1\ \mu m = 10^{-6}\ m$) و در ستون دوم شدت تابش بر حسب میلی جانسکی ثبت شده است (جانسکی واحد شدت تابش است هر جانسکی برابر است با 10^{-26} وات بر متر مربع بر استرادیان).

طول موج (μm)	شدت تابش (mJy)
1.5 ± 0.1	$(6.2 \pm 0.1) \times 10^4$
2.0 ± 0.1	$(4.0 \pm 0.1) \times 10^4$
3.0 ± 0.1	$(2.2 \pm 0.1) \times 10^4$
3.6 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.1) \times 10^4$
5.0 ± 0.1	$(0.9 \pm 0.1) \times 10^4$
7.0 ± 0.1	$(3.8 \pm 0.2) \times 10^3$
10.0 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.2) \times 10^3$
17.0 ± 0.1	$(3.0 \pm 0.2) \times 10^2$
70.0 ± 0.1	3.0 ± 0.2

به نظر می رسد تابع توزیع انرژی (SED) از مدل زیر تبعیت کند

$$F(\lambda) = Be^{Aln(\lambda)}$$

که در آن λ طول موج، $F(\lambda)$ شدت تابش و A و B مقادیر ثابت یا پارامتر های مدل هستند.

الف) با استفاده از داده‌ها و روش برازش خطی، بهترین مقدار پارامترهای مدل را پیدا کنید. (دقت محاسبه A برابر 0.1 و دقت محاسبه B برابر 100 میلی جانسکی؛ 50 نمره)

ب) دو مورد از منشاهای ممکن خطا در پارامترهای تخمین زده شده را ذکر کنید؟ (10 نمره)

ج) در پاسخنامه نمودار لگاریتمی داده شده است. داده‌ها را با نقطه و مدل را بصورت خط روی نمودار لگاریتمی رسم کنید. (30 نمره)

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

د) با ذکر دلیل بیان کنید آیا مدل ارائه شده به دقت تابع توزیع تابش ستاره دوتایی را توصیف می کند. (40 نمره)

کوتاه پاسخ **هـ)** با استفاده از مدل به دست آمده تخمین بزنید به ازاء کدام طول موج برحسب میکرومتر، این دوتایی 0.001 Jy را ساطع می‌کند. (دقت 10 میکرومتر؛ 20 نمره)

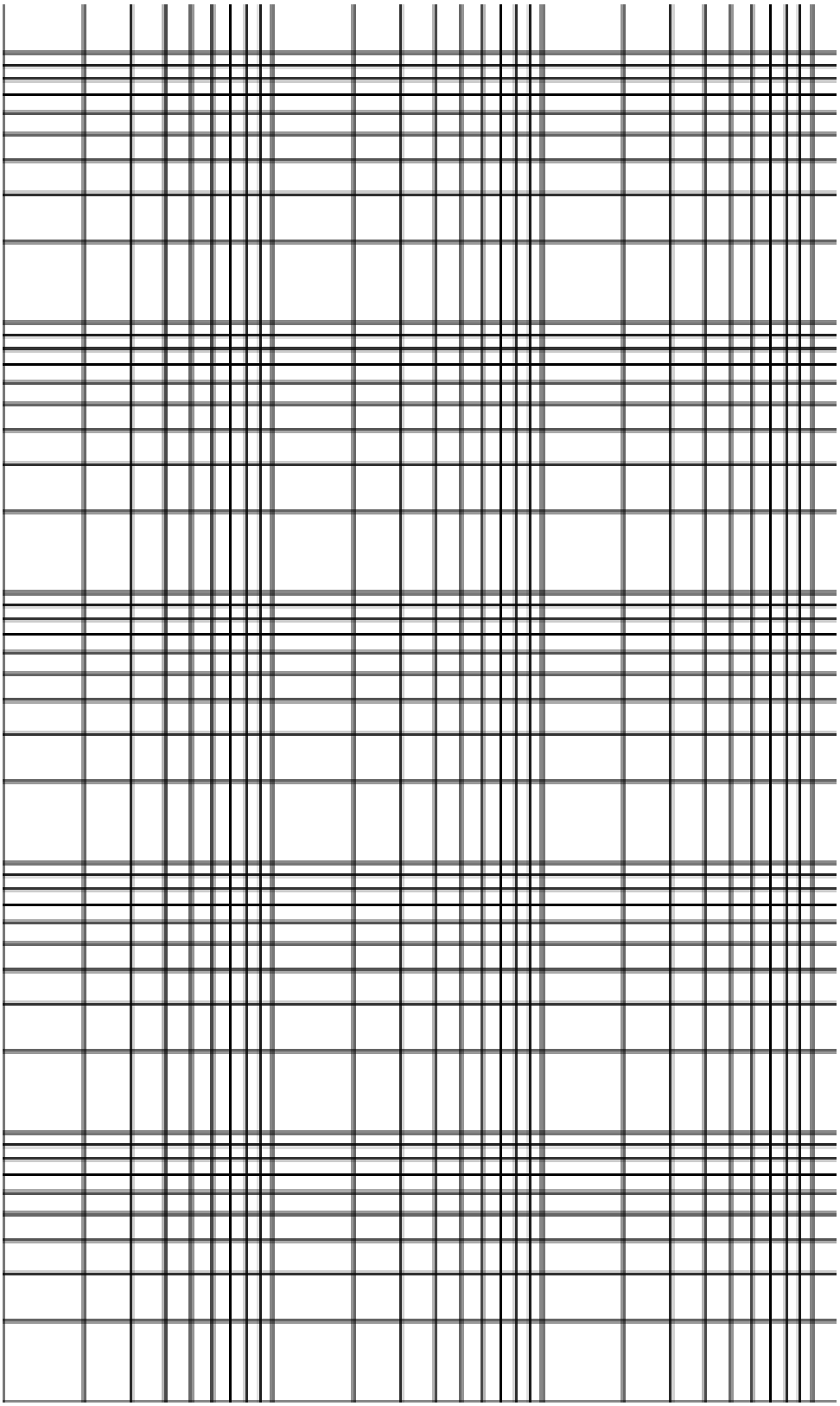
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال سوم (180 نمره)

می‌دانیم که مسیر حرکت اجسام تحت تاثیر نیروهای عکس مجذوری به صورت مقاطع مخروطی است.

الف) برای توصیف حرکت ذره در صفحه از مختصات r (شعاع) و θ (زاویه) استفاده می‌کنیم. مرکز نیرو را یک سیاره به جرم سنگین M در نظر بگیرید که در مبدا مختصات می‌باشد. یک شهاب سنگ با جرم m در نظر بگیرید که با این سیاره برهمکنش می‌کند و می‌تواند در هر کدام از مقاطع مخروطی باشد. می دانیم مسیر حرکت شهاب سنگ از رابطه

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

پیروی می کند. با استفاده از ثابت بودن انرژی (E) و تکانه زاویه‌ای (L)، r_0 و ϵ را برحسب L و E و m و M و G (ثابت گرانش) بدست آورید.(40 نمره)

ب) حال فرض کنید یک شهاب سنگ از بی‌نهایت دور با پارامتر برخورد b و سرعت اولیه v_0 به سمت منظومه شمسی پرتاب می‌شود. فقط اثر گرانشی خورشید در نظر گرفته و بررسی کنید چه شرطی بر روی پارامتر های اولیه شهاب سنگ باشد تا شعاع حضیض مدار شهاب سنگ برابر شعاع حرکت مداری کره زمین بشود. (70 نمره)

ج) حال فرض کنید این شهاب سنگ با کره زمین برخورد کاملا ناکشسان می‌کند. بررسی کنید تحت چه شرطی این برخورد می‌تواند زمین را در یک مدار نامقید قرار دهد و درنتیجه زمین از منظوره‌ی شمسی خارج شود. فرض کنید برخورد لحظه ای و در لحظه برخورد بردار سرعت شهاب سنگ و کره‌ی زمین در خلاف جهت هم باشند.(70 نمره)

در کل این مسئله حرکت مداری زمین را دایروی در نظر بگیرید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس
استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

