جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

بنام خدا

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تشریحی
مرحله دوم
دوازدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم اخترفیزیک سال ۱۳۹۴

تعداد سوالات تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
۱۲	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. درصورتی‌که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد. بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید. به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام شما صادرشده است. امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصحیحن، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش شدن دایره‌ها در چهارگوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط کمیته‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک باشگاه دانش‌پژوهان جوان تهیه شده و **ماخ** صرفاً آن را بازنشر کرده است.

G	ثابت جهانی گرانش	$m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}$	$۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$
σ	ثابت استفان بولتزمان	$Wm^{-۲}K^{-۴}$	$۵/۶۷\times۱۰^{-۸}$
$a=۴\sigma/c$	ثابت تابش	$Jm^{-۳}K^{-۴}$	$۷/۵۶\times۱۰^{-۱۶}$
k_B	ثابت بولتزمان	$JK^{-۱}$	$۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$
h	ثابت پلانک	Js	$۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$
e	بار الکترون	C	$۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$
m_e	جرم الکترون	kg	$۹/۱\times۱۰^{-۳۱}$
$۱u$	واحد جدرم اتمی	kg	$۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}$
c	سرعت نور	$ms^{-۱}$	$۳/۰۰\times۱۰^{۸}$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}$
Au	واحد نجومی	m	$۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}$
Ly	سال نوری	m	$۹/۴۶\times۱۰^{۱۵}$
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	$۶/۹۶\times۱۰^{۸}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$
$R_\oplus$	شعاع زمین	m	$۶/۳۸\times۱۰^{۶}$
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷\times۱۰^{۲۴}$
atm	فشار اتمسفر	N	$۱/۰۱۳\times۱۰^{۵}$
m_P	جرم پروتون	kg	$۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}$
ε	ضریب کارایی همجوشی هیدروژن		$۰/۰۰۷$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}$
$M_\odot$	قدر مطلق خورشید		$۴/۷۲$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		$-۲۶/۷$
$f_\odot$	ثابت خورشیدی	$Wm^{-۲}$	$۱/۳۷\times۱۰^{۳}$
$H_۰$	ثابت هابل در حال حاضر	$Kms^{-۱}Mpc^{-۱}$	$۶۷/۸$
N_A	عدد آووگادرو	$mol^{-۱}$	$۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$
R	ثابت گازها	$Jmol^{-۱}K^{-۱}$	$۸/۳۱۴$
r_B	شعاع اتمی بور	m	$۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}$
eV	الکترون ولت	J	$۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$
M_{moon}	قدر ظاهری ماه بدر		$-۱۲/۷۴$
$T_{mean}(sun)$	دمای متوسط خورشید	K	$۴/۵\times۱۰^{۶}$
D	بیشینه قطر مردمک چشم انسان	mm	۶
m_{eye}	حد قدر چشم انسان		۶
$T_{core}(sun)$	دمای مرکز خورشید	K	$۱/۵\times۱۰^{۷}$

۱- فرض کنید در اثر هر انفجار ابرنواختری جرمی معادل ۱۰ برابر خورشید ($M=10\ M_{sun}$) به صورت فلز (عناصر سنگین‌تر از هیدروژن و هلیوم) وارد محیط کهکشانی می‌شود. اگر متوسط فلزیت ستاره‌ها (یعنی نسبت جرم فلزات به کل جرم در کهکشان) ۰/۰۱ باشد؛ بدست آورید که در کهکشان ما در هر سال چند انفجار ابرنواختری رخ می‌دهد؟ (۱۰ نمره)

راهنمایی: کهکشان راه شیری 10^{11} ستاره دارد. برای سادگی فرض کنید همه ستاره‌ها مانند خورشید هستند.

۲- شهاب‌سنگ‌ها تکه‌های جدا شده‌ای از سیارک‌ها، ماه، مریخ و شاید دنباله‌دارها با وزن‌های بین چند گرم تا چندین تن می‌باشند که از فضا به زمین برخورد می‌کنند. شهاب‌سنگ‌های بسیار بزرگ، هنگام برخورد با زمین منفجر شده و حفره‌هایی به نام دهانه‌های برخوردی پدید می‌آورند (شکل زیر گودال عظیمی است که در صحرای آریزونا در اثر برخورد یک شهاب‌سنگ ایجاد شده است). سقوط این شهاب‌سنگ‌ها ممکن است با ظهور آتش‌گوی و سپس موج انفجار نیز همراه باشد. آخرین گزارش ثبت شده از برخورد یک شهاب‌سنگ با زمین به سال ۱۹۰۸ باز می‌گردد. در آن برخورد، شهاب‌سنگی به قطر ۵۰ متر در ناحیه‌ای به نام تونگوسکا واقع در سیبری روسیه با زمین برخورد کرد که بر اثر آن انفجاری مهیب تا شعاع چهار کیلومتری محل برخورد را فرا گرفت و علاوه بر آن ۲۰۰۰ کیلومتر مربع از جنگل‌های سیبری نیز بر اثر این انفجار به شدت آسیب دید. در چند سال گذشته نیز عبور یک شهاب‌سنگ با قطر حدود ۴۰۰ متر از آسمان سیبری در شمال روسیه مشاهده شد که البته بدون برخورد از کنار زمین عبور کرد.

فرض کنید قرار است شهاب‌سنگی با زمین برخورد کند. محاسبه کنید احتمال اینکه شهاب‌سنگ به یک شهر برخورد کند چقدر است؟ تمام فرض‌های خود را برای حل این مسأله به صراحت بیان کرده و در کادر قرار دهید. (۱۰ نمره)

۳- با استفاده از تقارن مقدار پتانسیل گرانشی در گوشه یک مکعب توپر و یکنواخت را نسبت به مقدار پتانسیل در مرکز همان مکعب محاسبه کنید؟ (۱۰ نمره)

۴- هسته خورشید منطقه‌ای به شعاع ۰/۲ شعاع خورشید بوده که حاوی ۰/۳۴ جرم خورشید است و تمامی انرژی هسته‌ای خورشید در آن تولید می‌شود. در تقریب اول فرض کنید که خورشید فقط از هیدروژن تشکیل شده است.

الف) چگالی هسته را به دست آورید؟

ب) محاسبه کنید هر پروتون چه مدت طول می‌کشد تا با یک پروتون دیگر همجوشی انجام دهد؟

ج) محاسبه کنید هر پروتون به طور متوسط چه مسافتی را طی می‌کند تا یک همجوشی انجام دهد؟ (۲۰ نمره)

۵ – چگالی ستاره‌ها در اطراف خورشید تقریباً ۰/۱ ستاره بر پارسک مکعب است. همچنین می‌دانیم که تقریباً از هر یک میلیون ستاره فقط یک ستاره ممکن است دارای سیاره‌ای باشد که در آن احتمال حیات وجود دارد.

الف) محاسبه کنید فاصله نزدیکترین سیاره‌ای که احتمال حیات در آن ممکن است وجود داشته باشد چند پارسک است؟

ب) حداقل قطر تلسکوپی رابیابید که حد قدری آن به گونه‌ای باشد که سیاره‌ای مانند زمین که در فاصله یک واحد نجومی از این ستاره قرار دارد را بتوان مشاهده کرد. ستاره را خورشیدگون فرض کنید. **(۲۰ نمره)**

-۶ خورشید در انتهای دوره هیدروژن سوزی خود به لحظه‌ای می‌رسد که هسته هیدروژن‌سوز آن خاموش می‌شود. در این زمان بلافاصله هلیوم‌سوزی آغاز نخواهد شد. بلکه به خاطر حذف منبع انرژی هسته‌ای، خورشید به مرور رمبیده تا اینکه دمای مرکزی ستاره به ۱۰۰ میلیون کلوین (دمای هلیوم‌سوزی) و چگالی مرکزی هم به ۲ برابر چگالی قبلی برسد و هلیوم را روشن کند.

