جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب ..... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب ..... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سیزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۶/۱/۳۱ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می‌شوند.

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

ثوابت نجومی و فیزیکی مورد نیاز

G	ثابت جهانی گرانش	$N\,m^2\,kg^{-2}$	۶٫۶۷×۱۰$^{-۱۱}$
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$W\,m^{-2}\,K^{-4}$	۵٫۶۷×۱۰$^{-۸}$
$a=4\sigma/c$	ثابت تابش	$J\,m^{-3}\,K^{-4}$	۷٫۵۶×۱۰$^{-۱۶}$
k_B	ثابت بولتزمن	$J\,K^{-1}$	۱٫۳۸×۱۰$^{-۲۳}$
h	ثابت پلانک	$J.s$	۶٫۶۳×۱۰$^{-۳۴}$
e	بار الکترون	C	۱٫۶۰×۱۰$^{-۱۹}$
m_e	جرم الکترون	kg	۹٫۱×۱۰$^{-۳۱}$
m_H	جرم اتم هیدروژن	kg	۱٫۶۷×۱۰$^{-۲۷}$
c	سرعت نور	m/s	۳٫۰۰×۱۰^{۸}
pc	پارسک	m	۳٫۰۹×۱۰^{۱۶}
$r_{earth-AU}$	واحد نجومی	m	۱٫۵۰×۱۰^{۱۱}
Ly	سال نوری	m	۹٫۴۶×۱۰^{۱۵}
R_{sun}	شعاع خورشید	m	۶٫۹۶×۱۰^{۸}
M_{sun}	جرم خورشید	kg	۱٫۹۹×۱۰^{۳۰}
R_{earth}	شعاع زمین	m	۶٫۳۸×۱۰^{۶}
ε	ضریب کارایی همجوشی هیدروژن		۰٫۰۰۷
$R_{solars\,sys}$	شعاع منظومه شمسی	AU	۵۰
R_{Gal}	شعاع کهکشان راه شیری	kpc	۱۵
R_{LMC}	فاصله‌ی ابر ماژلانی بزرگ	kpc	۵۰
R_{SMC}	فاصله‌ی ابر ماژلانی کوچک	kpc	۶۰
R_{AM-Gal}	فاصله‌ی کهکشان آندرومدا	kpc	۷۷۰
$r_{virgo-Clustr}$	فاصله‌ی خوشه کهکشانی سنبله	Mpc	۲۰
D_{cosmos}	ابعاد کیهان	Gpc	۴
T_{cosmos}	عمر عالم	Gyr	۱۳٫۶
H_0	ثابت هابل	$(km/s)/Mpc$	۶۸
f_{sun}	ثابت خورشیدی	Wm^{-2}	۱٫۳۷×۱۰^{۳}
L_{sun}	درخشندگی خورشید	W	۳٫۸۵×۱۰^{۲۶}
M_{sun}	قدر مطلق خورشید		۴٫۷۲
m_{sum}	قدر ظاهری خورشید		-۲۶٫۷
	زاویه تمایل محور دوران زمین	$Degree$	۲۳٫۴۵
m_{moon}	قدر ظاهری ماه بدر		۱۲/۷۴
λ,β_{INO}	مختصات جغرافیایی رصدخانه ملی ایران	$Degree$	33.67°N,51.32°E
$d_{\alpha Cen}$	اختلاف منظر پروکسیما قنطورس	mas	۷۶۸٫۷
A_{sun}	سن خورشید	Gyr	۴٫۵

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۱ یکی از روشهای فهم بهتر ابعاد و اعداد بزرگ مقیاس در نجوم و اخترفیزیک، نزدیک تر کردن مقیاسها به ابعاد و اندازه هایی است که معمولا در زندگی روزمره از آنها تجربه و حس بهتری داریم. بر این اساس می‌خواهیم مدلی ساده از جهان اطراف خودمان ایجاد کنیم که ابعاد و زمان‌های بزرگ مقیاس را بهتر درک کنیم. در این مدل فرض کنید که خورشید یک پرتقال درشت به قطر ۱۴ سانتیمتر باشد. در این صورت فواصل و واحدهای آنها را بیان کنید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید).

انتخاب بهترین واحد در ستون واحدها نمره خواهد داشت.

از بقایای بدست آمده از انسان‌های نخستین دیده می‌شود که تقریبا آنها حدود ۲ میلیون سال قبل روی کره زمین می‌زیسته اند. اگر عمر عالم را یک روز ۲۴ ساعته تصور کنیم، موارد زیر را محاسبه کنید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

جرم		واحد
قطر خورشید	۱۴	سانتیمتر
قطر زمین		
فاصله زمین تا خورشید		
فاصله نزدیکترین ستاره به خورشید		
قد یک انسان		
قطر منظومه شمسی		
قطر کهکشان راه شیری		
فاصله ابر ماژلانی کوچک		
فاصله ابر ماژلانی بزرگ		
فاصله کهکشان آندرومدا		
فاصله خوشه کهکشانی سنبله		
ابعاد کیهان		

سوال ۱ جدول ۱

بازه زمانی		واحد
سن عالم	۲۴	ساعت
عمر خورشید		
سن خورشید		
پیشینه انسان بر روی زمین		
زمانی که تاریخ نگاشته شده است (تقریبا ۴۰۰۰ سال)		
عمر یک انسان نوعی روی سطح زمین		
یک سال		

سوال ۱ جدول ۲

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۲ محاسبه ساعت خورشیدی به همین سادگی است که شما در این سوال می‌بینید. فقط باید این محاسبات را برای طول سال انجام دهید و آن را روی یک صفحه ترسیم کنید تا صفحه‌ی اصلی ساعت آفتابی شما تولید شود.

آخرین عبور خورشید از نقطه اعتدال بهاری ساعت ۱۳:۵۷:۴۰ روز ۳۰ اسفند سال ۱۳۹۵ به وقت ایران بوده است. از بیضی بودن مدار زمین به دور خورشید صرف نظر کنید. البته اگر بخواهید که ساعت دقیقتری داشته باشید لازم است اثرات بیضی بودن مدار زمین را در نظر بگیرید. زوایای خواسته شده را با دقت ۱۵ دقیقه قوس گزارش کنید.

از دید ناظری در محل رصدخانه ملی ایران و در لحظه شروع آزمون المپیاد نجوم و اخترفیزیک، موارد زیر را محاسبه کنید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۴۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

الف)	بعد خورشید	
ب)	میل خورشید	
ج)	زاویه ساعتی خورشید	
د)	ارتفاع خورشید	
ه)	سمت خورشید	
و)	طول سایه یک میله یک متری در محل	

سوال ۲ جدول ۱

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۳- این سوال برای تخمین سهم نوترینوهای ستاره‌ای در تابش زمینه نوترینوی کیهانی است.

نوترینوهای خورشیدی طی چند فرآیند غالب زیر تولید می‌شوند. در جدول زیر انرژی و سهم هر فرآیند بر حسب درصد بیان شده است:

فرآیند	انرژی نوترینو (keV)	سهم (درصد)	
p-p	۴۰۰	۹۲,۴	$P+P \rightarrow D+e^{+}+\nu_e$
Li	۹۰۰	۷,۴	$Be+e^{-} \rightarrow Li+\nu_e$
p-e-p	۱۷۰۰	۰,۲	$P+e^{-}+P \rightarrow D+\nu_e$
Be	۱۸۰۰۰	۸×۱۰^{-۳}	$B \rightarrow Be+e^{+}+\nu_e$

واکنشهای تولید هلیوم در فرآیند اول به شرح زیر است:

$P+P \rightarrow D+e^{+}+\nu_e$
$P+D \rightarrow {}^{۳}He+\gamma$
${}^{۳}He+{}^{۳}He \rightarrow {}^{۴}He+۲P$

الف) انرژی متوسط نوترینوهای خورشیدی را محاسبه کنید.

ب) درخشندگی نوترینویی خورشید را بر حسب درخشندگی خورشید بدست آورید.

ج) فرض کنید همه کهکشان‌های عالم مشابه بوده و از ستاره‌های خورشیدگون مشابه تشکیل شده باشند. درخشندگی کهکشان راه شیری $۱۰^{۱۱}$ برابر درخشندگی خورشید بوده و در کل عالم نیز تقریبا $۱۰^{۱۱}$ کهکشان تخمین زده می‌شود. تخمین بزنید در هر سانتیمتر مکعب از کیهان چند نوترینو ستاره‌ای وجود خواهد داشت؟

د) در این صورت آیا نوترینوی ستاره‌ای می‌تواند کاندیدای خوبی برای ماده تاریک باشد؟ چرا؟ (چگالی ماده تاریک $۶\times۱۰^{-۲۸}\ kg/cm^{۳}$)

لطفا پاسخ‌های نهایی خود را در جدول زیر بنویسید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۳۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

الف)	
ب)	
ج)	
د)	

سوال ۳ جدول ۱

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۴ رصدخانه ملی ایران (INO) اولین نور خود را در انتهای سال ۱۴۰۰ دریافت خواهد کرد. اطلاعات کاملی از این رصدخانه در اینترنت موجود است (ino.org.ir) که برخی از آنها در اینجا آورده شده است. آینه اصلی آن وزن ۴ تن، ضخامت شیشه ۱۸ سانتیمتر و از نوع شیشه زرودور (Zerudor) و با ضریب انبساط حرارتی $۱۰^{-۷}$ بر درجه سلسیوس، نسبت کانونی F/1.5، دقت صافی سطح حدود ۲ نانومتر و قطر ۳,۴ متر دارد. یک روزنه ۷۰۰ میلیمتری در مرکز آینه اصلی برای عبور نور تعبیه شده است. قطر آینه ثانویه آن نیز ۶۰۰ میلیمتر است. این تلسکوپ از نوع ریچی-کرتین بوده و هر دو آینه اصلی و ثانویه آن هذلولوی هستند. این تلسکوپ در قله گرکش در نزدیکی شهر کاشان و در ارتفاع ۳۶۰۰ متری از سطح دریا قرار می‌گیرد. دید نجومی آن در بهترین حالت به حدود ۰,۱ تا ۰,۲ ثانیه قوسی می‌رسد.