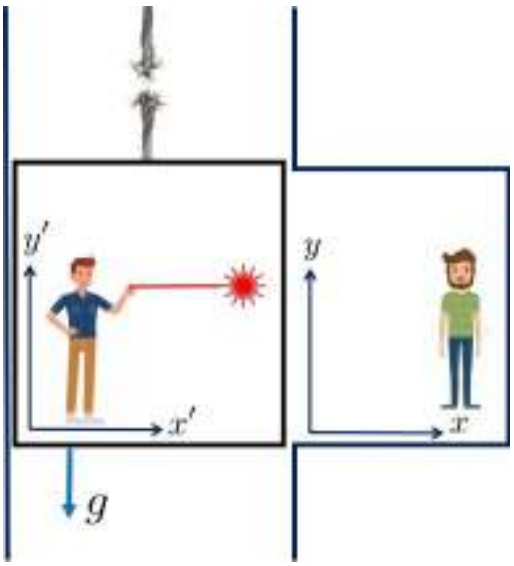
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال چهارم (100 نمره)

طبق نظریه نسبیت عام اینشتین می دانیم که در میدان گرانشی یک جسم، فقط ناظرهایی که آزادانه سقوط می کنند، مسیر نور را مستقیم می بینند. همانند شکل زیر دو دوست فیزیکدان یکی در آسانسور (علی) و دیگری در یکی از طبقات ساختمان (سامان) روبروی هم (در سکون) ایستاده اند. ناگهان در زمان $t = 0$ کابل آسانسور پاره می شود و آسانسور و علی سقوط آزاد می کنند (از اثرات اصطکاکی صرفنظر می کنیم). در این شرایط علی و سامان تصمیم می گیرند که آزمایشی انجام بدهند. علی یک باریکه لیزر را همزمان با پاره شدن کابل در $t = 0$ دقیقاً موازی کف آسانسور (محور x') ارسال می‌کند. طبق "اصل هم ارزی" علی می بیند که مسیر لیزر "همواره" (قبل از برخورد به دیواره) یک خط مستقیم و موازی کف آسانسور است.



کوتاه پاسخ **الف)** معادله حرکت پرتو لیزر را نسبت به مختصات $(x'.y')$ بنویسید. (10 نمره)

کوتاه پاسخ **ب)** معادله حرکت آسانسور را در مختصات سامان $(x.y)$ بنویسید. (10 نمره)

ج) معادله مسیر پرتو لیزر را در مختصات سامان به صورت $y(x)$ بنویسید؟ (20 نمره)

د) شعاع انحنای نقطه‌ای، R یک منحنی به معادله $y(x)$ از رابطه

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|$$

به دست می آید که در آن پرایم به معنی مشتق گیری و دو پرایم به معنی مشتق دوم است. با استفاده از این رابطه شعاع انحنای مسیر حرکت باریک لیزر را از دید سامان دقیقاً در لحظه ساطع شدن آن بیابید. مبدا دستگاه ها را به طرز مناسب انتخاب کنید تا محاسبات راحت شود. (30 نمره)

هـ) این شعاع را برای میدان گرانشی در سطح زمین حساب کنید. (10 نمره)

و) حال فرض کنید که یک باریکه نور در اطراف یک جسم بسیار چگال در حرکت است طوری که شعاع انحنای حرکت این باریکه با شعاع جسم برابر است. رابطه جرم و شعاع این جسم را بیابید. این جسم چه موجود فیزیکی می تواند باشد؟(20 نمره)

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

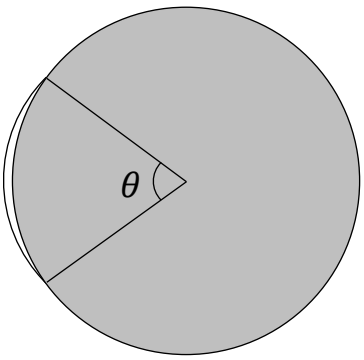
سؤال پنجم (160 نمره)

در دهه 30 میلادی آندره دانژون (André Danjon)، منجم فرانسوی حداقل جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید، برای مشاهد پذیر شدن هلال‌های جوان پس از مقارنه ماه و خورشید را $7°$ تعیین کرد. علت این امر ممانعتِ عوارض سطحی (مانند کوه ها و پستی و بلندی های لبه ماه) از تابش هلال نازک بخاطر جلوگیری از عبور نورشان است. این جدایی زاویه ای **حدّ دانژون** نام گرفت. مدت ها رصدی حتی به کمک ابزارهای قدرتمند در جدایی زاویه ای کمتر از این مقدار ثبت نشد و این حد مورد قبول بود. با این حال رصد در پرتوهای فروسرخ نشان می دهد در زوایای کمتر از حد دانژون نیز هلال تشکیل خواهد شد؛ زیرا در طول موج های بلندتر پراکندگی در جو کمتر و درصد عبور نور بیشتر است.

کوتاه پاسخ **الف)** لبه ماه را صاف و کروی شکل در نظر بگیرید. با توجه به حد تفکیک چشمانِ تیزبین (یک دقیقه قوس) کمترین جدایی زاویه‌ای بین ماه و خورشید برای تفکیکِ ضخامت هلال با چشم غیر مسلح چند درجه خواهد بود؟ (60 نمره)

1) 10　　2) 20　　3) 15　　4) 30

ب) تصویر زیر ماه را هنگامی که جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید 5.2 درجه است نشان می دهد. اگر در این هنگام گشودگی هلالِ روشن ماه (زاویه θ، طول کمان هلال از دید مرکز قرصِ ماه) در تصویر $70°$ باشد. بلندیِ ارتفاعات لبهٔ ماه را برحسب کیلومتر بدست آورید (دقت پاسخ 0.1 کیلومتر؛ 100 نمره).



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

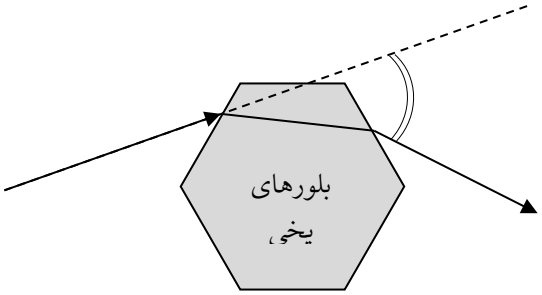
ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال ششم (100 نمره)

در بعضی از روزها و شب های سرد، ابرهای سیروس و سیرواِستراتوس در ارتفاعات 5 تا 14 کیلومتری زمین تشکیل می شوند، در این مواقع گاهاً هاله ای به شعاع °22 در اطراف خورشید یا ماه در آسمان دیده می شود که در تصویر زیر مشخص است. (شکل 1)

شکل (1)



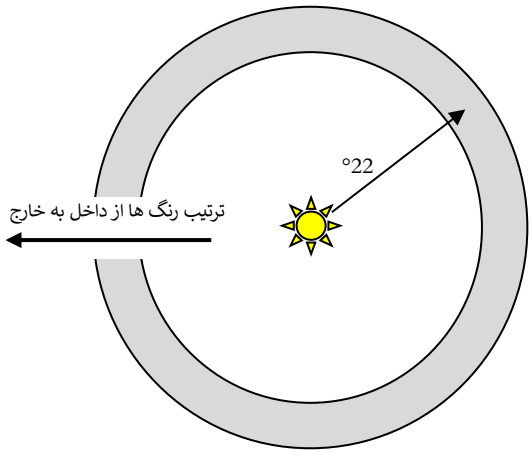
شکل (2)

این **هالهٔ 22 درجه‌ای** ناشی از شکست نور در بلورهای یخ آب است، که منشورهایی 6-ضلعیِ منتظم ایجاد کرده اند و مطابق با تصویر مسیر نور را عوض می کنند (شکل 2).