الف) تابعیت فشار گرانشی (فشار ستون جرم) در مرکز ستاره و پتانسیل گرانشی را بر حسب G، M و R با استفاده از تحلیل ابعادی به دست آورید؟

ب) با تقریب گاز کامل در مرکز خورشید طی این فرآیند، شعا خورشید زمانی که هلیوم‌سوزی آغاز می‌شود، بر حسب شعاع فعلی به دست آورید؟

ج) اگر درخشندگی خورشید طی این مدت که برای خورشید ۱۷ میلیون سال به طول می‌انجامد؛ به طور خطی تغییر کند ($L=L_{sun}+\alpha t$) مقدار ضریب α را محاسبه کنید؟

د) تابعیت تغییرات دمایی سطح ستاره را بر حسب زمان به دست آورده و مقدار عددی آن را در لحظه روشن شدن هلیوم به دست آورید؟ **(۳۰ نمره)**

-۷ لحظه تحویل سال ۱۳۹۵ ساعت ۸ و صفر دقیقه و ۱۲ ثانیه به وقت تهران ($35^{\circ}42'N,\ 51^{\circ}24'E, 1200m$) بود. ارتفاع خورشید از دید ناظری با مختصات ($24^{\circ}37'38''S,\ 70^{\circ}24'15''W, 2635m$) با دقت دقیق قوس چقدر بوده است؟ **(۲۰ نمره)**

-۸ یک پروژه مشترک بین رصدخانه ۱ ($19^{\circ}45'35''N,\ 155^{\circ}28'30''W, 4145m$) و رصدخانه ۲ ($24^{\circ}37'38''S,\ 70^{\circ}24'15''W, 2635m$) تعریف شده است تا یک جرم آسمانی را به طور پیوسته رصد کند. یعنی زمانی که جرم می‌خواهد از افق غربی رصدخانه ۱ خارج شود و در افق شرقی رصدخانه ۲ دیده می‌شود و رصد جرم مذکور در رصدخانه ۲ آغاز می‌شود. به دلیل اثرات جوی در ارتفاع‌های پایین، بهترین زمان انتقال وقتی است که ستاره در دو محل ارتفاع یکسانی داشته باشد. این ستاره در یک لحظه از دید ناظر ۱ در سمت ۳۱۵ درجه و ارتفاع ۴۵ درجه قرار می‌گیرد.

الف) زاویه میل جرم را محاسبه کنید؟

ب) متأسفانه به دلیل شرایط خاص رصدی امکان ارتفاع یکسان فراهم نیست. سمت و ارتفاع جرمی که در لحظه انتقال اندازه زاویه‌ی ساعتی یکسان از دو رصدخانه داشته باشد در رصدخانه ۱ (A_1,h_1) و رصدخانه ۲ (A_2,h_2) را به صورت پارامتری محاسبه کنید؟

ج) مقادیر A_1، h_1، A_2 و h_2 را محاسبه کرده و در کادرهای مربوطه بنویسید. **(۳۰ نمره)**

A_1	h_1	A_2	h_2

۹- ستارگان در طول تحول خود پس از سپری کردن مدت زمان طولانی بر روی رشته اصلی (یعنی مرحله هیدروژن‌سوزی در هسته ستاره) وارد فاز شاخه‌ی غول قرمز (RGB) می‌شوند و مدتی را در آنجا سپری می‌کنند. در ابتدای این فاز، ستاره که در ناحیه زیرین شاخه غول قرمز قرار دارد دارای یک هسته هلیومی است و درخشندگی ستاره تقریباً ثابت بوده و فقط ناشی از سوختن هیدروژن در پوسته ستاره است. ستاره‌ای به جرم $M = M_{sun}$ و فراوانی هلیومی $Y = ۰/۳$ و فلزیت $Z = ۰/۰۰۱$ را در نظر بگیرید که در ناحیه زیرین شاخه غول قرمز دارای هسته‌ای به جرم $M_c = ۰/۲ M_{sun}$ است و پوسته‌ی ستاره با درخشندگی ثابت $L = ۱۰ L_{sun}$ در حال تابش است. ستاره در حین تحول از شاخه غول قرمز بالا می‌رود تا در بالاترین نقطه، جرقه‌ی هلیومی اتفاق بیافتد. پس از جرقه هلیومی که در دمای حدوداً $۱۰^{۸}$ کلوین رخ می‌دهد، ستاره در شاخه افقی (HB) قرار می‌گیرد؛ که در آنجا در هسته ستاره، هلیوم به کربن و در پوسته آن هیدروژن به هلیوم تبدیل می‌شود.

الف) با رسم نمودار هرتزپرانگ – راسل، محل قرارگیری این ستاره در رشته‌ی اصلی (MS)، ناحیه زیرین شاخه غول‌ها (BGB)، شاخه غول قرمز (RGB) و شاخه افقی (HB) را به صورت تقریبی مشخص کنید.

ب) در شاخه غول قرمز، درخشندگی ستاره فقط به جرم هسته و به صورت $L = kM_c^{۸}$ وابسته است که در آن k مقدار ثابتی است. محاسبه کنید که ستاره‌ای مانند خورشید چه مدتی را (بر حسب سال) در شاخه غول قرمز سپری می‌کند. جرم هسته در بالاترین نقطه شاخه‌ی غول قرمز با رابطه زیر داده می‌شود. (در دو رابطه زیر جرم‌ها بر حسب جرم خورشید هستند.)

$$M_c = ۰/۴۶۷ - ۰/۲۲۱\,(Y - ۰/۳) - ۰/۰۰۹\,(۳ + \log Z) - ۰/۰۲۳\,(M - ۰/۸)$$

ج) با استدلال بیان کنید که در یک خوشه کروی، فراوانی ستاره‌ها در شاخه غول قرمز بیشتر است یا در شاخه افقی؟ مدت زمانی که ستاره در شاخه افقی باقی می‌ماند (t_{HB}) برحسب میلیون سال با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\log(t_{HB}) = ۱/۷۹۵ + ۰/۵۰۶\,(Y - ۰/۳۳) + ۰/۰۲۲\,(۳ + \log Z) + ۰/۰۷۷\,(M - ۰/۸)$$

می‌توانید فرض کنید ستاره در شاخه غول قرمز در اثر تحول، تقریباً جرمی معادل ۰/۲ جرم خورشید را از دست داده باشد. **(۳۵ نمره)**

۱۰- فرض کنید کیهان تخت بوده و فقط شامل هیدروژن است که بهصورت یکنواخت در آن توزیع شده است. چگالی کیهان در زمان حال از رابطه $\rho_۰ = \frac{۳H_۰^۲}{۸\pi G}$ محاسبه می‌شود که در آن $H_۰$ ثابت هابل در زمان حال است.

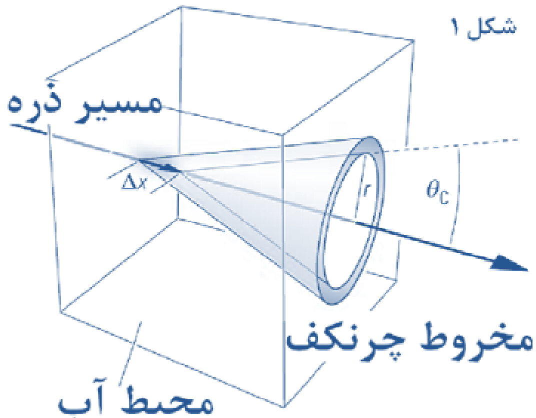
الف) در قرمز گرایی $Z=۶$ چگالی عددی هیدروژن‌ها را محاسبه کنید؟

اختروش‌ها یا کوازارها، هسته‌های فعال کهکشان‌های دوردست هستند که در تمام طول موج‌های الکترومغناطیسی با شدتی معادل هزار میلیارد ستاره همانند خورشید ($L = ۱۰^{۱۲} L_{sun}$) تابش می‌کنند. فرض کنید هر کوازار در هر ثانیه $۱۰^{۵۶}$ فوتون یونیزه کننده تابش می‌کند.

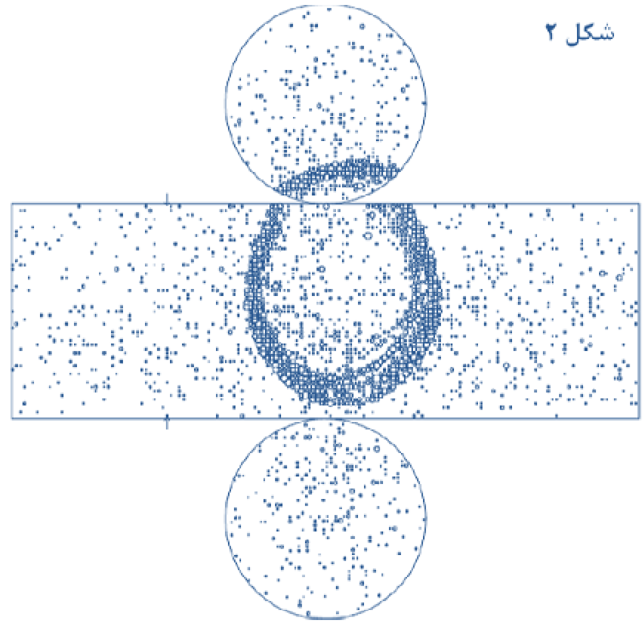
ب) چگالی عددی کوازارها (یعنی تعداد کوازارها در کیلوپارسک مکعب) را به گونه‌ای بیابید به طوری که فوتون‌های آنها همه کیهان را در قرمز گرایی $Z=۶$ با تابش خود یونیزه کنند؟

راهنمایی: آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون‌ها با چگالی عددی n_p برابر است با $R = \alpha n_p$ که در آن مقدار α که به ضریب بازترکیب معروف است برابر است با $\alpha = ۳\times۱۰^{-۱۳}\,\frac{cm^۳}{s}$. **(۳۰ نمره)**

۱۱- ذرات باردار پرانرژی وقتی از داخل محیطی با ضریب شکست n با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط ($v>c/n$) عبور می‌کنند؛ نور چرنکف تولید می‌کنند.این تابش روی یک حلقه تابیده می‌شود. (شکل ۱)



شکل ۱


شکل ۲

الف) نشان دهید که زاویه رأس مخروط چرنکف از رابطه $\cos\theta=c/nv$ تبعیت می‌کند. ضرایب شکست هوا و آب به ترتیب ۱/۰۰۰۲۹ و ۱/۳۳۳ هستند. زوایای رأس مخروط در هوا و آب را برای ذرات سریعی با سرعت‌های نزدیک سرعت نور بر حسب درجه به دست آورید.