الف) فاصله کانونی آینه اصلی این تلسکوپ چند متر است؟

ب) با اختلاف دمای حدود ۱۵ درجه بین شب و روز مقدار تغییر ضخامت آینه حدودا چه ضریبی از طول موج نور مرئی خواهد شد؟ (راهنمایی: نور مرئی در بازه‌ی ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است)

ج) توان تفکیک ناشی از پراش این تلسکوپ چند میلی ثانیه قوس (mas) است؟

د) نسبت کانونی (F number) نهایی این تلسکوپ F/11 است. مقیاس صفحه آن (plate scale) چقدر است؟ ($d\Theta/dl$)

ه) برای پوشش میدان دید ۲۰ دقیقه قوس، ابعاد CCD مورد استفاده باید چند سانتیمتر باشد؟

و) حد قدری این تلسکوپ چقدر است؟ (حد قدری چشم انسان با قطر مردمک ۶ میلیمتر، ۶ است.)

ز) اگر این تلسکوپ بخواهد برای ثبت ستاره کم فروغی، این ستاره را بمدت ۱ ساعت دنبال کند بطوری که یک بازه‌ی زاویه‌ای ۰,۱ ثانیه قوسی، همواره روی یک پیکسل بیوفتد، دقت سرعت زاویه‌ای موتور تلسکوپ بر حسب میلی ثانیه قوسی بر ثانیه (mas/sec) چقدر باید باشد؟ (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۴۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

الف)	
ب)	
ج)	
د)	
ه)	
و)	
ز)	

سوال ۴ جدول ۱

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۵ برای سادگی فرض کنید که مدارهای زمین و مریخ دایره بوده و روی یک صفحه قرار دارند. می‌خواهیم یک مریخ نورد را با صرف کمترین انرژی از سطح زمین به مریخ پرتاب کنیم. فرض می‌کنیم که مقدار تغییر سرعت‌ها در زمان‌های بسیار کوتاهی نسبت به زمان کل انتقال، صورت می‌گیرد (که معمولا و در عمل نیز این فرض خوبی است).

ابتدا تمامی پاسخ‌ها را به صورت پارامتری بدست آورده و سپس مقادیر عددی آنها را محاسبه کنید و در جدول پاسخ‌ها بنویسید. (شعاع مداری مریخ ۱,۵۲ AU است)

الف) شکل مدار مورد نظر خود را ترسیم کنید.

ب) کمترین مقدار افزایش سرعتی را که لازم است به مریخ نورد داده شود تا بتواند به مدار مریخ برسد بدست آورید؟

ج) مقدار افزایش یا کاهش سرعتی که مریخ نورد در هنگام رسیدن به مدار مریخ لازم دارد تا اعمال کند، تا در مدار مریخ قرار گیرد را محاسبه کنید. **کاهش یا افزایش** را حتما ذکر کنید.

د) زاویه زمین-خورشید-مریخ در لحظه پرتاب مریخ نورد را محاسبه کرده بطوری که مریخ نورد به محض قرارگیری در مدار مریخ بتواند بر سطح مریخ فرود آید. کدامیک باید جلوتر باشند؟ **زمین یا مریخ؟**

ه) آخرین مقابله مریخ و خورشید ۲ خرداد ۱۳۹۵ ساعت ۱۵:۳۰ به وقت تهران بود. محاسبه کنید که نزدیکترین زمانی که برای پرتاب یک مریخ نورد مناسب است کی خواهد بود؟ (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید) (۵۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

الف)

سوال ۵ جدول ۱

	پاسخ به صورت پارامتری	پاسخ عددی
ب)		
ج)		
د)		
ه)		

سوال ۵ جدول ۲

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۶- فرض کنید کیهان تخت است و چگالی متوسط آن برابر است با $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. فرض کنید ۲۶ درصد از جرم کیهان از ماده‌ی تاریک تشکیل شده است. هنوز دقیقا مشخص نیست که ماده‌ی تاریک از چه ذراتی تشکیل شده است. برخی از دانشمندان بر این باورند که نوترینوهای باقی مانده از انفجار بزرگ می توانند کاندید مناسبی برای ماده‌ی تاریک باشند. ۶ نوع نوترینو با جرمهای متفاوت در عالم وجود دارند (γ_1 ، γ_2 ، ....، γ_6). این نوترینوها در حال حاضر بسیار سرد هستند یعنی انرژی جنبشی‌شان در مقابل انرژی جرم سکون-شان ناچیز است. چگالی عددی هر کدام از این نوترینوها $\frac{3}{11}$ چگالی عددی فوتون‌های تابش زمینه کیهانی است ($n_{\gamma_i} = \frac{3}{11} n_p$) که در آن $n_p = 410\ cm^{-3}$. با فرض اینکه نوترینوها تنها مولفه‌ی تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی تاریک در کیهان باشند، مجموع جرم ۶ نوع نوترینو، $m_0 = \sum_{i=1}^{6} m_{\gamma_i}$ را برحسب واحد الکترون ولت بر مربع سرعت نور (eV/c^2) به دست آورید. این مقدار m_0 در واقع یک حد بالا برای جرم نوترینوها محسوب می‌شود که بر اساس اطلاعات کیهانشناسی حاصل شده است. (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۷ فرض کنید در یک کهکشان نرخ تشکیل ستاره‌ای با زمان به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$S(t)= S(0)\ \exp(-t/t_*)$$

به طوری که $S(0)=1\ M_{sun}/yr$ و $t_*=3Gyr$ مقادیر ثابتی هستند. برای سادگی فرض کنید که فقط ۱۰ نوع ستاره با جرم‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰ جرم خورشید تولید می شوند و تابع توزیع جرمی ستاره‌های تولید شده با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\frac{dN(M)}{dM} = kM^{-3}$$

که در آن k مقدار ثابتی است.

الف) اگر فرض کنیم اولین دوره ستاره زایی در مدت ۱۰ میلیون سال اتفاق افتاده باشد و مجموعا در این مرحله ۱ میلیون ستاره تولید شده باشد مقدار ثابت k را بدست آورید.

ب) پس از اولین دوره‌ی ستاره زایی، تعداد ستاره‌های تولید شده از هر جرم را بدست آورده و در یک جدول ۱۰ سطری نمایش دهید و نمودار تابع توزیع جرمی (یعنی محور افقی جرم ستاره و محور عمودی تعداد ستارگان) را رسم کنید. (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید).

ج) در زمان $t=10\ Gyr$ تابع جرم ستاره‌هایی که روی رشته‌ی اصلی قرار دارند را مجددا پس از محاسبه در جدول جدیدی وارد کرده و نمودار تابع جرم را رسم کنید. (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید).

راهنمایی: رابطه ی جرم- طول عمر رشته‌ی اصلی ستارگان را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$T = 10\ Gyr(M/M_{sun})^{-2}$$

(۶۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

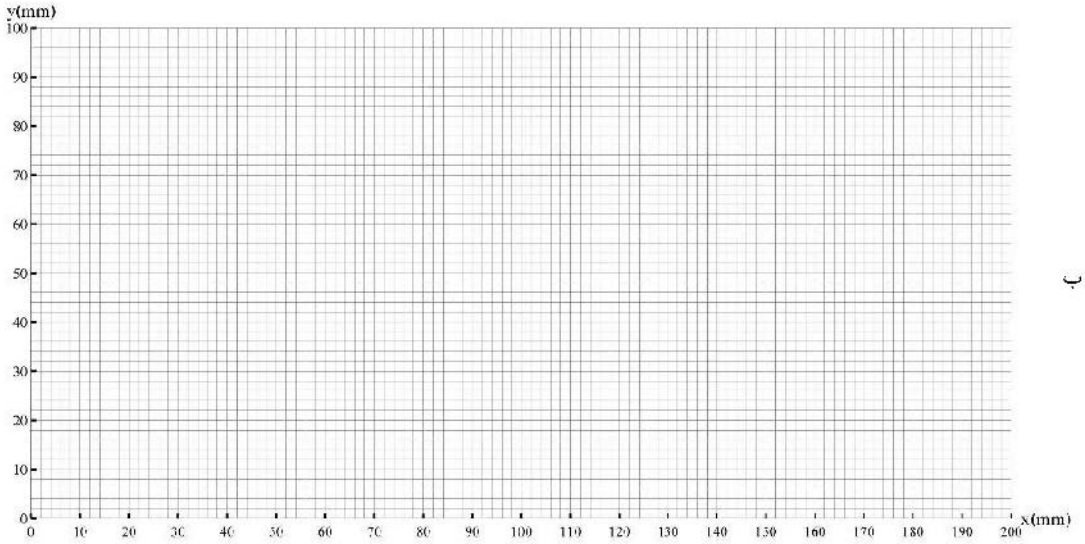
نام:

نام خانوادگی:

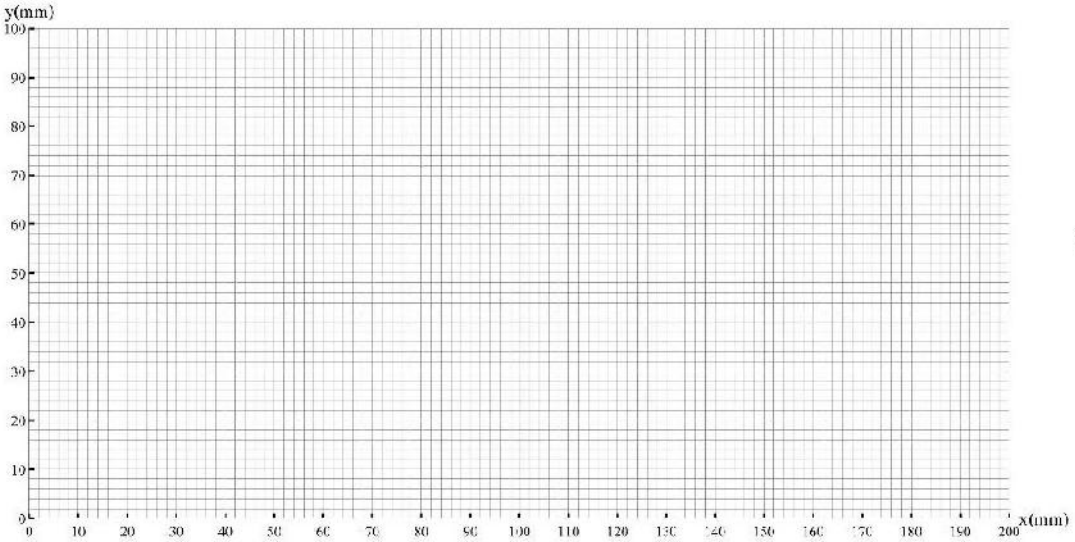
کد ملی:

تعداد ستاره	جرم ستاره
سوال ۷ قسمت ب	

تعداد ستاره	جرم ستاره
سوال ۷ قسمت ج	



سوال ۷ قسمت ب



سوال ۷ قسمت ج

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۸ انفجار ابرنواختر SN1006 برای اولین بار توسط منجم مسلمان علی‌ابن رضوان در تابستان سال ۱۰۰۶ میلادی به شرح زیر گزارش شده است: "جرمی نورانی است به شکل دایره‌ای به بزرگی ۲٫۵ تا ۳ برابر سیاره زهره که اسمان را به خوبی روشن کرده است. شدت نور آن نزدیک به یک چهارم شدت نور ماه کامل است". همزمان راهبان مسیحی در سنت گالین نیز منحنی نوری این انفجار را به طور تقریبی ثبت کرده‌اند. بر اساس داده‌های آنها به نظر می رسد که این انفجار از نوع ابرنواختر نوع Ia بوده است. ابرنواختر نوع Ia در یک سیستم دوتایی که یکی از مولفه‌های آن کوتوله سفید باشد رخ می‌دهد. وقتی جرم مولفه‌ی کوتوله‌ی سفید به یک حد خاص معروف به حد چاندراسخار می‌رسد انفجار رخ می‌دهد. به دلیل یکسان بودن این شرط حدی برای شروع انفجار، تمام ابرنواخترهای نوع Ia در بیشینه‌ی روشنایی خود به قدر مطلق یکسانی می رسند که مقدار آن در فیلتر نور مریی برابر است با $M_V = -19.5 \pm 0.4$. در دو دهه‌ی گذشته رصدهای متعددی از بقایای این ابرنواختر انجام شده است. با مقایسه‌ی تصاویر دیده شده در سال‌های متوالی مشخص شده است که پوش کروی تولید شده از بقایای این انفجار با سرعت $\alpha = 0.280 \pm 0.008\ miliarcsec.yr^{-1}$ در حال انبساط است. همچنین با اندازه‌گیری انتقال دوپلری خطوط طیفی، سرعت شعاعی پوش در حال انبساط نیز برابر با $V_r = 2900 \pm 100\ km/s$ اندازه گیری شده است. نهایتا از قرمزشدگی طیف ستاره‌های همسایه، مقدار جذب میان ستاره‌ای در راستای دید SN1006 برابر $A_V = 0.31 \pm 0.10$ اندازه گیری شده است.

الف) فاصله‌ی ما از SN1006، و نیز خطای مربوطه را بر حسب پارسک به دست آورید (d , Δd).

ب) با فرض اینکه فاصله‌ی SN1006 تا ما در زمان انفجار نیز تقریبا همان d بوده، قدر ظاهری (mv) در بیشینه‌ی درخشندگی را به همراه خطای مربوطه بدست آورید.

ج) مقدار قدر ظاهری محاسبه شده را با مشاهده‌ی علی‌ابن رضوان مقایسه کنید. (۴۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۹ فوتونی با بسامد f دارای جرم لختی موثر m است (جرم گرانشی فوتون از انرژی آن استخراج می‌شود). بنابراین فوتونی که از سطح یک ستاره گسیل می شود، هنگام فرار از میدان گرانشی ستاره، مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد.

الف) انتقال نسبی بسامد $\frac{\Delta f}{f}$ یک فوتون هنگام فرار از سطح یک ستاره به بینهایت را برحسب جرم و شعاع ستاره به دست آورید. فرض کنید $\frac{\Delta f}{f} \ll 1$.

ب) برای اندازه گیری شعاع ستاره‌ها در کهکشان راه شیری، یک فضا پیمای بدون سرنشین به فضا پرتاب شده است. از آنالیز طیف دو ستاره‌ی مختلف (ستاره های ۱ و ۲) انتقال به سرخ $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 2\times10^{-6}$ و $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 10^{-5}$ برای یکی از خطوط جذبی مشخص این ستاره‌ها اندازه گیری شده است. با فرض اینکه رابطه‌ی جرم– شعاع ستاره‌های رشته اصلی به صورت $R \propto M^{0.6}$ باشد، نسبت شعاع ستاره ۲ به شعاع ستاره ۱ را به دست آورید. فرض کنید هر دو ستاره بر روی رشته‌ی اصلی قرار دارند. (۳۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۱۰ فرض کنید ستاره‌های رشته‌ی اصلی در تعادل ویریالی باشند، یعنی دو برابر مجموع انرژی جنبشی ذرات برابر است با اندازه انرژی پتانسیل گرانشی. همچنین فرض کنید جرم و درخشندگی ستاره‌ها به صورت $L \propto M^{\alpha}$ به هم مرتبط است. انرژی هسته‌ای تولید شده در ستاره‌ها نیز با رابطه‌ی $\varepsilon_n \propto \rho_c T_c^{\beta}$ داده می‌شود که در آن ρ_c و T_c به ترتیب چگالی و دمای مرکزی ستاره هستند.

الف) با توجه به اینکه چگالی مرکزی ستاره به صورت $\rho_c \propto M^{\psi}$ با جرم ستاره متناسب است مقدار ثابت ψ را بر حسب ثابت های α و β به دست آورید.

ب) با توجه به اینکه مقدار α همواره کمتر از ۵ است تعیین کنید به ازای چه مقادیری از β چگالی با جرم متناسب است (یعنی ψ مثبت است). (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

پاسخ سؤال ۱

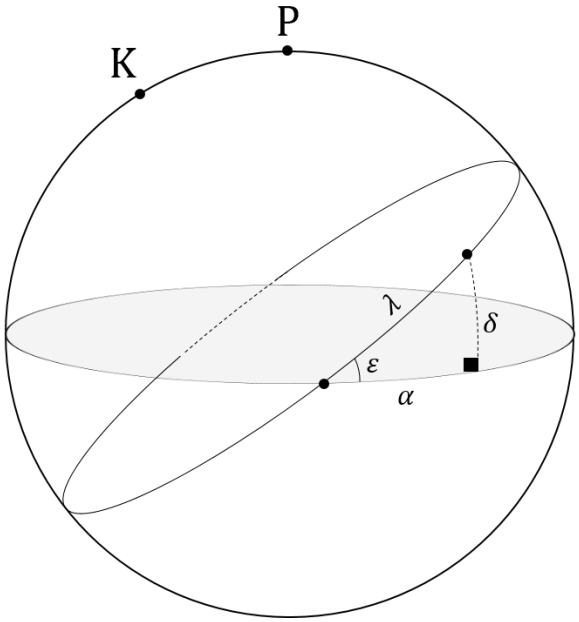
با استفاده از مقادیر داده شده در جدول ثوابت و نسبت و تناسب، جدول‌ها را تکمیل می‌کنیم. قدّ و عمر انسان به ترتیب ۱۷۰ سانتی‌متر و ۷۰ سال و عمر خورشید ۱۰ میلیارد سال در نظر گرفته شده است. فاصله‌ی پروکسیما قنطورس نیز از اختلاف منظر آن به دست می‌آید.