الف) زاویه انحراف نورهای خروجی نسبت به نورهای ورودی با توجه به زوایای مختلف تابش، در بازه‌ای تغییر می کند که می دانیم کمینه آن در اطراف °22 است و این امر سبب می شود که در این زاویه از قرص خورشید و یا ماه، شاهد پرتوهای رسیده بیشتری به ناظرانِ این پدیده جوی باشیم. ضریب شکست این بلورها چقدر است؟ راهنمایی : حداقل زاویه انحراف نور از یک منشور، زمانیست که زوایای ورودی و خروجی نور از سطوح یکسان باشند. (دقت 0.01 واحد؛ 70 نمره)

کوتاه پاسخ **ب)** اگر در شکل 3 بخش خاکستری رنگ نشان دهنده هاله نورانی باشد ترتیب رنگ ها از داخل به خارج چگونه است؟ (30 نمره)

1) آبی – سبز - زرد - نارنجی - قرمز
2) قرمز- نارنجی - زرد – سبز - آبی
3) بسته به شرایط متغیر است
4) اصلا تجزیه نور نداریم



شکل 3

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

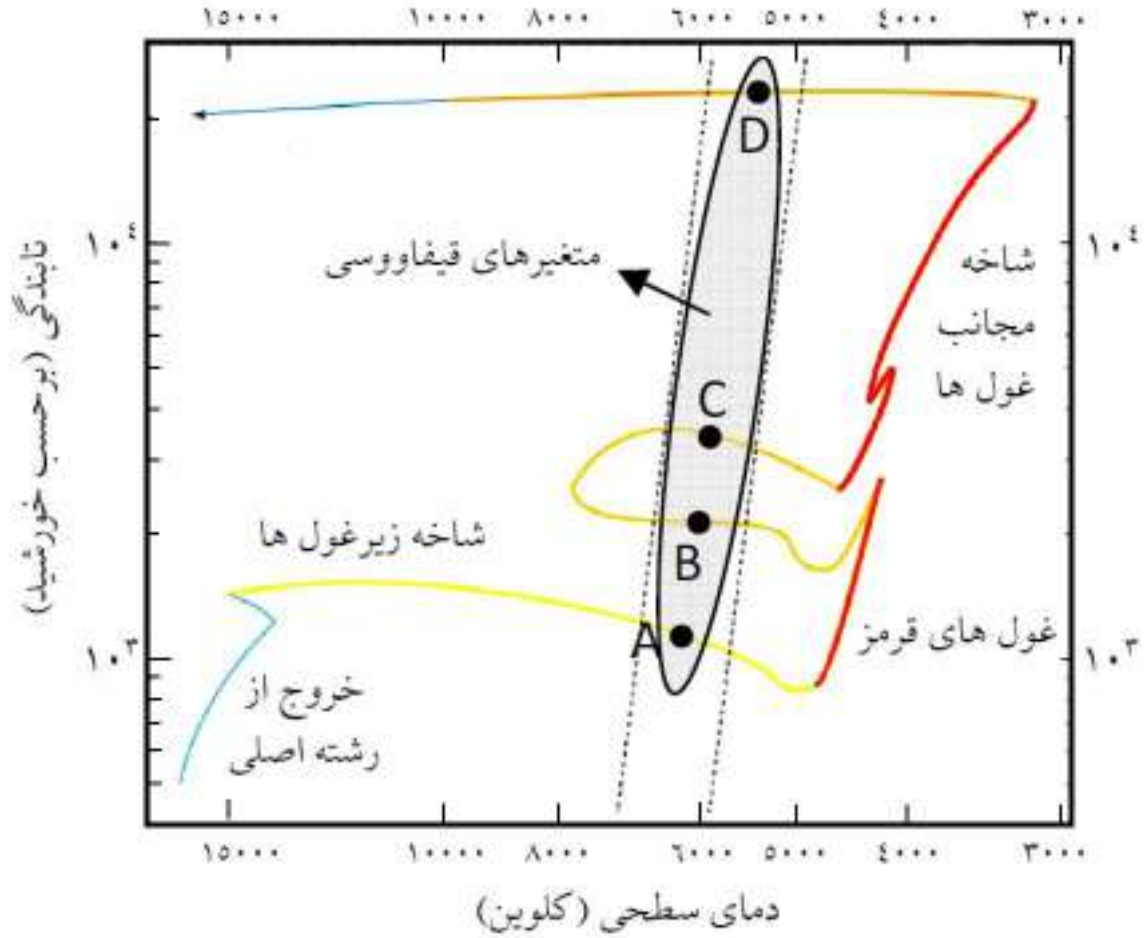
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال هفتم (160 نمره)

کهکشان کوتوله کرویِ UGC10822 در راستای صورت فلکی اژدها، از جمله اقمار کهکشانی راه شیری است که در سال 1954 میلادی توسط آلبرت جورج ویلسون کشف شد. اخیراً در این کهکشان یک ستاره متغیر با مسیر تحولی زیر بر روی نمودار HR، مشاهده شده است که به نظر می رسد در دسته-بندی متغیرهای قیفاووسی قرار گیرد. اگر رابطهٔ "دوره تناوب-تابندگیِ متغیرهای قیفاووسی" برای متوسط قدر مطلقِ مرئی آنها به شکل زیر باشد

$$M_v = -2.43(\log_{10} P - 1) - 4.05$$

که در آن P دوره تناوب بر حسب روز و M_v متوسط قدر مطلق مرئی است. همچنین در رصدها مشخص شده است که نور این ستاره با دوره تناوب 6.03 روز تغییر می کند.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

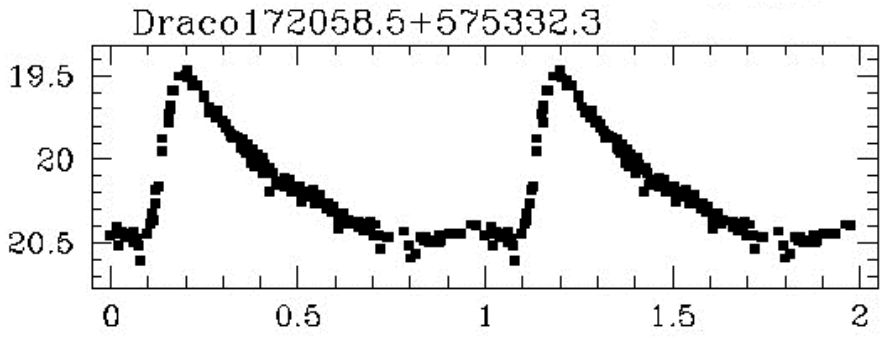
کوتاه پاسخ

الف) مشخص کنید مکان این ستاره هم اکنون در کدامیک از نقاطِ داده شده روی مسیر تحولی بر روی این نمودار است. (20 نمره)

1) اطراف نقطه A 2) اطراف نقطه B 3) اطراف نقطه C 4) اطراف نقطه D

ب) شعاع این ستاره بطور متوسط چند برابر شعاع خورشید است؟ (دقت 5 واحد؛ 30 نمره)

ج) اگر نمودار تغییرات قدر ظاهری در فازهای مختلف برای این متغیر بصورت زیر باشد، با فرض اینکه این ستارگان در پرنورترین و کم نورترین حالت شعاعی یکسان دارند، نسبت دمای بیشینه روشنایی به دمای کمینه روشنایی را بدست آورید.(دقت 0.05 واحد؛ 40 نمره)



د) می دانیم در راستای مشاهده این کهکشانِ کوتوله (که در عرض کهکشانی b=34/6° قرار دارد)، به اِزاء هر یک کیلوپارسک فاصله، 0.05 قدر جذب داریم. مشخص کنید فاصله این کهکشان تا ما چند پارسک است؟ (دقت 1 کیلوپارسک؛ 70 نمره)

توجه: در این مسئله "تابندگی" معادل "درخشندگی مطلق" و معادل کل توان تابشی ستاره برحسب وات برمتر مربع است.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس
استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

در صورت لزوم از این
صفحه به عنوان چرک
نویس استفاده کنید

مطالب این صفحه
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

شانزدهمین المپیاد نجوم و اختر فیزیک

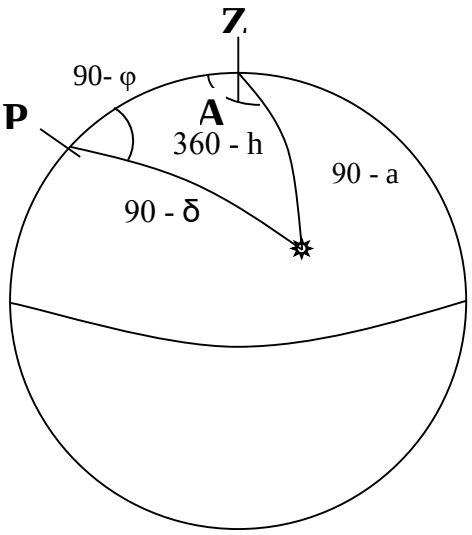
پاسخ نامه تشریحی مرحله دوم

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	6.67×10^{-11}
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	3.00×10^{8}
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	5.67×10^{-8}
ly	سال نوری	m	9.46×10^{15}
pc	پارسک	m	3.09×10^{16}
AU	واحد نجومی	m	1.50×10^{11}
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	1.99×10^{30}
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	6.96×10^{8}
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	3.85×10^{26}
$M_\odot$	قدر مطلق خورشید		4.83
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		-26.8
$T_\odot$	دمای موثر سطح خورشید	K	5880
R_m	شعاع ماه	km	1737
r_m	فاصله متوسط ماه از زمین	km	384400
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	5.97×10^{24}
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	6380
ϵ	تمایل محور زمین		23.5°

