جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

# دفترچه سوالات به همراه پاسخ تشریحی
# مرحله دوم
# یازدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم اخترفیزیک سال ۱۳۹۳

| تعداد سوالات تشریحی | مدت آزمون (دقیقه) |
|---|---|
| ۱۰ | ۲۴۰ |

**توضیحات مهم**

**استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.**

**تذکرات پیش از آزمون:**

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. درصورتی‌که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد. بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید. به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام شما صادرشده است. امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصحیحن، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش شدن دایره‌ها در چهارگوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط کمیته‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک باشگاه دانش‌پژوهان جوان تهیه شده و **ماخ** صرفاً آن را بازنشر کرده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

## ثوابت فیزیکی و نجومی

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | ثابت جهانی گرانش | $۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}$ |
| $c$ | سرعت نور | $۳\times۱۰^{۸}ms^{-۱}$ |
| $pc$ | پارسک | $۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}m$ |
| $Au$ | واحد نجومی | $۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}m$ |
| $Ly$ | سال نوری | $۹/۴۶\times۱۰^{۱۵}m$ |
| $R_{\odot}$ | شعاع خورشید | $۶/۹۶\times۱۰^{۸}m$ |
| $R_{\oplus}$ | شعاع زمین | $۶/۳۸\times۱۰^{۶}m$ |
| | شعاع ماه | $۱/۷۴\times۱۰^{۶}m$ |
| | شعاع مداری ماه | $۳/۸۴\times۱۰^{۸}m$ |
| $M_{\oplus}$ | جرم زمین | $۵/۹۷\times۱۰^{۲۴}kg$ |
| $T_{\odot}$ | دمای خورشید | $۵۷۷۷\,K$ |
| $L_{\odot}$ | درخشندگی خورشید | $۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}W$ |
| | ثابت خورشیدی | $۱/۳۷\times۱۰^{۳}Wm^{-۲}$ |
| $m_{\odot}$ | قدر ظاهری خورشید | $-۲۶/۸$ |
| $H$ | ثابت هابل | $۷۰\,km\,s^{-۱}Mpc^{-۱}$ |

۱- یکی از روشهای فاصله‌یابی استفاده از موج ضربه‌ی ایجاد شده در اطراف ابرنواخترها است. این روش به دلیل مستقل بودن از روش‌های دیگر فاصله‌یابی، به عنوان روشی برای کالیبراسیون روش‌های استاندارد فاصله‌یابی ابرنواخترها مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابرنواختری در سال ۱۹۰۹ مشاهده شده است. در حال حاضر (یعنی سال ۲۰۱۵) گاز خارج شده از آن در شعاع ۲۰ ثانیه‌ی قوسی اطراف آن دیده می‌شود. سرعت انبساط این گاز در ابتدای انفجار در حدود ۱۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه بوده و به طور خطی افت کرده است؛ به طوری که سرعت انبساط کنونی آن به حدود ۴۰۰ کیلومتر بر ثانیه رسیده است.

الف: سرعت متوسط انبساط گاز در این مدت چند کیلومتر بر ثانیه است؟

ب: این ابرنواختر در چه فاصله‌ای از ما قرار دارد؟ پاسخ خود را برحسب پارسک بیان کنید. (۲۵ نمره)

۲- در پروژه مساحی GAIA نزدیک به یک میلیارد ستاره اخترسنجی خواهد شد؛ که به کمک نتایج آن فواصل ستاره‌ها با دقت بسیار بالایی و به روش اختلاف‌منظر به‌دست خواهند آمد. در این پروژه، خطای اندازه‌گیری در اخترسنجی ستاره‌هایی با قدر ظاهری $m = ۱۶$ برابر با ۲۳ میکروثانیه‌ی قوسی است.

درصد خطا در اندازه‌گیری فاصله‌ی ستاره‌های خورشیدگون با قدرمطلق $M_V = ۵$ ، که با قدر ظاهری ۱۶ دیده می‌شوند را بدست آورید. (۳۰ نمره)

۳- در روز ۱۵ اردیبهشت سال ۱۳۹۴ و در لحظه‌ی ظهر شرعی (۱۳:۰۱:۰۴) طول سایه‌ی شاخصی عمودی در محله‌ای واقع در تهران ( $۳۵^\circ ۴۵' N, ۵۱^\circ ۲۵' E$ ) برابر ۳۰ سانتی‌متر است.