طول		واحد
قطر خورشید	۱۴	سانتی‌متر
قطر زمین	۱/۳	میلی‌متر
فاصله‌ی زمین تا خورشید	۱۵/۰	متر
فاصله‌ی نزدیک‌ترین ستاره به خورشید	۴۰۰۰	کیلومتر
	۰/۶	شعاع زمین
قدّ یک انسان	۱/۷	آنگستروم
قطر منظومه‌ی شمسی	۱/۵	کیلومتر
قطر کهکشان راه شیری	۰/۶	واحد نجومی
فاصله‌ی ابر ماژلانی کوچک	۱/۲	واحد نجومی
فاصله‌ی ابر ماژلانی بزرگ	۱/۰	واحد نجومی
فاصله‌ی کهکشان آندرومدا	۱۶/۰	واحد نجومی
فاصله‌ی خوشه‌ی کهکشانی سنبله	۴۱۰	واحد نجومی
	۸/۳	شعاع منظومه‌ی شمسی
ابعاد کیهان	۰/۴	پارسک

بازه‌ی زمانی		واحد
سنّ عالم	۲۴	ساعت
عمر خورشید	۱۷/۶	ساعت
سنّ خورشید	۷/۹	ساعت
پیشینه‌ی انسان بر روی زمین	۱۲/۷	ثانیه
زمانی که تاریخ نگاشته شده است	۲۵/۴	میلی‌ثانیه
عمر یک انسان نوعی روی زمین	۰/۴	میلی‌ثانیه
یک سال	۶/۳	میکروثانیه

پاسخ سؤال ۲

لحظه‌ی شروع آزمون، ساعت ۱۴:۰۰ روز ۳۱ فروردین است. مختصات جغرافیایی رصدخانه‌ی ملّی در جدول ثوابت آمده است. ابتدا بعد و میل خورشید را محاسبه می‌کنیم.



$$\sin\delta = \sin\lambda \sin\varepsilon \quad , \quad \tan\alpha = \tan\lambda \cos\varepsilon \quad , \quad \lambda = \frac{360^\circ}{365.25 \text{ روز}} \times \Delta t$$

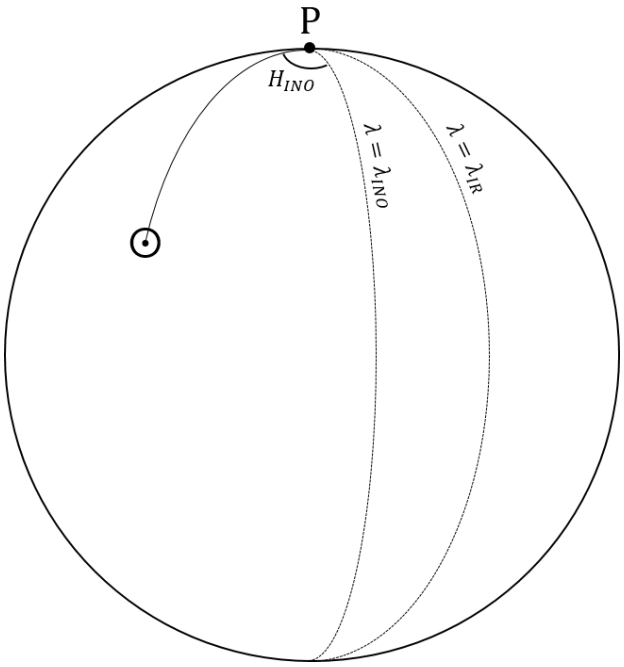
با در نظر گرفتن این که روز اوّل فروردین، زمان یک ساعت به جلو کشیده می‌شود (ساعت تابستانه)

$$\Delta t = 30 \text{ روز} + 23^h\ 2^m\ 20^s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 11^\circ\ 39' \quad , \quad \alpha = 28^\circ\ 24'}$$

طبق تعریف زمان منطقه‌ای، زاویه ساعتی خورشید میانگین به دست می‌آید.

$$\text{زمان تابستانه‌ی ایران} = HAMS_{IR} + 13^h \Rightarrow HAMS_{IR} = 1^h$$

برای محاسبه‌ی زاویه ساعتی خورشید، ابتدا زاویه ساعتی خورشید میانگین از دید رصدخانه‌ی ملّی را به دست می‌آوریم. زیروند INO مربوط به رصدخانه‌ی ملّی و زیروند IR مربوط به نصف النّهار مرجع زمانی ایران ($GMT + 3^h30^m$) است.



$$HAMS_{INO} - HAMS_{IR} = \lambda_{INO} - \lambda_{IR} \quad , \quad \lambda_{IR} = 3^h\ 30^m = 52.5°$$
$$\Rightarrow HAMS_{INO} = 55^m\ 17^s$$

طبق تعریف تعدیل زمان

$$ET = H - HAMS$$

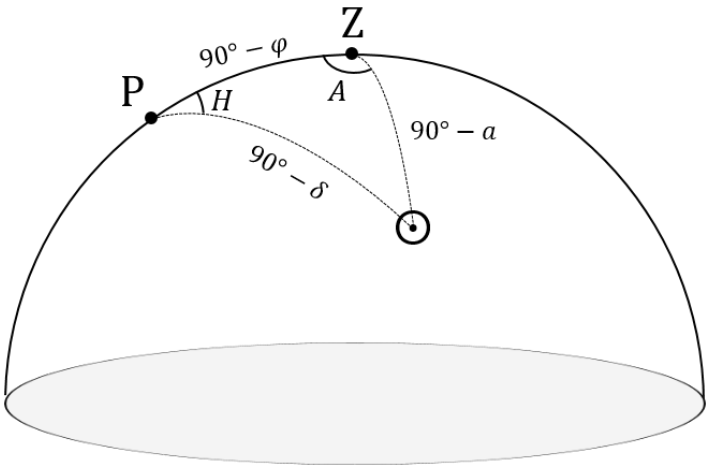
در نتیجه با داشتن تعدیل زمان و جمع کردن آن با $HAMS$، زاویه ساعتی خورشید به دست می‌آید. با توجّه به این که $LST = H + \alpha$ است، می‌توان گفت

$$ET = RAMS - \alpha$$

α بعد خورشید و $RAMS$ بعد خورشید میانگین است.

$$RAMS = \lambda \Rightarrow ET = \lambda - \alpha = 8^m\ 27^s$$
$$H_{INO} = ET + HAMS_{INO} \Rightarrow \boxed{H_{INO} = 1^h\ 04^m}$$

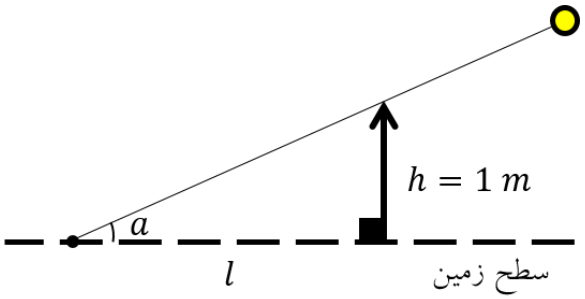
با داشتن زاویه ساعتی، میل و عرض جغرافیایی می‌توانیم سمت و ارتفاع خورشید را تعیین کنیم.



$$\sin a = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H \quad , \quad \cos A = \frac{\sin\delta - \sin a \sin\varphi}{\cos a \cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 63° 37' \quad , \quad A = 217° 13'}$$

طول سایه‌ی میله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید



$$\tan a = \frac{h}{l} \Rightarrow l = h \cot a \Rightarrow \boxed{l = 49\ cm}$$

پاسخ سؤال ۳

الف) اگر سهم هر فرایند را با k نشان دهیم، انرژی متوسّط نوترینو از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

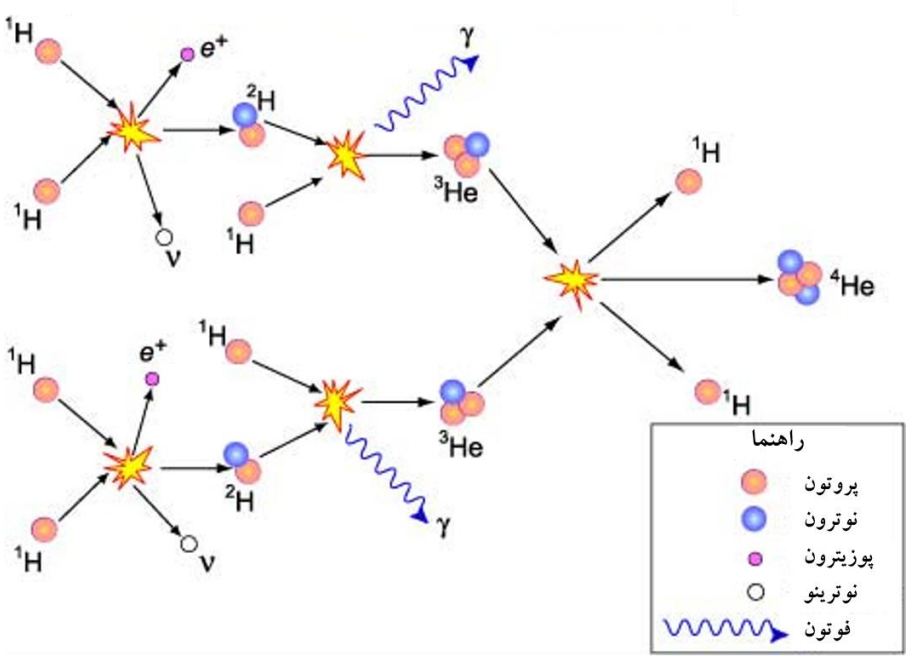
$$\langle E_\nu \rangle = \frac{\sum_i k_i E_i}{\sum_i k_i} \Rightarrow \boxed{\langle E_\nu \rangle = 441.04\ keV}$$