ب) آزمایش آشکارساز نوترینوی سوپر کامیوکانده در ژاپن، یک استوانه بسیار بزرگ به قطر ۳۹/۳ متر و ارتفاع ۴۱/۴ متر است و ۵۰ هزار تن آب در این محفظه قرار دارد. در سطح داخلی این آشکارساز تعداد ۱۲۵۰۰ آشکارساز برای ثبت فوتون‌های نوری نصب شده است. وقتی نوترینویی وارد آب می‌شود می‌تواند در داخل آب با یک هسته یا یک الکترون واکنش داده و یک میون پرانرژی در آب تولید کند. این میون به دلیل باردار بودنش و انرژی بالای آن، شکل ۲ را روی دیواره‌های این آشکارساز ایجاد می‌نماید. فاصله محل تولید میون، از مرکز حلقه آشکارسازهای روشن شده (شکل ۲) چقدر است؟ این مقدار عددی را سعی کنید با بیشترین دقت محاسبه کنید. **(۳۵ نمره)**

۱۲- اغلب سیارات فراخورشیدی رصد شده، جرم‌هایی در حدود جرم مشتری دارند و در فواصل بسیار نزدیک از ستاره خود قرار گرفته‌اند. از طرفی نواحی نزدیک ستاره‌ها محیط مناسبی برای شکل‌گیری چنین سیارات عظیمی نیستند. اخترفیزیک‌دان‌ها معتقدند این سیارات بایستی در نواحی دورتر شکل گرفته باشند و به دلایلی به نزدیک ستاره مهاجرت کرده باشند.

این مسأله توصیف ساده‌ای از ساز و کار این مهاجرت است:

فرض کنید سیاره‌ای با جرم مشتری m_J در فاصله r از ستاره‌ای با جرم خورشید در مدار دایره‌ای در حال حرکت است. از این پس همه چیز را شبیه مشتری و خورشید تصور می‌کنیم و ستاره و سیاره را خورشید و مشتری می‌نامیم. برای سادگی مرکز جرم را روی خورشید در نظر می‌گیریم و از محاسبات مرکز جرم مسأله دو جسم صرف‌نظر می‌کنیم.

الف) نیم قطر بزرگ مدار جدید، α' و خروج از مرکز مدار جدید سیاره e' را پس از این اختلال بر حسب r به دست آورید؟

ب) در حد $f\to 0$ مقدار α' و e' را به دست آورید؟

ج) نقطه حضیض مدار جدید، خیلی به خورشید نزدیک است و این باعث می‌شود اثرات کشندی بزرگی ناشی از خورشید به روی مشتری اعمال شود که باعث تغییرا جدیدی در مدار سیاره خواهد شد. این فرآیند آنقدر ادامه می‌یابد تا اثرات کشندی باعث همزمان شدن مشتری با خورشید شود و نهایتاً مشتری در مداری که در آن آثار کشندی وجود ندارد حرکت می‌کند. (همزمانی: وقتی سرعت زاویه‌ای مشتری به دور خود با سرعت زاویه‌ای آن به دور خورشید برابر شود). نیم‌قطر بزرگ مدار نهایی مشتری α'' و خروج از مرکز مدار نهایی مشتری e'' را بعد از اعمال اثرات کشندی به دست آورید

د) در حد $e' \to 1$، شعاع مدار جدید α''، چند برابر فاصله حضیضی مدار قبلی (r_p') با نیم‌قطر بزرگ α'' است؟

هـ) چنین سیاراتی (که به مشتری‌های داغ معروفند؛ hot Jupiter) معمولاً در فاصله $0/05\mathrm{AU}$ از ستاره مرکزی شان رصد شده‌اند. اگر فرض کنیم شعاع مدار اولیه آنها $5\mathrm{AU}$ باشد، مقدار انرژی تلف شده توسط اثرات کشندی چند برابر انرژی خودگرانش مشتری است؟

(۴۰ نمره)

«پاسخ‌نامه تشریحی»

سوال ۱

داده های سؤال عبارتند از:

$$Z_{gal} = ۰/۰۱ \qquad , \qquad M_Z = ۱۰ M_\odot$$

تمامی ستارگان کهکشان، خورشیدگون هستند، در نتیجه برای محاسبه جرم کل فلزات کافی است از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$M_{Z,tot} = Z_{gal} \times ۱۰^{۱۱} M_\odot = ۱۰^{۹} M_\odot$$

با فرض صفر بودن فلزیت در ابتدای شکل‌گیری کهکشان، در صورتی که تعداد ابرنواخترها را با N، سن کهکشان‌ها را با t_{gal} و آهنگ انفجار ابرنواختری را با $\dot{N}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\dot{N} = \frac{N}{t_{gal}} = \frac{M_{Z,tot}/M_Z}{t_{gal}}$$

با جایگذاری $t_{gal} = ۱۰\ Gyr$ خواهیم داشت:

$$\dot{N} = ۰/۰۱ yr^{-۱}$$

که معادل یک انفجار ابرنواختری در هر ۱۰۰ سال است.

سؤال ۲

کافی است تخمین بزنیم چه کسری از سطح زمین توسط شهرها پوشش داده شده است. احتمال برخورد (P) از تقسیم مساحت کل شهرها (A) به مساحت کره زمین ($A_\oplus$) به دست می‌آید.

$$P = \frac{A}{A_\oplus} = \frac{A}{4\pi R_\oplus^{۲}} \qquad (*)$$

در ادامه راه‌های مختلفی برای انجام تخمین ارائه شده است.

راه اول: حدوداً سرانه مساحت در شهرها (A/N) از مرتبه ۱۰۰ تا ۲۰۰ متر مربع است.

جمعیت کل دنیا (N) حدود ۷ میلیارد نفر است. در نتیجه مساحت کل شهرها چنین به دست می‌آید:

$$A = N \times \left(\frac{A}{N}\right) = (۷\times۱۰^{۹}) \times (۱/۵\times۱۰^{۱۲}) = ۱۰^{۱۲} m^{۲}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} p \approx \frac{۱}{۵۰۰} = /۲\% \sim ۱۰^{-۳}$$

راه دوم: $\frac{۳}{۴}$ سطح زمین آب است. از میان خشکی‌ها هم حدود ۱٪ شهر هستند.

$$p = ۰/۰۱ \times \frac{۱}{۴} \Rightarrow p \approx ۰/۲۵\% \sim ۱۰^{-۳}$$

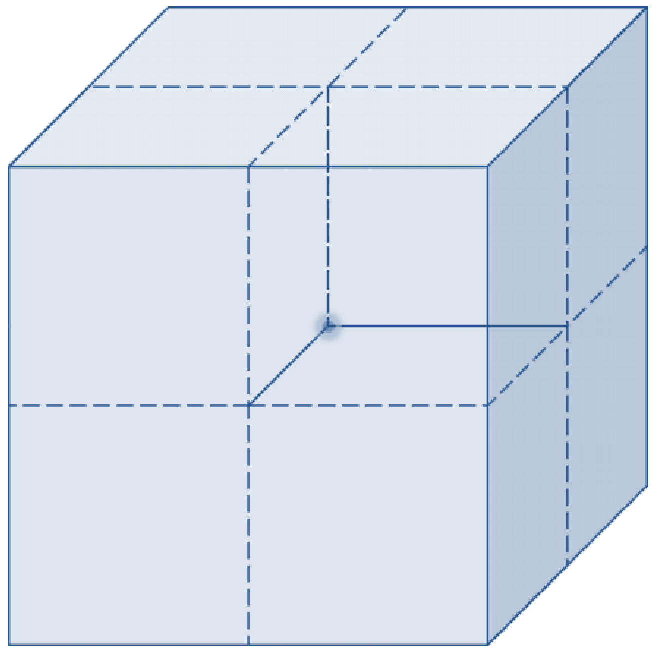
راه سوم: ۷۰ درصد سطح زمین آب است. در یک سوم خشکی‌ها شهرسازی شده است.