الف: منحنی میل خورشید را در طول یک سال رسم کنید. $\delta_{sun} \simeq ۲۳^\circ ۲۴' \sin(۲\pi / \mathrm{T})$

ب: طول این سایه راس ساعت ۱۶:۰۰ همان روز چند سانتی‌متر خواهد بود؟ (۳۰ نمره)

۴- تولید انرژی در خورشید از طریق همجوشی ۴ هیدروژن و تولید یک هلیوم است؛ که در این فرآیند تقریباً ۲۵ میلیون الکترون ولت (MeV) انرژی و ۲ ذره نوترینو تولید می‌شود. $(\mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{۴}\mathrm{He} + ۲۵\,\mathrm{mev})$

الف: تعداد نوترینوهای عبوری از هر سانتیمتر مربع از سطح زمین را محاسبه کنید.

ب: سطح مقطع برخورد نوترینوهای خورشیدی با یک هستک (پروتون یا نوترون؛ nucleon) برابر ( $۱۰^{-۴۵} \frac{cm^۲}{nucleon}$ ) است. به بدن یک انسان بالغ، به طور متوسط در طول یک سال چند نوترینو برخورد خواهد کرد؟

راهنمایی: سطح مقطع برخورد، مساحت موثر یک ذره با ذرات دیگر در هنگام برخورد با آنها است. (۳۵ نمره)

۵- در فرآیندهای همجوشی ستاره‌ای و در فرآیندی که اصطلاحاً به فرآیند $۳\alpha$ مشهور است؛ دو هسته‌ی هلیوم ۴ ( ${}^{۴}He$ ) به یکدیگر برخورد کرده و یک هسته‌ی برلیوم ۸ ( ${}^{۸}Be$ ) تولید می‌کنند. از آنجایی که نیمه عمر ${}^{۸}Be$ بسیار کوتاه است، ( $۱۰^{-۱۶}$ ثانیه)، این هسته مجدداً به دو ذره‌ی ${}^{۴}He$ واپاشی می‌کند. این فرایند به دفعات تکرار می‌شود تا زمانی که قبل از واپاشی ${}^{۸}Be$ تولید شده، یک ${}^{۴}He$ دیگر به آن برخورد کند و یک هسته‌ی پایدار کربن ۱۲ ( ${}^{۱۲}C$ ) تولید شود. ${}^{۴}He + {}^{۸}Be \rightarrow {}^{۱۲}C + ۷/۳۷ MeV$

به همین خاطر چنین فرآیندی به چگالی‌های بالا نیاز دارد. رابطه‌ی واپاشی ${}^{۸}Be$ به صورت روبرو است:

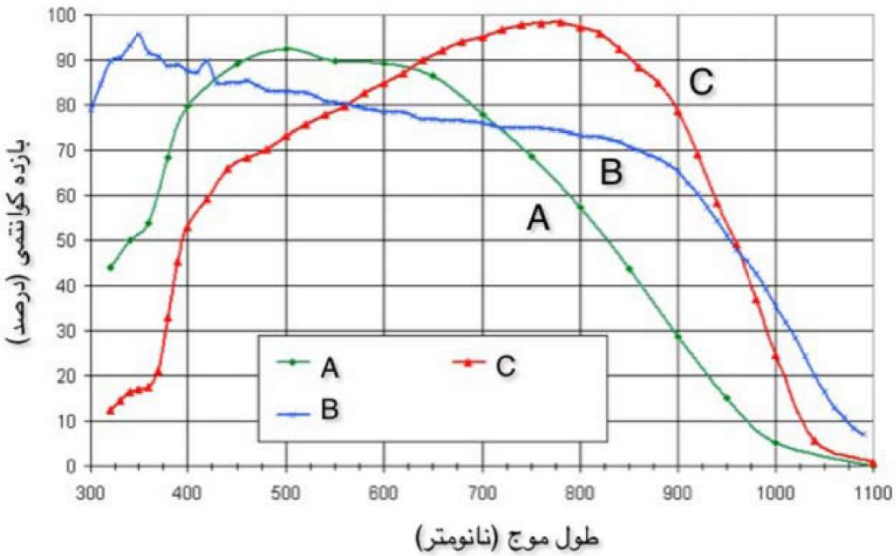
$${}^{۸}Be \rightarrow {}^{۴}He + {}^{۴}He + ۹۳/۷ keV$$

الف: در طی فرآیند $۳\alpha$ به ازای هر هستک، چه مقدار انرژی آزاد می‌شود؟

ب: دمای ذرات آلفای ( ${}^{۴}He$ ) تولید شده از واپاشی ${}^{۸}Be$ در این ستاره چند کلوین است؟