ب) انرژی تولید شده در هر فرایند تولید هلیوم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$E = \varepsilon \times 4 m_H c^2 = 26.30\ MeV$$

ε ضریب کارایی هم‌جوشی هیدروژن و m_H جرم اتم هیدروژن است. با توجّه به این که عمده‌ی درخشندگی خورشید از این فرایند تأمین می‌شود، با تقسیم درخشندگی خورشید (L) بر انرژی یک فرایند، آهنگ انجام فرایند هم‌جوشی از طریق فرایند $p-p$ به دست می‌آید.

$$\dot{N} = \frac{L}{E}$$



در هر فرایند $p-p$ دو نوترینو تولید می‌شود ($\dot{N}_{\nu,pp} = 2\dot{N}$). در نتیجه آهنگ کلّی تولید نوترینوها چنین به دست می‌آید

$$\dot{N}_\nu = \frac{\dot{N}_{\nu,pp}}{k_{pp}} = \frac{2\dot{N}}{k_{pp}}$$

حاصل ضرب کردن این آهنگ در انرژی متوسّط نوترینو، برابر با درخشندگی نوترینویی است

$$L_\nu = \langle E_\nu \rangle \times \dot{N}_\nu = \frac{2}{k_{pp}} \frac{\langle E_\nu \rangle}{E} L \Rightarrow \boxed{L_\nu = 0.036L}$$

ج) طبق فرض‌های سؤال، درخشندگی ستارگان عالم L ۱۰^{۲۲} است. اگر فرض کنیم ستاره‌ها از ابتدای شکل‌گیری عالم تا به حال (۱۳/۶ میلیارد سال) تابش کرده‌اند، تعداد کلّ نوترینوهای ستاره‌ای به دست می‌آید.

$$N_\nu = 10^{22} \times \dot{N}_\nu T_{cosmos} = 10^{22} \times \frac{2\dot{N}}{k_{pp}} T_{cosmos} = 10^{22} \times \frac{2LT_{cosmos}}{k_{pp}E}$$

با تقسیم این تعداد بر حجم کیهان، چگالی تعداد نوترینوها به دست می‌آید.

$$n_\nu = \frac{N_\nu}{V} = 10^{22} \times \frac{2Lt}{k_{pp}E} \times \frac{3}{4\pi D_{cosmos}^3} = 10^{22} \times \frac{3L}{2\pi k_{pp}E} \frac{T_{cosmos}}{D_{cosmos}^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_\nu = 1.07 \times 10^{-7}\ cm^{-3}}$$

د) چگالی انرژی نوترینوهای ستاره‌ای را به دست می‌آوریم

$$\rho_\nu = n_\nu \times \frac{\langle E_\nu \rangle}{c^2} = 8.42 \times 10^{-38}\ kg\ cm^{-3}$$

با توجّه به این که این مقدار بسیار کمتر از چگالی ماده‌ی تاریک ذکر شده در صورت سؤال است، **نوترینوی ستاره‌ای نمی‌تواند کاندیدای خوبی برای ماده‌ی تاریک باشد**.

پاسخ سؤال ۴

الف) نسبت کانونی تلسکوپ، $F/1.5$ و قطر آینه‌ی اصلی $D = 3.4\ m$ است. در نتیجه فاصله‌ی کانونی به دست می‌آید.

$$F = \frac{f}{D} \Rightarrow f = FD = 1.5 \times 3.4\ m \Rightarrow \boxed{f = 5.1\ m}$$

ب) طول موج نور مریی را $\lambda = 550\ nm$ در نظر می‌گیریم. تغییر ضخامت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T$$

L ضخامت آینه، α ضریب انبساط حرارتی و ΔT اختلاف دمای شب و روز است.

$$\Rightarrow \Delta L = 2.7 \times 10^{-7}\ m \Rightarrow \boxed{\Delta L = 0.49\lambda}$$

ج) طبق رابطه‌ی توان تفکیک

$$\theta_{(rad)} = 1.22\frac{\lambda}{D} \Rightarrow \boxed{\theta = 40.7\ mas}$$

د) ابتدا فاصله‌ی کانونی مؤثّر (f_{eff}) تلسکوپ را محاسبه می‌کنیم.

$$f_{eff} = F_{eff}D = 11 \times 3.4\ m \Rightarrow f_{eff} = 37.4\ m$$

برای به دست آوردن مقیاس صفحه، از رابطه‌ی مقیاس تصویر استفاده می‌کنیم.

$$l = f\tan\theta \approx f\ \theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{f} = 0.03\ m^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dl} = 0.92\frac{arcmin}{cm}}$$

هـ) اگر ابعاد CCD را با s نشان دهیم، با استفاده از مقیاس تصویر

$$s = \frac{FOV}{d\theta/dl} \Rightarrow \boxed{s = 21.8\ cm}$$

و) باید توان دریافتی از ستاره‌ی حدّی تلسکوپ، برابر با توان دریافتی از ستاره‌ی حدّی چشم باشد

$$b_{eye}A_{eye} = b_TA_T \Rightarrow \frac{b_T}{b_{eye}} = \frac{A_{eye}}{A_T} = \left(\frac{D_{eye}}{D_T}\right)^2$$

b شار دریافتی و A مساحت دریافت کننده است. از مقایسه‌ی حدّ قدر تلسکوپ و چشم داریم

$$m_T - m_{eye} = -2.5\log\frac{b_T}{b_{eye}} = -2.5\log\left(\frac{D_{eye}}{D_T}\right)^2$$

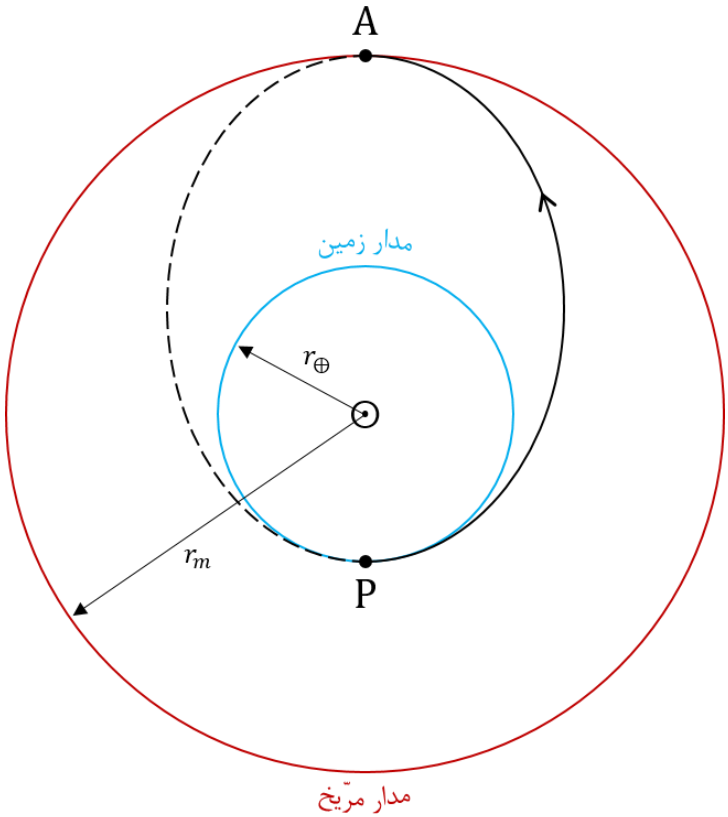
$$\Rightarrow \boxed{m_T = 19.8}$$

ز) باید در مدّت یک ساعت (Δt)، جهت‌گیری تلسکوپ بیشتر از ۰/۱ ثانیه‌ی قوسی ($\Delta\theta$) تغییر نکند. در نتیجه دقّت سرعت زاویه‌ی چنین به دست می‌آید

$$\delta\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\delta\omega = 2.78 \times 10^{-2}\ \frac{mas}{s}}$$

پاسخ سؤال ۵

الف) از یک مدار انتقال بیضوی استفاده می‌کنیم که حضیض آن بر مدار زمین و اوج آن بر مدار مرّیخ مماس است (مدار انتقال هوهمان[۱]).