سؤال اول (150 نمره)

ناظری در ظهر روز انقلاب تابستانی، در عرض جغرافیایی 30 درجه شمالی، یک شاخص عمودی را روی سطح تراز شدهٔ زمین نصب می کند و می‌خواهد به کمک ساعت خود سرعت چرخش سایه شاخص روی زمین را اندازه گیری کند. مقدار این سرعت برحسب ثانیه قوس بر ثانیه چقدر است؟ (دقت پاسخ 1 ثانیه قوس بر ثانیه).



پاسخنامه مسئله 1 :

با توجه به شکل روبرو داریم :

$$\frac{\sin(360-h)}{\sin(90-a)} = \frac{sinA}{sin(90-\delta)}$$
$$\rightarrow -\sinh cos\delta = sinA\cos a$$

حال برای به دست آوردن سرعت چرخش سایه یا همان $\frac{dA}{dt}$ باید از رابطه بالا مشتق بگیریم که مِیل خورشید را در طول روز ثابت فرض می کنیم.

$$-\frac{dh}{dt}cosh\ cos\delta = \frac{dA}{dt}cosA\ cosa - \frac{da}{dt}\ sinA\ sina$$

می دانیم در هنگام ظهر $\frac{da}{dt} = 0$ است بنابراین :

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dh}{dt}\frac{cosh\ cos\delta}{cosA\ cosa}$$

در نتیجه در هنگام ظهر داریم :

$$A = 180^\circ \quad h = 0 \quad \delta = \varepsilon = 23.5^\circ$$
$$a = 90 - \varphi + \varepsilon = 83.5^\circ$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\cos(23.5)}{\cos(83.5)}\frac{dh}{dt} = 8.101 \times \frac{dh}{dt}$$
$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\acute{t}}\frac{d\acute{t}}{dt} = \frac{360 \times 3600}{86400} \times 0.9973 = 14.9595$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8.101 \times 14.959 = 121.1\ \frac{arcsec}{sec}$$

سؤال دوم (150 نمره)

میزان انرژی نورانی که یک جرم نجومی در طول موج های مختلف تابش می کند، یکسان نیست. تحلیل این تابش جزء اصلی‌ترین تحلیل‌هایی است که ستاره شناسان از طریق آن شکل‌گیری و تکامل کهکشان های دوردست را بررسی می کنند. تابع توزیع انرژی طیفی (SED) تابعی است که میزان شدت تابش در هر بازه طول موج را نشان می دهد. در جدول زیر توزیع انرژی طیفی ستاره دوتایی HD13974 داده شده است. در این جدول ستون اول از چپ طول موج برحسب میکرومتر ($1\ \mu m = 10^{-6}\ m$) و در ستون دوم شدت تابش بر حسب میلی جانسکی ثبت شده است (جانسکی واحد شدت تابش است هر جانسکی برابر است با 10^{-26} وات بر متر مربع بر استرادیان).

طول موج (μm)	شدت تابش (mJy)
1.5 ± 0.1	$(6.2 \pm 0.1) \times 10^4$
2.0 ± 0.1	$(4.0 \pm 0.1) \times 10^4$
3.0 ± 0.1	$(2.2 \pm 0.1) \times 10^4$
3.6 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.1) \times 10^4$
5.0 ± 0.1	$(0.9 \pm 0.1) \times 10^4$
7.0 ± 0.1	$(3.8 \pm 0.2) \times 10^3$
10.0 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.2) \times 10^3$
17.0 ± 0.1	$(3.0 \pm 0.2) \times 10^2$
70.0 ± 0.1	3.0 ± 0.2

به نظر می رسد تابع توزیع انرژی (SED) از مدل زیر تبعیت کند

$$F(\lambda) = Be^{Aln(\lambda)}$$

که در آن λ طول موج، $F(\lambda)$ شدت تابش و A و B مقادیر ثابت یا پارامتر های مدل هستند.

الف) با استفاده از داده‌ها و روش برازش خطی، بهترین مقدار پارامترهای مدل را پیدا کنید. (دقت محاسبه A برابر 0.1 و دقت محاسبه B برابر 100 میلی جانسکی؛ 50 نمره)

ب) دو مورد از منشاهای ممکن خطا در پارامترهای تخمین زده شده را ذکر کنید؟ (10 نمره)

ج) در پاسخنامه نمودار لگاریتمی داده شده است. داده‌ها را با نقطه و مدل را بصورت خط روی نمودار لگاریتمی رسم کنید. (30 نمره)

د) با ذکر دلیل بیان کنید آیا مدل ارائه شده به دقت تابع توزیع تابش ستاره دوتایی را توصیف می کند. (40 نمره)

کوتاه پاسخ **ه)** با استفاده از مدل به دست آمده تخمین بزنید به ازاء کدام طول موج برحسب میکرومتر، این دوتایی Jy 0.001 را ساطع می‌کند. (دقت 10 میکرومتر؛ 20 نمره)

پاسخنامه مسئله 2 :

الف : رابطه $F(\lambda)$ را می توان به شکل ساده تری نوشت :

$$F(\lambda) = B\ e^{ALn(\lambda)} = Be^{ln\lambda^A} = B\lambda^A$$

اما ما به دنبال یک رابطه خطی هستیم و بنابراین بهتر است از طرفین لگاریتم بگیریم.

$$logF = logB + Alog\lambda$$

این رابطه خطی است که در تشابه با $y = ax + b$، در آن داریم :

$y \to \log F$
$b \to logB$
$x \to log\lambda$
$a \to A$

که طبق جدول مقادیر $(x_i\ , y_i)$ داده شده است.

برای برازش خطی از روش حداقل مربعات استفاده می کنیم. در این روش باید کمیت :

$$\delta = \sum_i (y(x_i) - y_i\ )^2 = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2$$

نسبت به پارامترهای مدل یعنی b و a کمینه شوند؛ در نتیجه باید داشته باشیم :

$$\frac{\partial \delta}{\partial a} = \sum_i 2x_i(ax_i + b - y_i) = 2(a\sum_i x_i^2 + b\sum x_i - \sum x_i\, y_i) = 0$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial b} = \sum_i 2(ax_i + b - y_i) = 2(a\sum_i x_i + b\sum 1 - \sum y_i) = 0$$

به این ترتیب به یک "دو معادله-دو مجهول" می رسیم :

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i\, y_i \\ a\sum x_i + bN = \sum y_i \end{cases}$$

که در آن N تعداد داده هاست. با حل این دو معادله-دو مجهول نتیجه می گیریم :

$$b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{N} \quad \to \quad a\sum x_i^2 + (\frac{\sum y_i - a\sum x_i}{N})\sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$aN\sum x_i^2 + \sum y_i \sum x_i - a\,(\sum x_i)^2 = N\sum x_i y_i$$

$$\rightarrow a\left[N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] = N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

$$\rightarrow a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \;//\; b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{N}$$

اکنون برای بدست آوردن ضرایب a و b باید کمیت های زیر را حساب کنیم :

$$\sum x_i = \sum log\lambda_i = 7.13$$
$$\sum x_i^2 = \sum (log\lambda_i)^2 = 7.78$$
$$\sum y_i = \sum logF_i = 31.63$$
$$\sum x_i\, y_i = \sum (\ log\lambda_i)(logF_i) = 19.56$$

در نتیجه :

$$a = -2.58 \rightarrow A = -2.58$$
$$\mathrm{b} = 5.56 \rightarrow \mathrm{B} = 361724\ \ mJy$$

ب : تابش های رادیویی حرارتی ابزارها + خطاهای ابزارهای اندازه گیری

ج :

د : همانطور که در نمودار دیده می شود خط رسم شده یا مدل، فقط از محدوده خطای یکی از نقاط می گذرد. مقداری که این مدل برای کمیت شدت تابش پیش بینی می کند بسیار بیشتر و کمتر از مقدار رصد شده با احتساب خطای اندازه گیری دستگاه است؛ بنابراین این مدل، مدل مناسبی **نیست**.