اگر نسبت طول یک شهر متوسط به طول کشور ۰/۰۱ باشد، نسبت مساحت آن به کشور ۰/۰۰۰۱ خواهد بود. فرض می‌کنیم در هر کشور ۱۰۰ شهر متوسط وجود دارد.

$$P=\left(1-\frac{70}{100}\right)\times\frac{1}{3}\times 100\times 10^{-4} \Rightarrow P\approx 0/1\% \sim 10^{-3}$$

سوال سوم

مکعبی به ضلع l و جرم m را در نظر می‌گیریم. مقدار پتانسیل در مرکز آن ϕ_0 و در گوشه ϕ است.



با قرار دادن ۸ مکعب کنار هم، مکعب جدیدی به ضلع $L=2l$ و جرم $M=2m$ ایجاد می‌شود که مرکز آن بر گوشه مشترک مکعب‌های قبلی واقع شده است. این مکعب پتانسیل مرکزی Φ_0 را دارد. با توجه به اسکالر بودن میدان پتانسیل، پتانسیل مجموع در یک نقطه را می‌توان با جمع کردن پتانسیل‌ها به دست آورد.

$$\Phi_0 = 8\phi \qquad (I)$$

رابطه پتانسیل در مرکز به فرم زیر است:

$$\phi_0 = -\alpha\frac{Gm}{l}$$

که در آن G، ثابت جهانی گرانش و α یک ثابت وابسته به توزیع چگالی است. با توجه به یکنواخت بودن توزیع چگالی، $m\propto l^3$ و در نتیجه:

$$\phi_0 \propto l^2 \Rightarrow \Phi_0 = 4\phi_0 \qquad \left(II\right)$$

با مقایسه روابط $\left(I\right)$ و $\left(II\right)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\phi}{\phi_0}=\frac{1}{2}$$

سؤال ۴

داده‌های سؤال عبارتند از:

$$M_c = ۰/۳۴ M_\odot \quad , \quad R_c = ۰/۲ R_\odot \quad , \quad \bar{m} = m_H$$

الف) با فرض ثابت بودن چگالی خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{۳M_c}{۴\pi R_c^۳} \Rightarrow \rho = ۵/۹۹ \times ۱۰^۴ \frac{kg}{m^۳}$$

ب) برای محاسبه زمان آزاد میانگین، توزیع یکنواختی از ذره‌های نقطه‌ای با چگالی عددی ثابت $n = \frac{\rho}{\bar{m}}$ را در نظر می‌گیریم. یک اتم هیدروژن با شعاع مؤثر ۲ برابر شعاع اتم بور ($۲r_B$) از میان این ذرات در حال عبور است. سطح مقطع مؤثر این اتم برابر است با:

$$\sigma = \pi \times (۲r_B)^۲ = ۴\pi r_B^۲$$

هنگامی که این اتم طول l را می‌پیماید، تعداد ذرات جاروب شده توسط آن برابر است با:

$$N = nV = n \times \sigma v t$$

برای محاسبه سرعت ذرات، کافی است به جرم آنها (m_H) و دمای متوسط خورشید (T_{mean}) توجه کنیم. با استفاده از رابطه انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}\bar{m} v^۲ = \frac{۳}{۲}kT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۳kT}{\bar{m}}}$$

زمان متوسط لازم برای انجام یک برخورد به ازای $N = ۱$ به دست می‌آید:

$$t = \frac{۱}{n\sigma v} = \frac{۱}{۴\pi r_B^۲ \rho}\sqrt{\frac{\bar{m}^۳}{۳kT}} \Rightarrow t = ۲/۳۷ \times ۱۰^{-۱۸} s$$

ج) برای محاسبه مسافت متوسط هر برخورد (مسافت آزاد میانگین):

$$l = vt = \frac{۱}{n\sigma} = \frac{\bar{m}}{۴\pi r_B^۲ \rho} \Rightarrow l = ۷/۹۳ \times ۱۰^{-۱۳} m$$

سؤال ۵

داده‌های سؤال عبارتند از:

$$n = ۰/۱ pc^{-۳} \quad , \quad P = ۱۰^{-۶}$$

الف) **راه اول**: تعداد ستارگان دارای حیات تا فاصله d به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$N = P \times nV = P \times \frac{۴}{۳}\pi d^۳ n$$

که در اینجا nV تعداد کل ستارگان تا فاصله d و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = ۱$ می‌شود، پاسخ مسأله است.

$$N = ۱ \Rightarrow d = \left(\frac{۳}{۴\pi P n}\right)^{۱/۳} \Rightarrow d = ۱/۳۴ \times ۱۰^۲ pc \sim ۱۰^۲ pc$$

راه دوم: مکعبی به ضلع d را در نظر می‌گیریم که در آن یک میلیون ستاره باشد.

$$N = P \times nV = P \times nd^{۳}$$

در اینجا nV تعداد کل ستارگان در مکعب و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = ۱$ می‌شود، پاسخ مسأله است.

$$N = ۱ \Rightarrow d = \left(\frac{۱}{Pn}\right)^{۱/۳} \Rightarrow d = ۲/۱۵ \times ۱۰^{۲} pc \sim ۱۰^{۲} pc$$

ب) ابتدا قدر سیاره از دید ناظر زمینی (m_l) را به دست آورده و سپس قطر دهانه متناظر با آن را می‌یابیم.

راه اول: با فرض اینکه سیاره مورد نظر، دارای مشخصاتی (شعاع و اندازه مدار) شبیه به زمین و یک جسم سیاه ایده‌آل باشد. آهنگ تابش انرژی توسط آن برابر با آهنگ دریافت انرژی از ستاره خواهد بود.

$$L_{out} = L_{in} = F \times A_{eff} = F_{\odot} \times \pi R^{۲}$$

در اینجا F شار دریافتی در محل سیاره، $F_{\odot}$ ثابت خورشیدی و A_{eff} مساحت مؤثر سیاره است. شار دریافتی سیاره در زمین را به دست آورده و قدر معادل با آن را حساب می‌کنیم.

با توجه به اینکه نور سیاره به صورت میانگین روی یک نیم‌کره پخش می‌شود و مقایسه با خورشید:

$$F_l = \frac{L_{out}}{۲\pi d^{۲}} \quad , \quad m_l - m_{\odot} = -۲/۵ \log \frac{F_l}{F_{\odot}}$$

$$\Rightarrow m_l = m_{\odot} - ۲/۵ \log\left(\frac{L_{out}}{۲\pi d^{۲} F_{\odot}}\right) = m_{\odot} - ۲/۵ \log\left(\frac{R^{۲}}{۲d^{۲}}\right) \Rightarrow m_l = ۳۲/۵$$

راه دوم: وقتی سیاره‌ای را کنار خورشید مشاهده می‌کنیم، بازتاب نور خورشید از آن سیاره را مشاهده می‌نماییم. قدر چنین سیاره‌ای ($m_{۰}$) حدوداً ۲- است. قدر این سیاره از دید زمین (m) چنین به دست می‌آید:

$$m_l - m_{\odot} = -۲/۵ \log \frac{F_l}{F_{\odot}} \;,\; F = \frac{L}{۴\pi d^{۲}}$$

$$\Rightarrow m = m_{۰} + ۵ \log \frac{d}{d_{۰}} \Rightarrow m = ۳۴/۵$$

برای محاسبه قطر دهانه متناظر با m_l، از مشخصات چشم انسان (D_{eye}, m_{eye}) کمک می‌گیریم.

$$m_l - m_{eye} = -۲/۵ \log\left(\frac{D_{eye}}{D_l}\right)^{۲} \Rightarrow D_l \sim ۱ km$$

سؤال ۶

داده‌های سؤال عبارتند از:

$$T_c = ۱۰^{۸} K$$

الف) می‌دانیم:

$$[P] = ML^{-۱}T^{-۲} \quad , \quad [U] = ML^{۲}T^{-۲} \quad , \quad [G] = M^{-۱}L^{۳}T^{-۲}$$

با توجه به تابعیت فشار (P) و پتانسیل گرانشی (U) از G، M و R می‌توان گفت:

برای فشار:

$$P = CG^{\alpha}M^{\beta}R^{\gamma} \Rightarrow \left[P\right] = \left[G^{\alpha}\right]\left[M^{\beta}\right]\left[R^{\gamma}\right]$$
$$\Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$
$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ 3\alpha + \gamma = -1 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 2\ ,\ \gamma = -4 \\ -2\alpha = -2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow P = C\frac{GM^{2}}{R^{4}}$$

برای پتانسیل گرانشی:

$$U = C'G^{\alpha}M^{\beta}R^{\gamma} \Rightarrow \left[P\right] = \left[G^{\alpha}\right]\left[M^{\beta}\right]\left[R^{\gamma}\right]$$
$$\Rightarrow ML^{2}T^{-2} = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$
$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 2 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 2\ ,\ \gamma = -1 \\ -2\alpha = -2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow U = C'\frac{GM^{2}}{R}$$

ب) از قسمت الف می‌دانیم:

$$P \propto \frac{M^{2}}{R^{4}}$$

با استفاده از قانون گاز کامل:

$$P = \frac{\rho kT}{\overline{m}} \propto \frac{\rho T}{\overline{m}}$$

اگر فشار ستون جرم و فشار گاز کامل را برابر قرار دهیم:

$$\frac{M^{2}}{R^{4}} \propto \frac{\rho T}{\overline{m}} \Rightarrow T \propto \frac{M^{2}}{R^{4}\rho}\overline{m}$$

با توجه به اینکه جرم ستاره در این مدت تقریباً ثابت می‌ماند و جرم متوسط ذرات هسته هلیومی تقریباً ۴ برابر جرم متوسط ذرات هسته هیدروژنی است:

$$\frac{T_{2}}{T_{1}} = 4\frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\left(\frac{R_{1}}{R_{2}}\right)^{4} \Rightarrow \frac{R_{2}}{R_{1}} = \left(4\frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\frac{T_{1}}{T_{2}}\right)^{1/4}$$

با دانستن **شعاع و دمای فعلی خورشید** ($T_{1}\,,R_{1}$)، $T_{2} = T_{c}$ و توجه به ۲ برابر شدن چگالی مرکزی، خواهیم داشت:

$$R_{2} = 0/74R_{\odot}$$

صرف نظر کردن از تغییر ترکیبات هسته به پاسخ $R_{2} = 0.52R_{\odot}$ می‌انجامد.

ج) از قسمت الف می‌دانیم:

$$\left|U\right| \propto \frac{GM^۲}{R}$$

با استفاده از قضیه ویریال، در می‌یابیم که انرژی کل ستاره ضریبی از انرژی پتانسیل گرانشی آن است. پس می‌توان گفت:

$$E \approx -\frac{GM^۲}{R} \quad (I)$$

اندازه اختلاف انرژی ستاره در این مدت برابر با میزان انرژی تابش شده توسط آن است:

$$dE = -Ldt \Rightarrow \Delta E = E_۲ - E_۱ = -\int_۰^t Ldt \quad (*)$$

با توجه به رابطه $L = L_۰ + \alpha t$ خواهیم داشت:

$$\int_۰^t Ldt = \int_۰^t \left(L_\odot + \alpha t\right)dt = L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲} \quad (II)$$

با جایگذاری روابط (I) و (II) در رابطه $(*)$ خواهیم داشت:

$$GM^۲\left(\frac{۱}{R_۲} - \frac{۱}{R_۱}\right) = L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲} \quad (+)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{۲}{t^۲}\left[GM^۲\left(\frac{۱}{R_۲} - \frac{۱}{R_۱}\right) - L_\odot t\right] = \frac{۲GM^۲}{t^۲}\left(\frac{۱}{R_۲} - \frac{۱}{R_۱}\right) - \frac{۲L_\odot}{t}$$

با جایگذاری مقادیر جرم، شعاع اولیه و نهایی خورشید و $t = ۱۷Myr$ خواهیم داشت:

$$\alpha = -۵/۰۹ \times ۱۰^{۱۱}\frac{w}{s} = -۰/۰۴۲\frac{L_\odot}{Myr}$$

د) با استفاده از قانون استفان – بولتزمن:

$$L = ۴\pi R^۲\sigma T_e^۴ \Rightarrow T_e = \left(\frac{L}{۴\pi\sigma R^۲}\right)^{۱/۴}$$

اگر از رابطه $L = L_\odot + \alpha t$ استفاده کنیم:

$$T_e = \left(\frac{L_\odot + \alpha t}{۴\pi\sigma R^۲}\right)^{۱/۴}$$

با استفاده از رابطه $(+)$، می‌توان تابعیت زمانی شعاع ستاره را هم به دست آورد:

$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{GM^۲}\left(L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲}\right) + \frac{۱}{R_۰} \Rightarrow T_e = \left(\frac{L_\odot + \alpha t}{۴\pi\sigma}\left[\frac{۱}{GM^۲}\left(L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲}\right) + \frac{۱}{R_۰}\right]^۲\right)^{۱/۴}$$

با جایگذاری مقادیر مربوطه، T_e به دست می‌آید.

$$T_e = ۴۹۰۰K$$

سؤال ۷

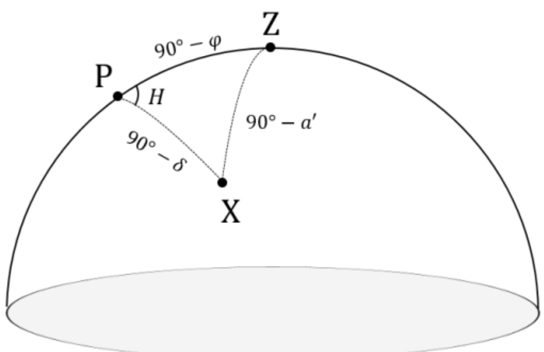
داده‌های سؤال عبارتند از:

$$t_{new} = ۸^h ۰۰^m ۱۲^s$$
$$\varphi_t = ۳۵^\circ ۴۲' N \quad , \quad l_t = ۵۱^\circ ۲۴' E \quad , \quad h_t = ۱۲۰۰ m$$
$$\varphi = ۲۴^\circ ۳۷' ۳۸'' S \quad , \quad l = ۷۰^\circ ۲۴' ۱۵'' w \quad , \quad h = ۲۶۳۵ m$$

لحظه تحویل سال زمانی است که میل و بعد خورشید هر دو صفر هستند. با توجه به مشخص بودن میل و عرض حغرافیایی، برای تعیین ارتفاع خورشید کافی است زاویه ساعتی آن از دید ناظر دوم را حساب کنیم. ابتدا با توجه به مختصات ارائه شده برای شهر تهران و روابط مربوط به زمان:

$$t = HAMS + ۱۲^h \quad (I)$$
$$ET = HA_\odot - HAMS = RAMS - RA_\odot = ۰ \Rightarrow HA_\odot = HAMS$$
$$\overset{(I)}{\Rightarrow} HA_{\odot,t} = t - ۱۲^h = ۲۰^h ۰۰^m ۱۲^s$$

t زمان محلی، $HAMS$ زاویه ساعتی خورشید میانگین، $HA_\odot$ زاویه ساعتی خورشید، $RAMS$ بعد خورشید میانگین، $RA_\odot$ بعد خورشید و ET تعدیل زمان است. توجه کنید با توجه به اعمال ساعت تابستانه در ساعت ۲۳:۵۹ روز اول فروردین، نیازی به در نظر گرفتن ساعت تابستانه نیست.

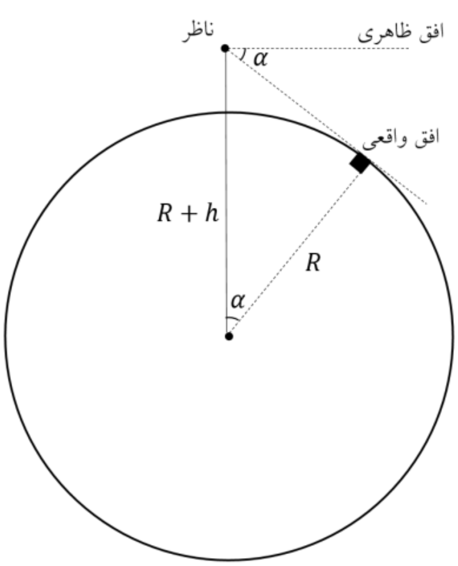


حال زاویه ساعتی از دید ناظر را به دست می‌آوریم. مطابق شکل:

$$HA_\odot = HA_{\odot,t} - \Delta l = ۱۱^h ۵۲^m ۵۹^s$$

برای حل مثلث کروی مقابل کافی است از رابطه کسینوس استفاده کنیم:

$$\sin a' = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H$$
$$\Rightarrow a' = -۶۵ / ۳۱^\circ$$