نیم قطر بزرگ و خروج از مرکز این مدار برابر است با

$$a = \frac{r_m + r_\oplus}{2} = 1.26\ AU \quad , \quad e = \frac{r_m - r_\oplus}{r_m + r_\oplus} = 0.21$$

می‌دانیم سرعت در مدار بیضوی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

M جرم خورشید و r فاصله از آن است. در نتیجه در نقاط اوج (A) و حضیض (P)

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} \quad , \quad v_A = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$

[۱] Hohmann Transfer Orbit

ب) سرعت ابتدایی مرّیخ‌نورد برابر با سرعت مداری زمین ($v_\oplus = \sqrt{GM/r_\oplus}$) است. اختلاف سرعت مورد نیاز در نقطه‌ی حضیض برابر است با

$$\Delta v_P = v_P - v_\oplus = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} - \sqrt{\frac{GM}{r_\oplus}} = 2.93\ km\ s^{-1}$$

ج) سرعت نهایی مرّیخ‌نورد برابر با سرعت مداری مرّیخ ($v_m = \sqrt{GM/r_m}$) است. اختلاف سرعت مورد نیاز در نقطه‌ی اوج برابر است با

$$\Delta v_A = v_m - v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_m}} - \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} = 2.63\ km\ s^{-1}$$

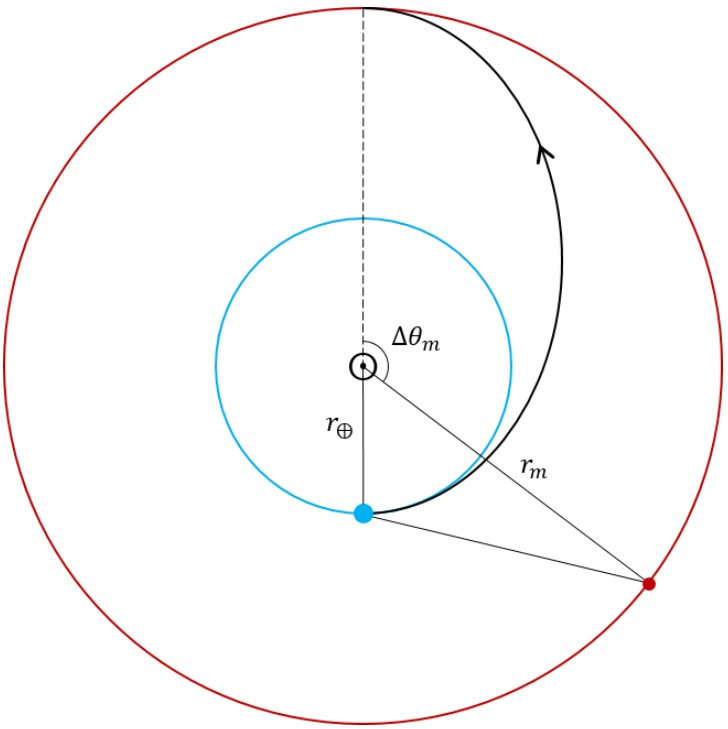
با توجّه به بیشتر بودن انرژی مدار نهایی، بایستی سرعت **افزایش** یابد.

د) مدّت زمان مانور برابر با نصف دوره‌ی تناوب مدار انتقال است و از قانون سوّم کپلر به دست می‌آید.

$$T = \frac{P}{2} = \frac{\sqrt{a^3}}{2} = 0.7\ yr$$

مقدار جابه‌جایی زاویه‌ای مرّیخ نسبت به مرکز خورشید در این زمان برابر است با

$$\Delta\theta_m = \frac{360°}{T_m}T = 135.85°$$

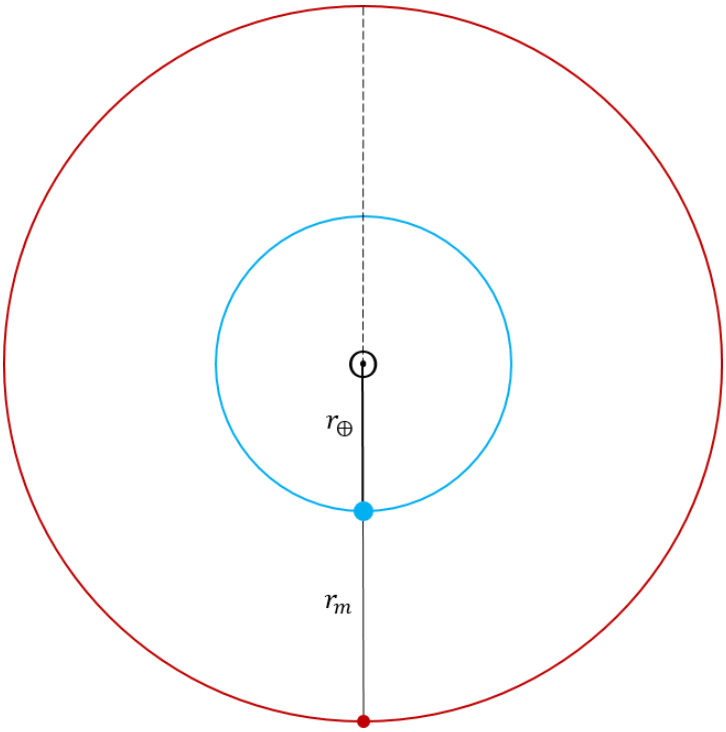


مطابق شکل، زاویه‌ی زمین-خورشید-مریخ مکمّل $\Delta\theta_m$ است.

$$\boxed{\angle\oplus\odot m = 180^\circ\left[1-\left(\frac{a}{a_m}\right)^{3/2}\right] = 44.15^\circ}$$

هنگام پرتاب، بایستی مرّیخ از زمین **جلوتر** باشد.

ه) شکل زیر حالت مقابله را نشان می‌دهد



در این زمان زاویه‌ی زمین-خورشید-مرّیخ صفر است. مدّت زمانی که طول می‌کشد این زاویه به مقدار ۴۴/۱۵° برسد و مرّیخ از زمین جلوتر باشد، چنین به دست می‌آید

$$\Delta t = \frac{360^\circ - \angle\oplus\odot m}{\omega_{rel}} \quad , \quad \omega_{rel} = \omega_\oplus - \omega_m = 360^\circ\left(\frac{1}{P_\oplus}-\frac{1}{P_m}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{a_\oplus^{3/2}}{2}\,\frac{1+\left(\frac{a}{a_m}\right)^{3/2}}{1-\left(\frac{a_\oplus}{a_m}\right)^{3/2}} = 1.88\ yr = 687.1\ \text{روز}}$$

نزدیک‌ترین تاریخ، ۲۰ فروردین ۱۳۹۷ ساعت ۱۸:۲۴ به وقت تهران است.

پاسخ سؤال ۶

طبق داده‌های سؤال، $\Omega_m = 0.26$ و چگالی متوسّط کیهان تخت ρ_c است. در نتیجه چگالی نوترینوها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\rho_\nu = \rho_m = \Omega_m \rho_c = 2.25 \times 10^{-27}\ kg\ m^{-3}$$

رابطه‌ی بین چگالی و چگالی تعداد به این صورت است

$$\rho_\nu = \sum_i n_{\nu,i} m_i = \sum_i \frac{3}{11} n_p \times m_i = \frac{3}{11} n_p \sum_i m_i = \frac{3 n_p m_0}{11}$$

$$\Rightarrow m_0 = \frac{11}{3}\frac{\rho_\nu}{n_p} = 2.01 \times 10^{-35}\ kg \Rightarrow \boxed{m_0 = 11.3\ eV/c^2}$$

پاسخ سؤال ۷

الف) نرخ تشکیل ستاره‌ای[۱] (SFR)، برابر با میزان جرم ستاره‌ای تولید شده در واحد زمان است. در نتیجه جرم کلّ ستاره‌ها با انتگرال‌گیری روی SFR به دست می‌آید

$$M = \int_0^T S(t)dt = S(0)\int_0^T e^{-t/t_*}dt = S(0)t_*\left(1 - e^{-T/t_*}\right) \quad (I)$$

جرم کلّ ستاره‌ها با جمع‌بندی روی تابع جرم اوّلیه ($N = kM^{-3}$) هم به دست می‌آید

$$M = \sum_i N_i M_i = \sum_i kM_i^{-2} = k\sum_i M_i^{-2} \quad (II)$$

از این راه می‌توان تعداد ستاره‌ها را هم به دست آورد

$$N = \sum_i N_i = \sum_i kM_i^{-3} = k\sum_i M_i^{-3} \quad (III)$$

راه اوّل: بدون توجّه به داده‌های سؤال در مورد تعداد ستاره‌ها، با برابر قرار دادن معادله‌های (I) و (II)، خواهیم داشت

$$S(0)t_*\left(1 - e^{-T/t_*}\right) = k\sum_i M_i^{-2} \Rightarrow k = \frac{S(0)t_*\left(1 - e^{-T/t_*}\right)}{\sum_i M_i^{-2}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 6.44 \times 10^6\ M_\odot^3}$$

در این حالت، تعداد کلّ ستاره‌ها چنین به دست می‌آید

$$N = 7.71 \times 10^6$$

راه دوّم: بدون توجّه به داده‌های سؤال در مورد $S(0)$، با توجّه به این که تعداد ستاره‌ها 10^6 است از معادله‌ی (III) استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$\boxed{k = 8.35 \times 10^5\ M_\odot^3}$$