ه :

$$0.001\ Jy = 1\ mJy$$

$$F(\lambda) = B\lambda^{A} = 361724\lambda^{-2.58} = 1$$

$$\rightarrow -2.58\ log\lambda = -\log(361724)$$

$$\rightarrow \lambda = 10^{2.1544} = 142.69\ \mu m$$

سؤال سوم (180 نمره)

می‌دانیم که مسیر حرکت اجسام تحت تاثیر نیروهای عکس مجذوری به صورت مقاطع مخروطی است.

الف) برای توصیف حرکت ذره در صفحه از مختصات r (شعاع) و θ (زاویه) استفاده می‌کنیم. مرکز نیرو را یک سیاره به جرم سنگین M در نظر بگیرید که در مبدا مختصات می‌باشد. یک شهاب سنگ با جرم m در نظر بگیرید که با این سیاره برهمکنش می‌کند و می‌تواند در هر کدام از مقاطع مخروطی باشد. می دانیم مسیر حرکت شهاب سنگ از رابطه

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

پیروی می کند. با استفاده از ثابت بودن انرژی (E) و تکانه زاویه‌ای (L)، r_0 و ϵ را برحسب L و E و m و M و G (ثابت گرانش) بدست آورید.(40 نمره)

ب) حال فرض کنید یک شهاب سنگ از بی‌نهایت دور با پارامتر برخورد b و سرعت اولیه v_0 به سمت منظومه شمسی پرتاب می‌شود. فقط اثر گرانشی خورشید در نظر گرفته و بررسی کنید چه شرطی بر روی پارامتر های اولیه شهاب سنگ باشد تا شعاع حضیض مدار شهاب سنگ برابر شعاع حرکت مداری کره زمین بشود. (70 نمره)

ج) حال فرض کنید این شهاب سنگ با کره زمین برخورد کاملا ناکشسان می‌کند. بررسی کنید تحت چه شرطی این برخورد می‌تواند زمین را در یک مدار نامقید قرار دهد و درنتیجه زمین از منظوره‌ی شمسی خارج شود. فرض کنید برخورد لحظه ای و در لحظه برخورد بردار سرعت شهاب سنگ و کره‌ی زمین در خلاف جهت هم باشند.(70 نمره)

در کل این مسئله حرکت مداری زمین را دایروی در نظر بگیرید.

پاسخنامه مسئله 3 :

الف :

$$L = mr^2\dot{\theta} = cte. \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$E = \frac{-GMm}{r} + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) \equiv const.$$

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon cos\theta} \rightarrow \dot{r} = \frac{r_0 \epsilon \dot{\theta} sin\theta}{(1+\epsilon cos\theta)^2} = \frac{r_0 \epsilon sin\theta L}{m r_0^2} = \frac{\epsilon sin\theta L}{m r_0}$$

$$E = \frac{-GMm}{r_0}(1+\epsilon cos\theta) + \frac{L^2}{2mr_0^2}(1+\epsilon cos\theta)^2 + \frac{L^2}{2mr_0^2}\epsilon^2 sin^2\theta$$

$$\rightarrow E = \frac{-GMm}{r_0}(1+\epsilon cos\theta) + \frac{L^2}{2mr_0^2}(1+2\epsilon cos\theta+\epsilon^2)$$

توان های مختلف $cos\ cos\ \theta$ را جدا سازی می کنیم :

توان صفرم $\rightarrow E = \frac{-GMm}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2}(1+\epsilon^2)$

توان یکم $\rightarrow -\frac{GMm\epsilon}{r_0} + \frac{L^2\epsilon}{mr_0} = 0$

$$\rightarrow r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$$

با جایگذاری r_0 در رابطه انرژی (توان صفرم)

$$E = \frac{G^2M^2m^3}{2L^2}(\epsilon^2 - 1)$$

$$\rightarrow \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2G^2}}$$

ب : اگر در حضیض مقدار θ برابر با صفر باشد :

$$L = mbv_0 \text{ و } E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$R_{\oplus} = \frac{r_0}{1+\varepsilon}$$

$$v_p = \frac{L(1+\varepsilon)}{mr_0} = \frac{L}{mR_{\oplus}}$$

$$\rightarrow v_P = \frac{bv_0}{R_{\oplus}}$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{R_{\oplus}}\right)^2 - \frac{GM_{\odot}m}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\rightarrow \frac{GM_{\odot}}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}v_0^2\left(-1+\frac{b^2}{{R_{\oplus}}^2}\right) \rightarrow v_0(b) = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\oplus}} \times \frac{1}{\frac{b^2}{{R_{\oplus}}^2}-1}}$$

$$M_E R_{\oplus} w^2 = \frac{M_E M_{\odot} G}{R_{\oplus}^2} \rightarrow R_{\oplus}^3 = \frac{M_{\odot}G}{w^2} \rightarrow R_{\oplus} = \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}G}{w^2}}$$

$$w = \frac{2\pi}{1\ year}$$

ב:

$$v_{\oplus} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\oplus}}}$$

$$v_P = \frac{bv_0}{R_{\oplus}} = \frac{b}{R_{\oplus}}\sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\oplus}}\frac{1}{\frac{b^2}{{R_{\oplus}}^2}-1}}$$

از پایستگی تکانه خطی داریم :

$$mv_P - Mv_\oplus = (m + M_\oplus)v_f$$

همچنین اگر سرعت فرار در محل زمین را با v_c نشان دهیم، می توان نوشت :

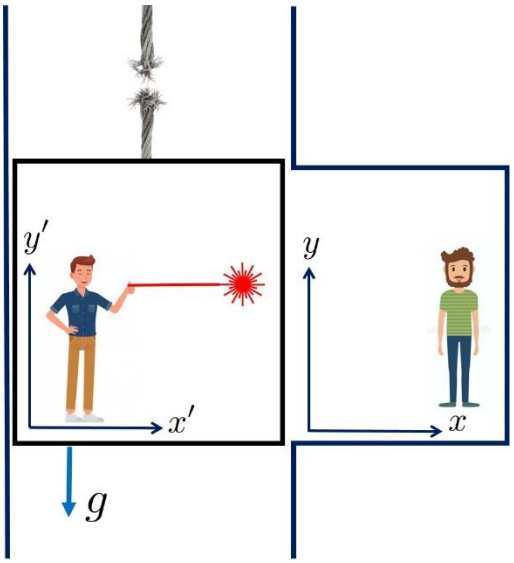
$$v_c = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\oplus}}$$

$$v_f \geq v_C \rightarrow \frac{mb}{R_\oplus}\sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\oplus}\frac{1}{\frac{b^2}{{R_\oplus}^2}-1}} - M_\oplus\sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\oplus}} \geqslant (m + M_\oplus)\sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\oplus}}$$

$$m \geq M_\oplus \frac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{\frac{2b^2}{{R_\oplus}^2}}{\frac{b^2}{{R_\oplus}^2}-1}}}$$

سؤال چهارم (100 نمره)

طبق نظریه نسبیت عام اینشتین می دانیم که در میدان گرانشی یک جسم، فقط ناظرهایی که آزادانه سقوط می کنند، مسیر نور را مستقیم می بینند. همانند شکل زیر دو دوست فیزیکدان یکی در آسانسور (علی) و دیگری در یکی از طبقات ساختمان (سامان) روبروی هم (در سکون) ایستاده اند. ناگهان در زمان $t = 0$ کابل آسانسور پاره می شود و آسانسور و علی سقوط آزاد می کنند (از اثرات اصطکاکی صرفنظر می کنیم). در این شرایط علی و سامان تصمیم می گیرند که آزمایشی انجام بدهند. علی یک باریکه لیزر را همزمان با پاره شدن کابل در $t = 0$ دقیقاً موازی کف آسانسور (محور x') ارسال می‌کند. طبق "اصل هم ارزی" علی می بیند که مسیر لیزر "همواره" (قبل از برخورد به دیواره) یک خط مستقیم و موازی کف آسانسور است.