به دلیل افت ناشی از ارتفاع ناظر، ارتفاع واقعی خورشید کمی بیشتر است. برای محاسبه میزان افت چنین عمل می‌کنیم:

$$\cos\beta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \beta = ۱ / ۶۵^\circ$$

مقدار نهایی ارتفاع برابر است با:

$$a = a' + \beta \Rightarrow a = -۶۳^\circ ۴۰'$$

سؤال ۸

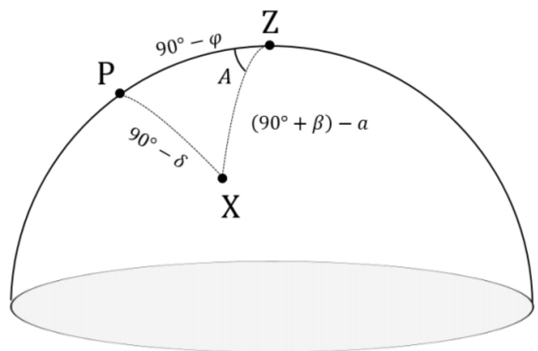
داده‌های سؤال عبارتند از:

$$\varphi_۱ = ۱۹^\circ\, ۴۵'\, ۳۵''\, N \quad , \quad l_۱ = ۱۵۵^\circ\, ۲۸'\, ۳۰''\, W \quad , \quad h_۱ = ۴۱۴۵m$$
$$\varphi_۲ = ۲۴^\circ\, ۳۷'\, ۳۸''\, S \quad , \quad l_۲ = ۷۰^\circ\, ۲۴'\, ۱۵''\, W \quad , \quad h_۲ = ۲۶۳۵m$$

الف) در این مسأله هر دو ناظر دارای افا افق هستند. در این شرایط مجموع ارتفاع و فاصله سرسویی اجرام برابر با $۹۰^\circ + \beta$ خواهد بود که β میزان افت افق است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos\beta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \beta_۱ = ۲/۰۶^\circ \quad , \quad \beta_۲ = ۱/۶۵^\circ$$

برای به دست آوردن میل ستاره مورد نظر، کافی است در مثلث مقابل از رابطه کسینوس استفاده کنیم.

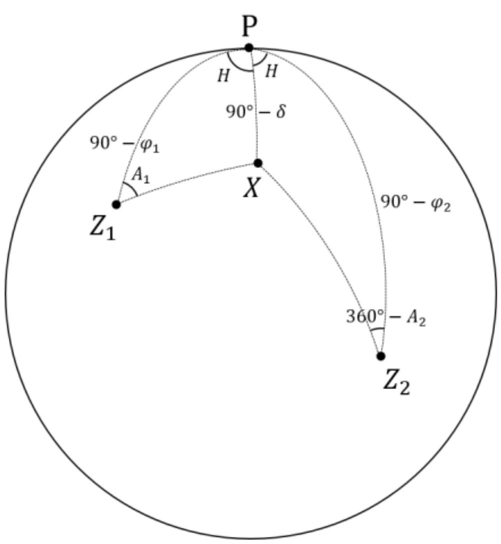


$$\sin\delta = \sin(a-\beta_۱)\sin\varphi_۱ + \cos(a-\beta_۱)\cos\varphi_۱\cos(۳۶۰^\circ - A)$$
$$\Rightarrow \delta = ۴۵/۸۵^\circ$$

مقدار میل بدون در نظر گرفتن افت افق، $\delta = ۴۵/۲۰^\circ$ به دست می‌آید.

ب) انتقال از رصدخانه ۱ به ۲ ممکن نیست. هنگام انتقال از رصدخانه ۲ به ۱ ، اندازه زاویه ساعتی ستاره از دید دو رصدخانه برابر است با:

$$H = \frac{l}{۲} = ۴۲/۵۴^\circ$$



با استفاده از روابط کروی در مثلث های ذکر شده، می‌توان مقادیر سمت و ارتفاع را محاسبه کرد.

در مثلث $PZ_۱X$ داریم:

کسینوس:
$$\sin(a_۱ - \beta_۱) = \sin\delta\sin\varphi_۱ + \cos\delta\cos\varphi_۱\cos H$$
$$\Rightarrow a_۱ = \beta_۱ + \sin^{-۱}(\sin\delta\sin\varphi_۱ + \cos\delta\cos\varphi_۱\cos H)$$

چهارجزیی:
$$\sin\varphi_۱\cos H = \cos\varphi_۱\tan\delta - \sin H\cot A_۱$$
$$\Rightarrow A_۱ = \tan^{-۱}\left(\frac{\sin H}{\cos\varphi_۱\tan\delta - \sin\varphi_۱\cos H}\right)$$

در مثلث $PZ_۲X$ داریم:

$$\sin(a_۲-\beta_۲)=\sin\delta\sin\varphi_۲+\cos\delta\cos\varphi_۲\cos H$$

$$\Rightarrow a_۲=\beta_۲+\sin^{-۱}(\sin\delta\sin\varphi_۲+\cos\delta\cos\varphi_۲\cos H)$$

کسینوس: $$\sin\varphi_۲\cos H=\cos\varphi_۲\tan\delta+\sin H\cot A_۲$$

$$\Rightarrow A_۲=\tan^{-۱}\left(\frac{\sin H}{\sin\varphi_۲\cos H-\cos\varphi_۲\tan\delta}\right)$$

ج) جدول کامل شده به صورت زیر است (ردیف دوم، مقادیر محاسبه شده بدون افت افق هستند.) :

$A_۱$	$a_۱$	$A_۲$	$a_۲$
$۴۳/۱۹^\circ$	$۴۸/۵۸^\circ$	$۳۳۱/۴۷^\circ$	$۱۱/۳۰^\circ$
$۴۴/۰۶^\circ$	$۴۶/۷۶^\circ$	$۳۳۱/۰۶^\circ$	$۱۰/۱۵^\circ$

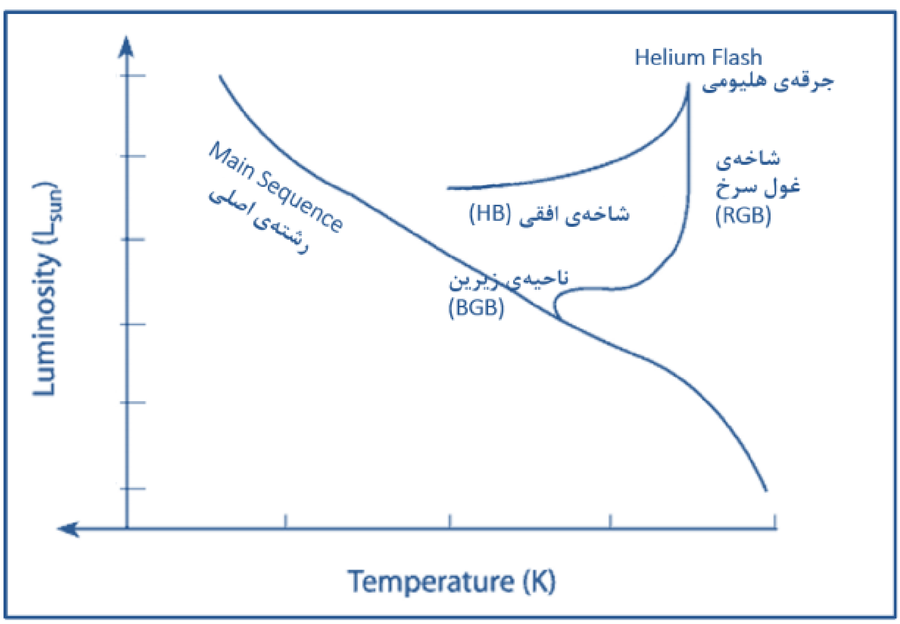
سؤال ۹

داده های سؤال عبارتند از :

$$M=M_\odot \quad , \quad M_{c,۰}=۰.۲M_\odot \quad , \quad L_۰=۱۰L_\odot$$

$$Y=۰/۳ \quad , \quad Z=۰/۰۰۱ \quad , \quad T_{flash}=۱۰^۸K$$

الف) تحول ستاره در نمودار $H-R$ به شکل زیر است.