در این حالت، با استفاده از معادله‌ی $(*)$، $S(0)$ چنین به دست می‌آید

$$S(0) = 0.13\ M_\odot/yr$$

---

[۱] Star Formation Rate

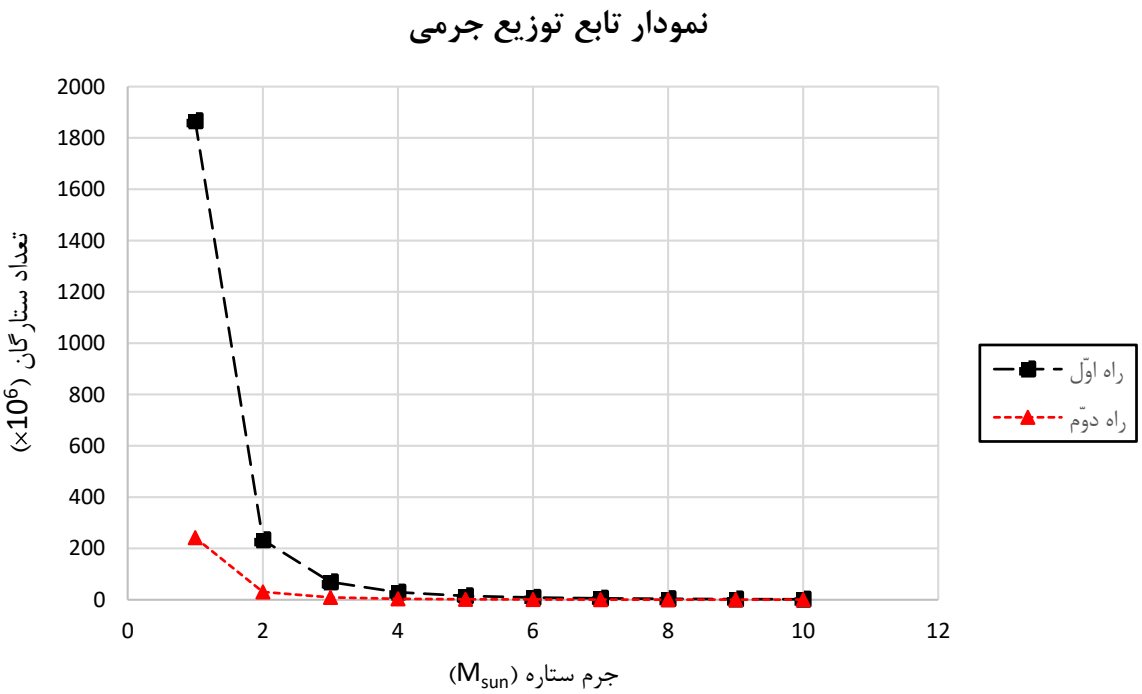
ب) تعداد ستاره‌های تولید شده از هر جرم، به کمک تابع جرم اوّلیه تعیین می‌شود

$$N_i = kM_i^{-3}$$

جدول زیر، تعداد هر نوع ستاره را نشان می‌دهد.

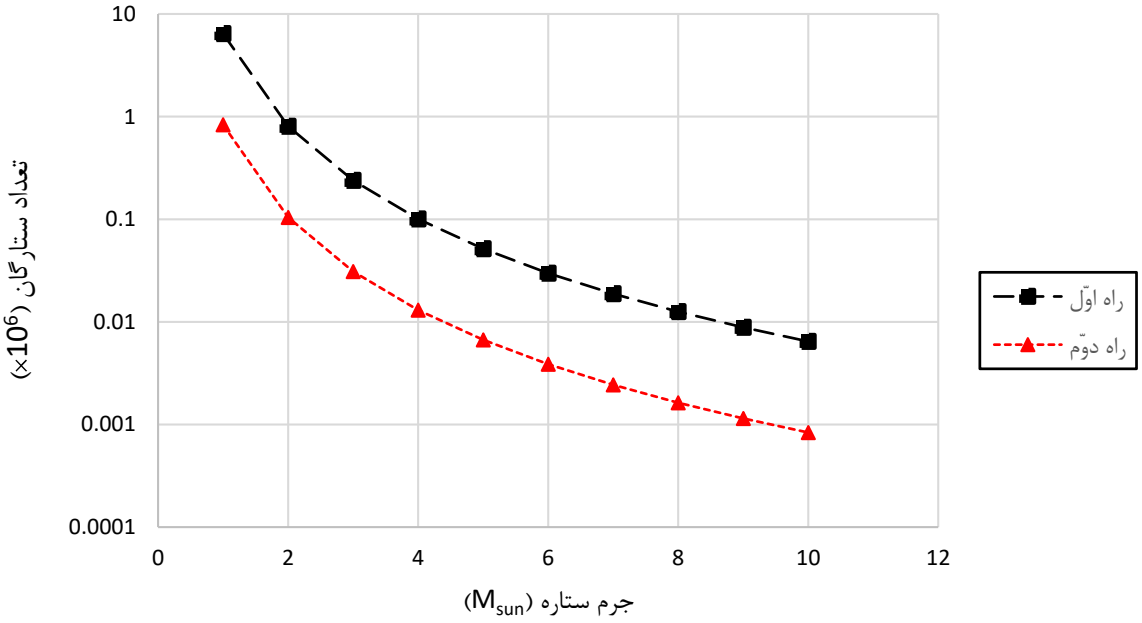
جرم ($M_\odot$)	تعداد (راه اوّل)	تعداد (راه دوّم)
1	6.44×10^6	8.35×10^5
2	8.05×10^5	1.04×10^5
3	2.39×10^5	3.09×10^4
4	1.01×10^5	1.30×10^4
5	5.15×10^4	6.68×10^3
6	2.98×10^4	3.87×10^3
7	1.88×10^4	2.43×10^3
8	1.26×10^4	1.63×10^3
9	8.83×10^3	1.15×10^3
10	6.44×10^3	8.35×10^2

داده‌ها در نمودار زیر رسم شده اند.



البتّه با توجّه به تفاوت مرتبه‌ی داده‌ها، بهتر است نمودار را به صورت نیمه‌لگاریتمی رسم کنیم.

نمودار تابع توزیع جرمی با محور عمودی لگاریتمی



ج) به دلیل این که در مدّت زمان ۱۰ میلیارد سال، برخی ستاره‌ها از رشته‌ی اصلی خارج می‌شوند، توزیع جرمی ستاره‌ها با تابع جرم اوّلیه تفاوت دارد. با استفاده از رابطه‌ی زیر

$$S = S(0)e^{-t/t_*}$$

و مقدار $S(0)$ که در صورت سؤال داده شده یا در قسمت الف محاسبه کرده‌ایم، ابتدا ثابت k' مربوط به توزیع جرمی را به دست می‌آوریم. طبق رابطه‌ی $(*)$

$$k' = \frac{S(0)t_*\left(1 - e^{-T'/t_*}\right)}{\sum_i M_i^{-2}} \qquad (*)$$

$T' = 10\ Gyr$ است. در ادامه، پاسخ‌های مربوط به راه اوّل را با زیروند 1 و پاسخ‌های مربوط به راه دوّم را با زیروند 2 نمایش می‌دهیم.

$$k'_1 = 1.87 \times 10^9\ M_\odot^3 \quad , \quad k'_2 = 2.42 \times 10^8\ M_\odot^3$$

به کمک k' می‌توان جرم ستاره‌های تولید شده در هر دسته را محاسبه کرد.

$$M = k'M^{-2}$$

رابطه‌ی داده شده برای SFR برای هر دسته از ستارگان نیز برقرار است. یعنی در هر دسته، جرم تولید شده در واحد زمان از رابطه‌ی صفحه‌ی بعد به دست می‌آید

$$S(t) = S(0)'e^{-t/t_*}$$

که در آن $t_* = 3\ Gyr$ است و $S(0)'$ برای هر دسته از ستارگان متفاوت است. در هر دسته، ستارگانی که از زمان $T' - t_{ms}$ تا زمان T' تولید شده‌اند، در رشته‌ی اصلی باقی مانده‌اند[1]. نسبت جرم این ستاره‌ها به جرم کلّ ستاره‌های تولید شده در آن دسته از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\eta = \frac{M_{ms}}{M} = \frac{\int_{T'-t_{ms}}^{T'} S(t)\,dt}{\int_0^{T'} S(t)dt} = \frac{e^{-(T'-t_{ms})/t_*} - e^{-T'/t_*}}{1 - e^{-T'/t_*}}$$

با محاسبه‌ی η و ضرب کردن آن در کلّ جرم تولید شده، می‌توان جرم ستارگان حاضر در رشته‌ی اصلی هر دسته را محاسبه کرد. اگر این مقدار را بر جرم ستاره‌های آن دسته تقسیم کنیم، تعداد ستارگان (توزیع جرمی فعلی) به دست می‌آید. جدول زیر، مقادیر M، t_{ms}، η، M_{ms} و N_{ms} را طبق راه اوّل نشان می‌دهد.