کوتاه پاسخ **الف)** معادله حرکت پرتو لیزر را نسبت به مختصات $(x'.y')$ بنویسید. (10 نمره)

کوتاه پاسخ **ب)** معادله حرکت آسانسور را در مختصات سامان $(x.y)$ بنویسید. (10 نمره)

ج) معادله مسیر پرتو لیزر را در مختصات سامان به صورت $y(x)$ بنویسید؟ (20 نمره)

د) شعاع انحنای نقطه‌ای، R یک منحنی به معادله $y(x)$ از رابطه $\frac{1}{R} = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|$ به دست می آید که در آن پرایم به معنی مشتق گیری و دو پرایم به معنی مشتق دوم است. با استفاده از این رابطه شعاع انحنای مسیر حرکت باریک لیزر را از دید سامان دقیقاً در لحظه ساطع شدن آن بیابید. مبدا دستگاه ها را به طرز مناسب انتخاب کنید تا محاسبات راحت شود. (30 نمره)

ه) این شعاع را برای میدان گرانشی در سطح زمین حساب کنید. (10 نمره)

و) حال فرض کنید که یک باریکه نور در اطراف یک جسم بسیار چگال در حرکت است طوری که شعاع انحنای حرکت این باریکه با شعاع جسم برابر است. رابطه جرم و شعاع این جسم را بیابید. این جسم چه موجود فیزیکی می تواند باشد؟(20 نمره)

پاسخنامه مسئله 4 :

الف : اگر سرعت نور در هوا را تقریباً برابر با سرعت نور در خلاء در نظر بگیریم

با انتخاب مبدأ در نقطه ارسال پرتوها داریم : $\begin{cases} x' = ct \\ y' = 0 \end{cases}$

همچنین در تقریب سرعت های کم $t = t'$

ب : $$y = -\frac{1}{2}\, gt^2$$

ج : $$\begin{cases} x = x' = ct \\ y = y' - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow y = 0 - \frac{gx^2}{2c^2} \rightarrow y(x) = -\frac{gx^2}{2c^2}$$

د :

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$y'(x) = \frac{-gx}{c^2} \quad , \quad y''(x) = -\frac{g}{c^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R} = \frac{-\frac{g}{c^2}}{\left(1 + \frac{g^2x^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{1}{R}\Big|_{x=0} = +\frac{g}{c^2}$$

ه : $$\begin{cases} g \cong 10\, {}^{m}/_{s^2} \\ c \cong 3 \times 10^8\, {}^{m}/_{s} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{R} \cong \frac{+10\, {}^{m}/_{s^2}}{9 \times 10^{16}\ {}^{m^2}/_{s^2}} \rightarrow R \cong 9 \times 10^{15}\, m$$

البته این فاصله را می توان به پارسک نیز باز نویسی کرد که $R \cong \frac{1}{3}pc$ خواهد بود.

و : $$g(R) = ? \;//\; g(R) = \frac{GM}{R^2}$$

اگر $R \equiv R_{sch.} \equiv \frac{GM}{C^2}$ و در نتیجه این جسم یک سیاهچاله است. $\frac{g(R)}{C^2} = \frac{1}{R} \rightarrow \frac{GM}{C^2R^2} = \frac{1}{R} \rightarrow R = \frac{1}{2}R_{sch.}$

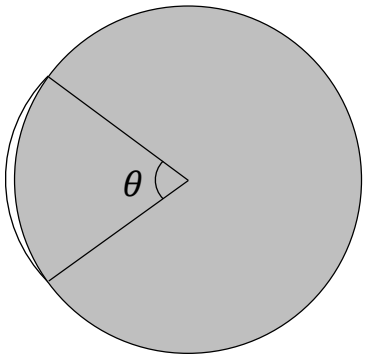
سؤال پنجم (160 نمره)

در دهه 30 میلادی آندره دانژون (André Danjon)، منجم فرانسوی حداقل جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید، برای مشاهد پذیر شدن هلال‌های جوان پس از مقارنه ماه و خورشید را 7° تعیین کرد. علت این امر ممانعتِ عوارض سطحی (مانند کوه ها و پستی و بلندی های لبه ماه) از تابش هلال نازک بخاطر جلوگیری از عبور نورشان است. این جدایی زاویه ای **حدّ دانژون** نام گرفت. مدت ها رصدی حتی به کمک ابزارهای قدرتمند در جدایی زاویه ای کمتر از این مقدار ثبت نشد و این حد مورد قبول بود. با این حال رصد در پرتوهای فروسرخ نشان می دهد در زوایای کمتر از حد دانژون نیز هلال تشکیل خواهد شد؛ زیرا در طول موج های بلندتر پراکندگی در جو کمتر و درصد عبور نور بیشتر است.

کوتاه پاسخ **الف)** لبه ماه را صاف و کروی شکل در نظر بگیرید. با توجه به حد تفکیک چشمانِ تیزبین (یک دقیقه قوس) کمترین جدایی زاویه‌ای بین ماه و خورشید برای تفکیکِ ضخامت هلال با چشم غیر مسلح چند درجه خواهد بود؟ (60 نمره)

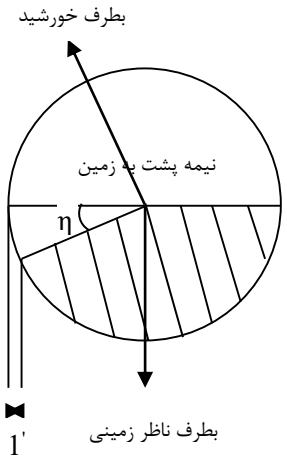
1) 10 2) 20 3) 15 4) 30

ب) تصویر زیر ماه را هنگامی که جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید 5.2 درجه است نشان می دهد. اگر در این هنگام گشودگی هلالِ روشن ماه (زاویه θ، طول کمان هلال از دید مرکز قرصِ ماه) در تصویر 70° باشد. بلندیِ ارتفاعات لبهٔ ماه را برحسب کیلومتر بدست آورید (دقت پاسخ 0.1 کیلومتر؛ 100 نمره).



پاسخنامه مسئله 5 :

الف : اگر حد تفکیک چشم انسان یک دقیقه قوسی باشد، بدون توجه به ارتفاعات لبه های ماه باید ضخامت مرکز هلال (که ضخیم ترین جای آن است) از روی زمین به همین مقدار برسد :

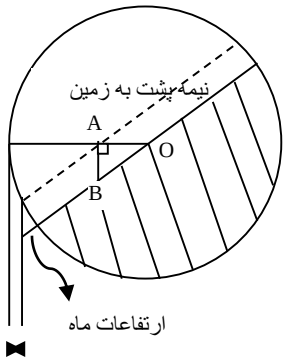


با توجه به تصویر روبرو جدایی زاویه ای زمین از خورشید از دید ماه، معادل با $180° - \eta$هست و چون زاویه به رأس خورشید را نیز می توان تقریباً صفر در نظر گرفت، در نتیجه زاویه θ جدایی زاویه ای ماه از خورشید از دید ناظر زمینی است.

$$\tan(1') = \frac{R_m - R_m \cos\eta}{d} \rightarrow \eta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{d\tan(1')}{R_m}\right) = 20.66°$$

این بخش راه دیگری نیز با استفاده از فاز ماه دارد، که حاصل آن گزینه (2) است.

ب : اما با در نظر گرفتن پستی و بلندی های لبه ماه، تصویری مانند روبرو خواهیم داشت که در آن زاویه هلال $\eta = 5/2°$ است.



خط چین در حقیقت لبه ای از ماه است که به سبب ارتفاعات خط هلال را مشخص می کنند، در نتیجه نقطه A نوک هلال است و مثلث ΔOAB نیز مثلث کروی است.