ب) ابتدا مقدار k را در رابطه با $L=kM_c^۸$ به دست می‌آوریم:

$$k=\frac{L_۰}{M_{c,۰}^۸}=۳/۹۱\times۱۰^۶\frac{L_\odot}{M_\odot^۸}$$

سپس ، با استفاده از رابطه ارائه شده ، جرم نهایی هسته را به دست می‌آوریم:

$$M_c = ۰/۴۷۶ - ۰/۲۲۱(Y - ۰/۳) - ۰/۰۰۹(۳ + \log Z) - ۰/۰۲۳(M - ۰/۸)$$
$$\Rightarrow M_c = ۰/۴۷۱ M_\odot$$

در مدت زمان dt، جرمی برابر است با dM_c در همجوشی مشارکت می‌کند.

$$dE = Ldt = ۰/۰۰۷ \times dM_c \times c^۲ \quad , \quad L = kM_c^۸$$
$$dt = \frac{۰/۰۰۷c^۲}{k}\frac{dM_c}{M_c^۸} \Rightarrow \int_۰^{t_{RGB}} dt = \frac{۰/۰۰۷c^۲}{k}\int_{M_{c,۰}}^{M_c} \frac{dM_c}{M_c^۸}$$
$$\Rightarrow t_{RGB} = \frac{۰/۰۰۷c^۲}{k}\left[\frac{M_c^{-۷}}{-۷}\right]_{M_{c,۰}}^{M_c} = \frac{c^۲}{۱۰۰۰k}\left(\frac{۱}{M_{c,۰}^۷} - \frac{۱}{M_c^۷}\right) \Rightarrow t_{RGB} = ۲۹۰\, Myr$$

ج) با فرض ثابت ماندن Y و Z در این مدت و استفاده از رابطه داده شده ، مدت زمان حضور در شاخه افقی را محاسبه می‌کنیم:

$$\log t_{HB} = ۱/۷۹۵ + ۰/۵۰۶(Y - ۰/۳) + ۰/۰۲۲(\log Z + ۳) + ۰/۰۷۷(M - ۰/۸)$$
$$\Rightarrow t_{HB} = ۶۰\, Myr$$

با توجه به مدت زمان بیشتر حضور ستارگان در شاخه غول سرخ، انتظار می‌رود فراوانی این نوع ستارگان بیشتر باشد.

ماخ سؤال ۱۰

الف) طبق صورت سؤال، مقدار چگالی در زمان حال از رابطه زیر به دست می‌آید (کیهان تخت) :

$$\rho_۰ = \frac{۳H_۰^۲}{۸\pi G} \Rightarrow \rho_۰ = ۱/۰۰ \times ۱۰^{-۲۶}$$

در رابطه‌ی بالا $H_۰$ **ثابت هابل** است. با استفاده از پایستگی جرم در کیهان ماده غالب (شامل هیدروژن):

$$\rho a^۳ = \rho_۰ a_۰^۳$$

با استفاده از رابطه قرمز گرایی وضریب مقیاس ($۱ + z = \frac{a_۰}{a}$):

$$\rho(z) = \rho_۰(۱ + z)^۳ \quad , \quad \rho = nm$$
$$\Rightarrow n = n_۰(۱ + z)^۳ = \frac{\rho_۰}{m_H}(۱ + z)^۳$$

m_H **جرم هیدروژن** است. به ازای $z = ۶$ خواهیم داشت:

$$n = ۲/۰۵ \times ۱۰^۳ m^{-۳}$$

ب) آهنگ تابش فوتون توسط هر کوازار برابر با $\dot{N}_Q = ۱۰^{۵۶} s^{-۱}$ است. در صورتی که چگالی تعداد کوازارها n_Q باشد. آهنگ ساطع شدن فوتون ها در واحد حجم برابر است با :

$$\dot{n}_\gamma = \dot{N}_Q n_Q$$

آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون ها با چگالی عددی n_p، برابر با $a\,n_p$ است. در صورتی که چگالی عددی الکترون‌های آزاد n_e باشد، آهنگ بازترکیب الکترون ها در واحد حجم برابر است با :

$$\dot{n}_e = a\,n_p\,n_e = a\,n_p^{۲}$$

که تساوی آخر به خاطر یونیزه بودن عالم (برابر تعداد الکترون های آزاد و پروتن ها) برقرار است.

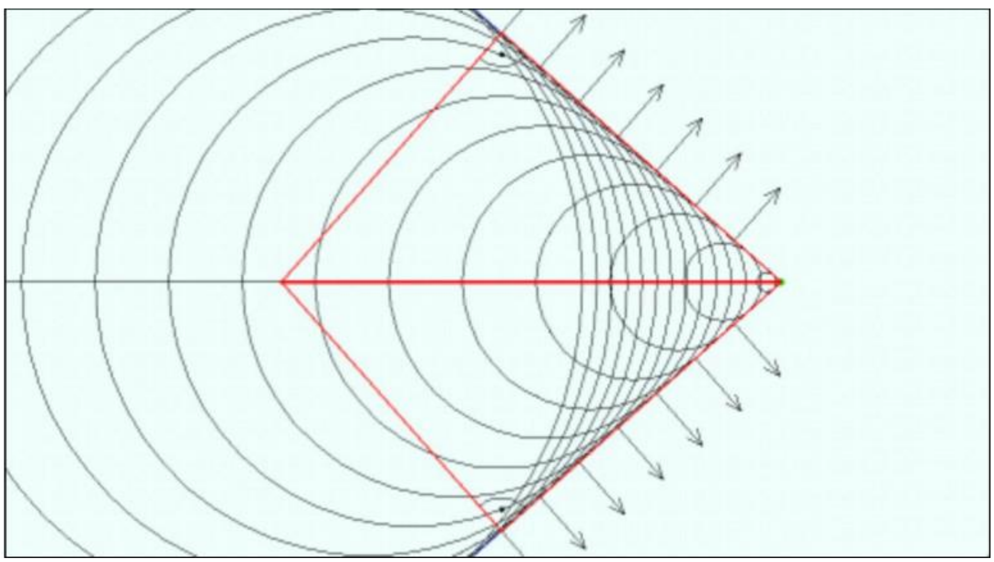
با فرض این که هر فوتون در نهایت یک اتم را یونیزه کند، برای یونیزه بودن کیهان لازم است آهنگ تولید فوتون (یونش اتم ها) از آهنگ بازترکیب بیشتر برابر باشد:

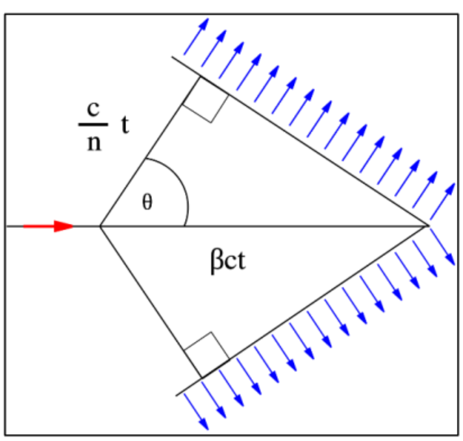
$$\dot{n}_\gamma \geq \dot{n}_e \Rightarrow \dot{N}_Q n_Q \geq a\,n_p^{۲} \Rightarrow n_Q \geq \frac{a\,n_p^{۲}}{\dot{N}_Q}$$

$$\Rightarrow n_Q \geq ۱/۲۶ \times ۱۰^{-۶۸} m^{-۳} = ۳/۷۲ \times ۱۰^{-۱۰} kpc^{-۳}$$

سوال ۱۱

شکل زیر نحوه شکل گیری مخروط چرنکف را نمایش می‌دهد:





ذره از سمت چپ شروع به حرکت کرده و بیشتر بودن سرعت ان از سرعت پیشروی جبهه های موج ، موجب شکل گیری مخروطی با زاویه نیم رأس θ می‌شود. اگر مبدأ زمانی حرکت ذره را $t = ۰$ در نظر بگیریم، مسافت پیموده شده توسط آن $x_p = vt$ و مسافت پیموده شده توسط اولین جبهه ی نور $x_\gamma = \frac{c}{n} t$ است.