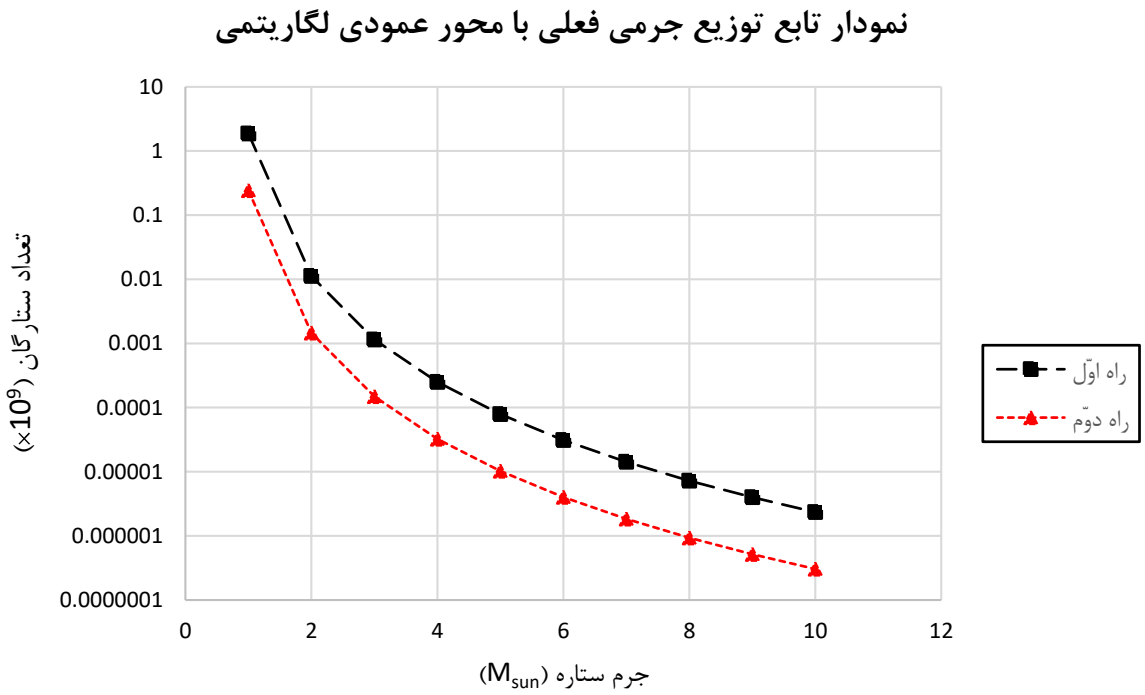
جرم ($M_\odot$)	t_{ms}: عمر رشته‌ی اصلی (Gyr)	M: جرم کل ($M_\odot$)	η: ضریب کاهش جرم	M_{ms}: جرم ستارگان رشته‌ی اصلی ($M_\odot$)	N_{ms}: تعداد ستارگان رشته‌ی اصلی
1	10.00	1.87×10^9	1.0000	$1.87E+09$	$1.87E+09$
2	2.50	4.67×10^8	0.0481	$2.25E+07$	$1.12E+07$
3	1.11	2.07×10^8	0.0166	$3.44E+06$	$1.15E+06$
4	0.63	1.17×10^8	0.0086	$1.00E+06$	$2.50E+05$
5	0.40	7.47×10^7	0.0053	$3.94E+05$	$7.88E+04$
6	0.28	5.19×10^7	0.0036	$1.86E+05$	$3.10E+04$
7	0.20	3.81×10^7	0.0026	$9.92E+04$	$1.42E+04$
8	0.16	2.92×10^7	0.0020	$5.77E+04$	$7.21E+03$
9	0.12	2.30×10^7	0.0016	$3.58E+04$	$3.98E+03$
10	0.10	1.87×10^7	0.0013	$2.34E+04$	$2.34E+03$

[1] t_{ms} عمر رشته‌ی اصلی ستارگان هر دسته است.

هم‌چنین جدول زیر، مقادیر M، t_{ms}، η، M_{ms} و N_{ms} را طبق راه دوّم نشان می‌دهد.

جرم ($M_\odot$)	t_{ms}: عمر رشته‌ی اصلی (Gyr)	M: جرم کل ($M_\odot$)	η: ضریب کاهش جرم	M_{ms}: جرم ستارگان رشته‌ی اصلی ($M_\odot$)	N_{ms}: تعداد ستارگان رشته‌ی اصلی
1	10.00	2.42×10^8	1.0000	2.42×10^8	2.42×10^8
2	2.50	6.05×10^7	0.0481	2.91×10^6	1.46×10^6
3	1.11	2.69×10^7	0.0166	4.46×10^5	1.49×10^5
4	0.63	1.51×10^7	0.0086	1.30×10^5	3.24×10^4
5	0.40	9.68×10^6	0.0053	5.11×10^4	1.02×10^4
6	0.28	6.72×10^6	0.0036	2.41×10^4	4.02×10^3
7	0.20	4.94×10^6	0.0026	1.29×10^4	1.84×10^3
8	0.16	3.78×10^6	0.0020	7.48×10^3	9.35×10^2
9	0.12	2.99×10^6	0.0016	4.64×10^3	5.16×10^2
10	0.10	2.42×10^6	0.0013	3.03×10^3	3.03×10^2

داده‌ها در نمودار نیم‌لگاریتمی زیر رسم شده اند.



پاسخ سؤال ۸

الف) پوش، در همه‌ی جهت‌ها با سرعت V_r در حال انبساط است. برای نقطه‌ای که از دید ما در مرز پوش قرار دارد، سرعت خطّی انبساط تماماً در صفحه‌ی آسمان است. در نتیجه

$$\alpha d = V_r \Rightarrow d = \frac{V_r}{\alpha} = 6.74 \times 10^{22}\ m = 2.181\ Mpc$$

برای محاسبه‌ی خطا، از رابطه‌ی نشر خطا استفاده می‌کنیم

$$\delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial V_r}\delta V_r\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial \alpha}\delta\alpha\right)^2} \Rightarrow \frac{\delta d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\delta V_r}{V_r}\right)^2 + \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \delta d = 0.097\ Mpc \Rightarrow \boxed{d = 2.18 \pm 0.10}$$

ب) از رابطه‌ی قدر ظاهری و قدر مطلق

$$m_V = M_V + 5\log d - 5 + A_V$$

هم‌چنین طبق رابطه‌ی نشر خطا

$$\delta m_V = \sqrt{(\delta M_V)^2 + \left(\frac{5}{\ln 10}\frac{\delta d}{d}\right)^2 + (\delta A_V)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_V = 7.5 \pm 0.4}$$

ج) با مقایسه‌ی m_V و قدر ظاهری ماه بدر، نسبت شار دریافتی $SN\ 1006$ به شار دریافتی ماه به دست می‌آید.

$$m_V - m_{moon} = -2.5\log\frac{F_V}{F_{moon}} \Rightarrow \frac{F_V}{F_{moon}} = 8.00 \times 10^{-9}$$

این مقدار با چیزی که علی‌ابن رضوان گزارش کرده است (یک چهارم) بسیار تفاوت دارد.

پاسخ سؤال ۹

الف) فوتون از سطح ستاره‌ای با شعاع R گسیل شده و به فاصله‌ی بسیار دور رسیده است.

انرژی فوتون برابر با hf است. با توجّه به پایستار بودن نیروی گرانش، از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \xrightarrow{K=hf} hf_0 - \frac{GMm}{R} = hf - 0$$

جرم لختی مؤثّر فوتون از رابطه‌ی $m = K/c^2 = hf_0/c^2$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f_0\left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right) = f \Rightarrow \frac{f}{f_0} = 1 - \frac{GM}{Rc^2}$$

$$\frac{f}{f_0} = \frac{f_0 + \Delta f}{f_0} = 1 + \frac{\Delta f}{f_0} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{GM}{Rc^2}}$$

در این فرایند، بسامد فوتون کاهش می‌یابد (قرمزگرایی گرانشی).

ب) با توجّه به این که $\Delta f \ll f_0$ و $f = c/\lambda$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx -\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{GM}{Rc^2}$$

هم‌چنین با استفاده از رابطه‌ی جرم-شعاع $M/R \propto R^{10/6}/R = R^{2/3}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \propto R^{2/3} \Rightarrow \frac{(\Delta\lambda/\lambda_0)_2}{(\Delta\lambda/\lambda_0)_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2/3} \Rightarrow \boxed{\frac{R_2}{R_1} = 11.2}$$

پاسخ سؤال ۱۰

الف) قضیه‌ی ویریال در شرایطی برقرار است که ستاره در تعادل هیدروستاتیک باشد

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \Rightarrow P_c \propto \frac{GM^2}{R^4}$$

طبق قانون گاز کامل، $P_c \propto \rho_c T_c$ و طبق پایستگی جرم، $M \propto \rho_c R^3$ است. در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{M^2}{(M/\rho_c)^{4/3}} \propto \rho_c T_c \Rightarrow T_c \propto M^{2/3}\rho_c^{1/3} \ (\times)$$

از معادله‌ی تولید انرژی می‌دانیم

$$\epsilon = \frac{dL}{dM} \Rightarrow \rho_c T^{\beta} \propto \frac{L}{M}$$

طبق صورت سؤال، رابطه‌ی جرم درخشندگی $L \propto M^{\alpha}$ است. در نتیجه

$$\rho_c T_c^{\beta} \propto M^{\alpha-1} \ (+)$$

با ترکیب معادله‌های $(\times)$ و $(+)$ خواهیم داشت

$$\rho_c\left(M^{2/3}\rho_c^{1/3}\right)^{\beta} \propto M^{\alpha-1} \Rightarrow \rho_c^{1+\frac{\beta}{3}} \propto M^{\alpha-\frac{2\beta}{3}-1} \Rightarrow \rho_c \propto M^{\frac{3\alpha-2\beta-3}{3+\beta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{3\alpha-2\beta-3}{3+\beta}}$$

ب) ابتدا تابع ψ را تعیین علامت می‌کنیم.

به ازای $\beta > -3$ مخرج مثبت و در غیر این صورت منفی است.

به ازای $\beta < \frac{3\alpha-3}{2} = 1.5(\alpha-1)$ صورت مثبت و در غیر این صورت منفی است.

اگر $1.5(\alpha-1) > -3$، یعنی $\alpha > -1$ باشد، داریم

		-3	$1.5(\alpha-1)$
$3\alpha-2\beta-3$	$+$	$+$	$-$
$3+\beta$	$-$	$+$	$+$

$$-3 < \beta < 1.5(\alpha-1)$$

α حدّاکثر ۵ است، در نتیجه

$$\boxed{-3 < \beta < 6}$$

اگر $1.5(\alpha-1) < -3$، یعنی $\alpha < -1$ باشد، داریم

		$1.5(\alpha-1)$	-3
$3\alpha - 2\beta - 3$	$+$	$-$	$-$
$3+\beta$	$-$	$-$	$+$

$$1.5(\alpha-1) < \beta < -3$$

با توجّه به این که حدّ پایینی برای α وجود ندارد، در این حالت

$$\boxed{\beta < -3}$$