در این مثلث دو زاویه $O \equiv \eta$ و A و $OA = 55°$ را داریم؛ بنابراین :

$$\cos A \cos a = \sin A \cot O - \sin b \cot AB$$
$$\rightarrow \cos 55° \cos 90° = \sin 90° \cot 5.2° - \sin 55° \cot AB$$
$$\rightarrow \cot AB = \frac{\cot 5.2°}{\sin 55°} \rightarrow AB = 4.2634°$$

زاویه بدست آمده ارتفاعات لبه ماه از دید ناظر زمینی است، در نتیجه ارتفاع کوه ها مقدار زیر است :

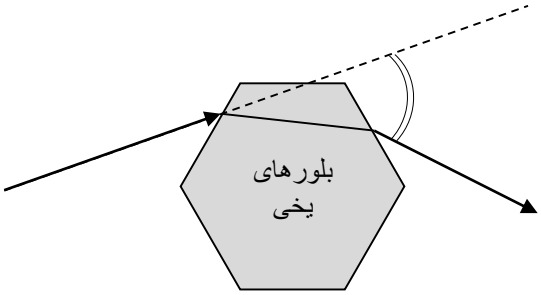
$$\cos 4.26° = \frac{R_m}{R_m + h} \rightarrow h = 4820\, m \equiv 4.8\, Km$$

بنابراین چون از هیچ کجای لبه های ماه در جدایی زاویه ای کمتر از زاویه بدست آمده یعنی 4.26° نوری عبور نمی کند تا به زمین برسد، حد جدید برای آستانه تشکیل هلال نازک در جدایی زاویه ایِ 4.2° تا 4.3° باید تعریف شود.

سؤال ششم (100 نمره)

در بعضی از روزها و شب های سرد، ابرهای سیروس و سیرواِستراتوس در ارتفاعات 5 تا 14 کیلومتری زمین تشکیل می شوند، در این مواقع گاهاً هاله ای به شعاع 22° در اطراف خورشید یا ماه در آسمان دیده می شود که در تصویر زیر مشخص است. (شکل 1)

شکل (1)



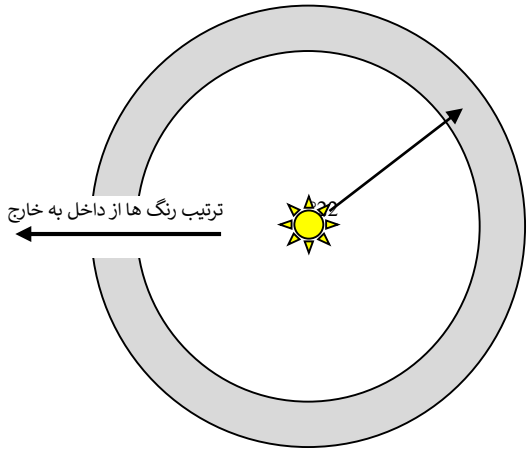
شکل (2)

این **هالهٔ 22 درجه‌ای** ناشی از شکست نور در بلورهای یخ آب است، که منشورهایی 6-ضلعیِ منتظم ایجاد کرده اند و مطابق با تصویر مسیر نور را عوض می کنند (شکل 2).

الف) زاویه انحراف نورهای خروجی نسبت به نورهای ورودی با توجه به زوایای مختلف تابش، در بازه‌ای تغییر می کند که می دانیم کمینه آن در اطراف 22° است و این امر سبب می شود که در این زاویه از قرص خورشید و یا ماه، شاهد پرتوهای رسیده بیشتری به ناظرانِ این پدیده جوی باشیم. ضریب شکست این بلورها چقدر است؟ راهنمایی : حداقل زاویه انحراف نور از یک منشور، زمانیست که زوایای ورودی و خروجی نور از سطوح یکسان باشند. (دقت 0.01 واحد؛ 70 نمره)

کوتاه پاسخ **ب)** اگر در شکل 3 بخش خاکستری رنگ نشان دهنده هاله نورانی باشد ترتیب رنگ ها از داخل به خارج چگونه است؟ (30 نمره)

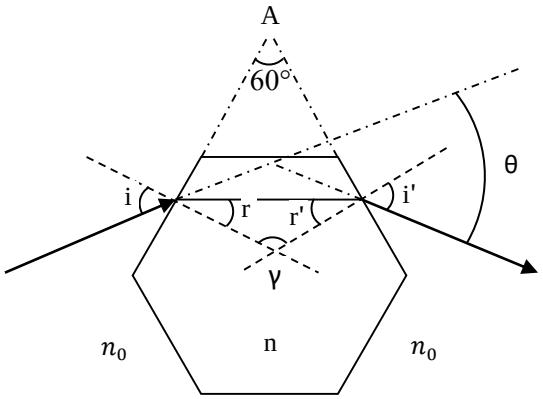
1) آبی – سبز - زرد - نارنجی - قرمز
2) قرمز- نارنجی - زرد – سبز - آبی
3) بسته به شرایط متغیر است
4) اصلا تجزیه نور نداریم



شکل 3

پاسخنامه مسئله 6 :

الف : با توجه به تصویر روبرو که در حالتِ کمترین زاویه انحراف رسم شده است و $\theta \equiv 22°$،
می دانیم زاویه ورود و خروج نور به بلورهای یخی یکسان است و در نتیجه $i = i'$ و البته که $r = r'$؛
بنابراین :



$$n_0 \sin i = n \sin r$$
$$\gamma = 180° - (r + r')$$
$$A + \gamma = 180° \rightarrow A = r + r' = 2r$$
$$\rightarrow r = 30°$$

$$\theta = (i - r) + (i' - r') \rightarrow \theta = 2i - 2r \equiv 22°$$
$$\rightarrow i = \frac{22° + 2r}{2} = \frac{82°}{2} = 41°$$

$$\rightarrow n = \frac{n_0 \sin i}{\sin r} = \frac{1 \times \sin 41°}{\sin 30°} = 1.3121$$

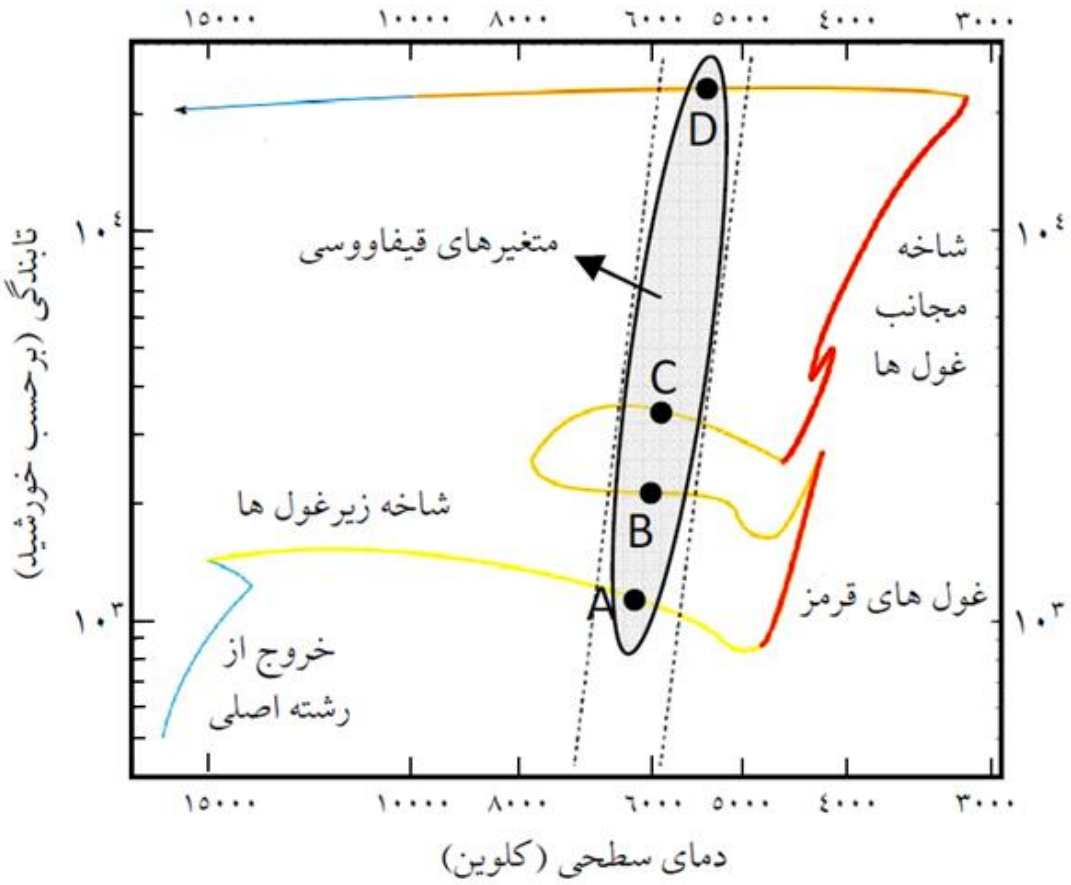
ب : می دانیم در هر یک از بلورهای یخی، در نهایت نورهای با طول موج کوتاه تر بیشتر می شکنند و مثلاً نورهای آبی بیشتر از قرمز خواهند شکست. در این شرایط از بلورهایی که به خورشید نزدیک ترند (جدایی زاویه ای کمتری نسبت به خورشید دارند) نورهایی که کمتر و به اندازه $(22 - \varepsilon)°$ منحرف شده اند به چشمانمان رسیده؛ اما بلورهایی که از خورشید دورترند (جدایی زاویه ای بیشتری نسبت به خورشید دارند) نورهایی که بیشتر و به اندازه $(22 + \varepsilon)°$ منحرف شده اند به چشمانمان خواهند رسید...
این عامل سبب می شود تا لایه‌های درونی این هاله $22°$ای قرمز، اما لایه‌های بیرونی آبی تر باشند و گزینه (2) درست است.