با توجه به شکل، زاویه چرنکف ($Cherenkoa\ Angle$) چنین محاسبه می‌شود:

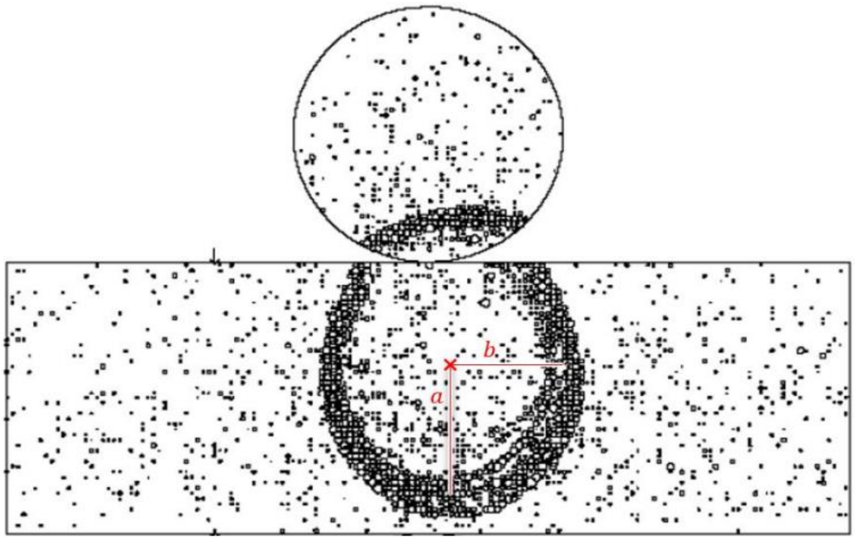
$$\cos\theta = \frac{x_\gamma}{x_p} = \frac{c}{nv}$$

جایگذاری $n_۱ = ۱/۰۰۰۲۹$ برای هوا و $n_۲ = ۱/۳۳۳$ برای آب نتیجه می‌دهد:

$$\theta_1 = ۱/۴^\circ \qquad , \qquad \theta_2 = ۴۱/۴^\circ$$

ب) با رسیدن مخروط تابش (دارای زاویه نیم رأس $\theta - ۹۰^\circ$) به دیواره‌های آشکارساز و روشن شدن لامپ ها ، حلقه ی چرنکف ($Cherenkov\,Ring$) شکل می‌گیرد. توجه کنید که قطر این حلقه به $\theta - ۹۰^\circ$ مربوط می‌شود.

حاصل تقاطع مخروط چرنکف با دیواره مخزن، چیزی شبیه به یک بیضی است. در ادامه با صرف نظر از انحنای مخزن، فرض می‌کنیم این شکل بیضی باشد.

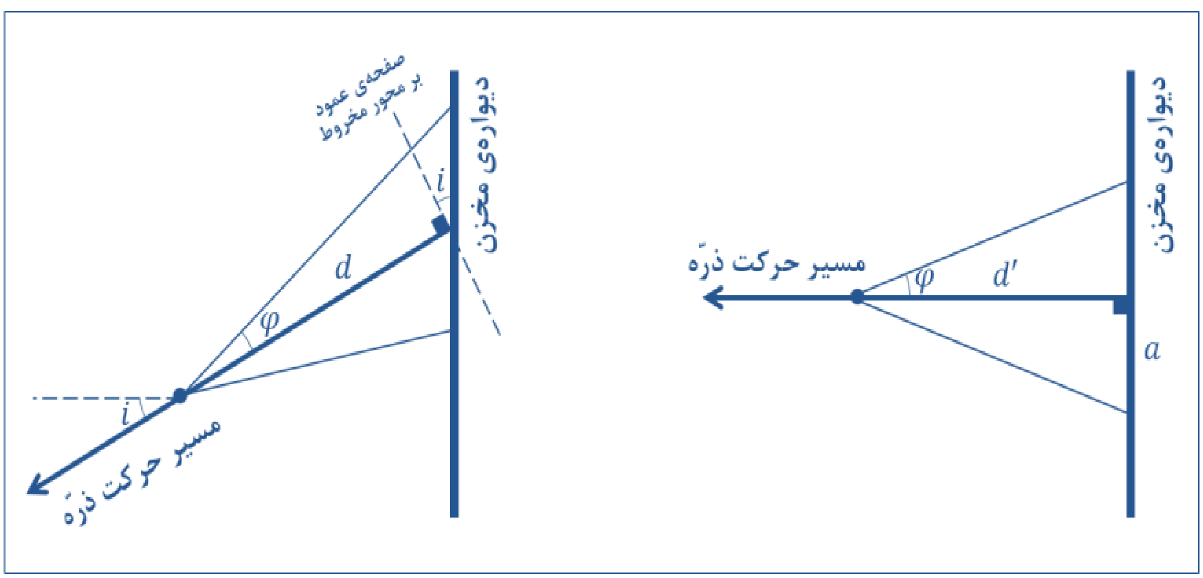


با استفاده از مقیاس‌های ارائه شده:

$$a = ۱۶/۰\,m \qquad , \qquad b = ۱۳/۵\,m$$

در صورتی که مسیر حرکت ذره عمود بر دیواره مخزن بود، دایره از لامپ ها به شعاع a روشن می‌شد. حال که شکل حلقه بیضی است، می‌توان زاویه انحراف مسیر ذره از مسیر عمود (i) را چنین محاسبه کرد:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$



با توجه به شکل بالا ($\varphi = ۹۰^\circ - \theta$):

$$d' = a\cot\theta \qquad , \qquad d = d'\sec i$$

$$\Rightarrow d = \frac{a}{\tan\varphi\cos i} = \frac{a^{۲}\tan i}{b} \Rightarrow d = ۱۶/۷m$$

سؤال ۱۲

داده های سؤال عبارتند از:

$$e = ۰ \quad , \quad r, m_J$$

الف) سرعت مشتری به دلیل اختلال، f برابر می‌شود. در نتیجه انرژی مکانیکی آن برابر است با:

$$E' = K' + U' = \frac{۱}{۲}m_j(fv)^{۲} - \frac{GM_\odot m_J}{r} \quad , \quad v^{۲} = \frac{GM_\odot}{r}$$

$$\Rightarrow -\frac{GM_\odot m_J}{۲a'} = \frac{f^{۲}}{۲}\frac{GM_\odot m_J}{r} - \frac{GM_\odot m_J}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a'} = \frac{۱}{r}(۲ - f^{۲}) \Rightarrow a' = \frac{r}{۲ - f^{۲}} \quad (I)$$

با استفاده از روابط مقطع مخروطی خواهیم داشت:

$$a'(۱ - e'^{۲}) = \frac{h^{۲}}{\mu} \quad (*)$$

در این رابطه h تکانه زاویه‌ای واحد جرم و μ پارامتر گرانشی است. با توجه به عمود بودن بردار مکان و سرعت در مدار دایروی، مقدار h چنین به دست می‌آید:

$$h = \left|\vec{r} \times (f\vec{v})\right| = rfv \quad (II)$$

با توجه به قرار گیری خورشید بر مرکز جرم، $\mu = GM_\odot$ است. با جایگذاری معادلات (I) و (II) در معادله $(*)$ خواهیم داشت:

$$\frac{GM_\odot r}{۲ - f^{۲}}(۱ - e'^{۲}) = r^{۲}f^{۲}\frac{GM_\odot}{r} \Rightarrow e' = \sqrt{۱ - ۲f^{۲} + f^{۴}} = ۱ - f^{۲}$$

ب) در حد $f \to ۰$ خواهیم داشت:

$$\lim_{f\to۰} a' = \frac{r}{۲} \quad , \quad \lim_{f\to۰} e' = ۱$$

مدار به شکل یک خواهد بود.

ج) مداری که در آن اثرات کشندی وجود ندارد، یک مدار دایروی است. پس $e'' = ۰$. با توجه به اینکه هنگام اعمال اثرات کشندی، تکانه زاویه‌ای پایسته باقی می‌ماند، با فرض ثابت ماندن سرعت زاویه‌ای چرخشی مشتری در این مدت خواهیم داشت:

$$h' = h'' \Rightarrow GM_\odot a'(۱ - e'^{۲}) = GM_\odot a'' \Rightarrow a'' = a'(۱ - e'^{۲})$$

د) ابتدا رابطه r'' با r'_p را به دست می‌آوریم:

$$a'' = a'(۱ - e')(۱ + e') \quad , \quad r'_p = a'(۱ - e')$$

$$\Rightarrow a'' = (۱ + e')r'_p$$

در حد $e' \to ۱$ خواهیم داشت:

$$\lim_{e' \to ۱} r'' = ۲r'_p$$

توجه شود که $e' \to ۱$ الزاماً معادل با $f \to ۰$ نیست!

ه) انرژی تلف شده توسط اثرات کشندی، برابر با اختلاف انرژی مکانیکی مدار نهایی و مدار اولیه است.

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_\odot m_J}{۲}\left(\frac{۱}{r_f} - \frac{۱}{r_i}\right)$$

مقدار $r_f = ۰/۰۵\ AU$ و $r_i = ۵\ AU$ است. با فرض یکنواخت بودن توزیع چگالی، اندازه انرژی خودگرانشی مشتری برابر است با:

$$\left|U_J\right| = \frac{۳}{۵}\frac{Gm_J^۲}{R_J}$$

در نتیجه:

$$\frac{\Delta E}{\left|U_J\right|} = \frac{۵}{۶}\frac{M_\odot}{m_J}\frac{R_J(r_i - r_f)}{r_i r_f} \approx ۸/۵$$

مشتری به واسطه قفل مداری انرژی‌ای آزاد می‌کند که از انرژی پتانسیل گرانشی‌اش بیشتر است. چگونگی آزاد شدن این انرژی، معمایی برای دانشمندان است.