سؤال هفتم (160 نمره)

کهکشان کوتوله کرویِ UGC10822 در راستای صورت فلکی اژدها، از جمله اقمار کهکشانی راه شیری است که در سال 1954 میلادی توسط آلبرت جورج ویلسون کشف شد. اخیراً در این کهکشان یک ستاره متغیر با مسیر تحولی زیر بر روی نمودار HR، مشاهده شده است که به نظر می رسد در دسته‌بندی متغیرهای قیفاووسی قرار گیرد. اگر رابطهٔ "دوره تناوب-تابندگیِ متغیرهای قیفاووسی" برای متوسط قدر مطلقِ مرئی آنها به شکل زیر باشد

$$M_v = -2.43(\log_{10} P - 1) - 4.05$$

که در آن P دوره تناوب بر حسب روز و M_v متوسط قدر مطلق مرئی است. همچنین در رصدها مشخص شده است که نور این ستاره با دوره تناوب 6.03 روز تغییر می کند.

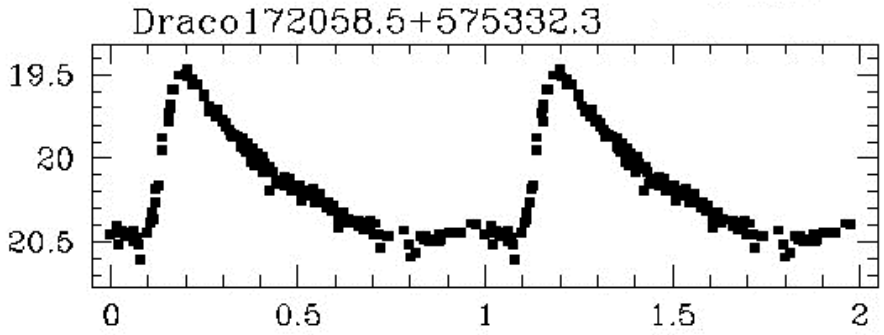


کوتاه پاسخ **الف)** مشخص کنید مکان این ستاره هم اکنون در کدامیک از نقاطِ داده شده روی مسیر تحولی بر روی این نمودار است. (20 نمره)

1) اطراف نقطه A 2) اطراف نقطه B 3) اطراف نقطه C 4) اطراف نقطه D

ب) شعاع این ستاره بطور متوسط چند برابر شعاع خورشید است؟ (دقت 5 واحد؛ 30 نمره)

ج) اگر نمودار تغییرات قدر ظاهری در فازهای مختلف برای این متغیر بصورت زیر باشد، با فرض اینکه این ستارگان در پرنورترین و کم نورترین حالت شعاعی یکسان دارند، نسبت دمای بیشینه روشنایی به دمای کمینه روشنایی را بدست آورید.(دقت 0.05 واحد؛ 40 نمره)



د) می دانیم در راستای مشاهده این کهکشانِ کوتوله (که در عرض کهکشانی $b=34/6^\circ$ قرار دارد)، به اِزاء هر یک کیلوپارسک فاصله، 0.05 قدر جذب داریم. مشخص کنید فاصله این کهکشان تا ما چند پارسک است؟ (دقت 1 کیلوپارسک؛ 70 نمره)

توجه: در این مسئله "تابندگی" معادل "درخشندگی مطلق" و معادل کل توان تابشی ستاره برحسب وات برمتر مربع است.

پاسخنامه مسئله 7 :

الف : با داشتن دوره تناوب این متغیر و رابطه دوره تناوب-درخشندگی برای آن ها، می توان متوسط قدر مطلق مرئی و سپس تابندگی ستاره را یافت : دقت شود که برای این ستاره، تابندگی در فیلتر مرئی را با تقریب خوبی همان درخشندگی مطلق در نظر گرفته ایم. (معادل با اینکه تصحیح تابش سنجی صفر است)

$$M_v = -2.43(\log_{10} 6.03 - 1) - 4.05 = -3.52$$

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5 \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \rightarrow L = 10^{-0.4(-3.52-4.83)}\, L_\odot = 2188\, L_\odot$$

که با توجه به محور لگاریتمیِ تابندگی روی نمودار، متناظر با نقطه B خواهد بود.

ب : حال اگر دمای خوانده شده برای این ستاره از روی نمودار 6000 کلوین باشد، شعاع ستاره برابر است با :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{2188 \times 3.85 \times 10^{26}}{4\pi \times 5.67 \times 10^{-8} \times 6000^4}}$$
$$= 3.02 \times 10^{10}\ m$$

که برابر با 43.4 برابر شعاع خورشید است.
دقت شود که چنانچه دانش آموزی با کمی خطا در قسمت (الف) گزینه های (1) یا (3) را درست گرفته باشد، محدوده دمایی را 6200 تا 5800 کلوین در نظر گرفته است و جواب قسمت (ب) را در محدوده 40.6 تا 46.4 برابر شعاع خورشید محاسبه کرده و بنابراین در محدوده خطای در نظر گرفته شده، نمره این بخش را خواهد گرفت.

ج : از روی منحنی نوری نیز مشخص است که تغییرات قدر ظاهری بطور متوسط از 19.5+ تا 20.5+ است، همچنین $R_{max} = R_{min} \equiv R$

$$m_{max} - m_{min} = -2.5 \log\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) = -2.5 \log\left(\frac{\frac{L_{max}}{4\pi d^2}}{\frac{L_{min}}{4\pi d^2}} = \frac{L_{max}}{L_{min}}\right)$$
$$= -2.5 \log\left(\frac{4\pi R^2 \sigma T_{max}^4}{4\pi R^2 \sigma T_{min}^4}\right)$$
$$\rightarrow 19.5 - 20.5 = -10 \log\left(\frac{T_{max}}{T_{min}}\right) \rightarrow \frac{T_{max}}{T_{min}} = 10^{0.1} = 1.26$$

دقت شود که چنانچه دانش آموزی با نهایت دقت مقادیر تغییرات قدر ظاهری را از 19.45+ تا 20.6+ در نظر گرفته باشد نیز نسبت دماها را 1.30 بدست خواهد آورد، که در محدوده خطای لحاظ شده خواهد بود.

د : در این بخش عرض کهکشانی ظاهراً داده ای اضافی است زیرا مستقیماً مقدار جذب در آن راستا داده شده است...

$$\bar{m} - \bar{M} = 5 \log d(pc) - 5 + A = 5 \log d(pc) - 5 + a\left(\frac{mag}{Kpc}\right) d(Kpc)$$

$$\rightarrow +20-(-3.52)=5\log d(pc)-5+0.05\times 10^{-3}d(pc)\rightarrow d=80059\,pc$$

دقت شود که چنانچه دانش آموزی با دقت گفته شده متوسط قدر ظاهری را 20.025+ نیز قرار داده باشد نیز فاصله را 80383 پارسک بدست خواهد آورد، که خطای اشاره شده برای نمره دهی بیشتر از آن است.