ج: سرعت ذرات آلفای ( ${}^{۴}He$ ) تولید شده از واپاشی ${}^{۸}Be$ در این شرایط چه کسری از سرعت نور است؟ (۴۰ نمره)

۶- منجمی سال‌ها به مطالعه‌ی شدت خطوط نشری $H_\alpha$ و $H_\beta$ که به ترتیب دارای طول موج‌های ۶۵۶۳ آنگستروم و ۴۸۶۱ آنگستروم پرداخته است. وی اخیراً آشکارساز سی‌سی‌دی (CCD) خود را از مدل B به مدل C تغییر داده است. در زیر توزیع بازدهی کوانتمی این دو سی‌سی‌دی (حساسیت آشکارساز در مقابل فوتون‌های ورودی به سطح آن) نشان داده شده است.




الف: این منجم تنها با تغییر سی‌سی‌دی از B به C باید چه تغییری در زمان نوردهی جدیدش نسبت به گذشته ایجاد کند تا نسبت سیگنال به نویز در رصدهای وی تغییری نکند؟ پاسخ عددی با خطای بیش از ۵ درصد قابل قبول نیست.

ب: این منجم قبلاً برای نورسنجی از فیلتر باریکی به پهنای ۲۰ آنگستروم در طول موج مرکزی ۸۵۰۰ آنگستروم استفاده می‌کرد. اکنون با تغییر سی‌سی‌دی، پهنای فیلترش در همان طول موج به نصف کاهش یافته است. با همان زمان نوردهی قبلی، نسبت سیگنال به نویز در نورسنجی وی به چه نسبتی تغییر خواهد کرد؟

راهنمایی: برای سادگی از همه عوامل نویز سی‌سی‌دی صرف‌نظر کنید. به عبارت دیگر تنها سیگنال موجود مربوط به چشمه آسمانی است که ویژگی آماری آن از توزیع پواسونی (Poisson Distribution) تبعیت می‌کند؛ که در آن انحراف‌معیار توزیع ( Standard Deviation) برابر است با جذر مقدار متوسط (Mean Value) یا همان مقدار انتظاری رویدادها است. (۴۰ نمره)

۷- ماهواره‌ای به جرم m و سطح مقطع A در مداری دایره‌ای به شعاع r به دور زمین در حرکت است.

الف: انرژی ماهواره را محاسبه کنید.

ب: جو به چگالی $\rho$ ، نیروی اصطکاکی ثابت و ضعیف f به ماهواره اعمال می‌کند. تغییر نسبی شعاع مدار را طی یک دوره‌ی تناوب محاسبه کنید.

ج: جو ساکن است؛ و پس از برخورد الاستیک به ماهواره در جهت حرکت ماهواره حرکت خواهد کرد (حرکت یک‌بعدی). نیروی اصطکاک فوق را به طور لحظه‌ای محاسبه کنید. (۴۵ نمره)

۸- کهکشانی کروی و با توزیع جرمی یکنواخت متشکل از $۱۰^{۱۱}$ ستاره‌ی خورشیدگون با شعاع $R = ۱۰kpc$ است. ستاره‌ها به صورت کاتوره‌ای در این کهکشان حرکت می‌کنند.

الف: چگالی جرمی این کهکشان را برحسب جرم خورشید بر پارسک مکعب بدست آورید.

ب: ستاره‌ای را در نظر بگیرید که در این کهکشان، در راستای یکی از قطرها در حال حرکت نوسانی است. رابطه‌ای برای دوره‌ی تناوب نوسان این ستاره بدست آورید و مقدار عددی آن را برحسب سال بیان کنید.

ج: این ستاره در طول حرکت خود، به طور متوسط پس از چند سال ممکن است از کنار ستاره‌ای دیگر عبور کند به طوری که فاصله‌اش از آن ستاره کمتر از یک واحد نجومی شود؟ (۴۵ نمره)

۹- ماخ ابر اورت پوسته‌ای کروی به شعاع $R = ۱۰^۵ AU$ ($۱۰^۵$ واحد نجومی) بوده، و شامل تعداد زیادی دنباله‌دار است. فرض کنید ستاره‌ای نوعی با جرم متوسط نصف جرم خورشید $(M = ۰/۵ M_{sun})$ با سرعت متوسط ۳۰ کیلومتر بر ثانیه $(v = ۳۰ km/s)$ وارد ابر اورت شود.

الف: این ستاره از چه فاصله‌ای (برحسب واحد نجومی) باید از کنار یکی از دنباله‌دارهای این ابر عبور کند، به طوری که آن دنباله‌دار بر اثر برهمکنش گرانشی با این ستاره، از ابر اورت خارج شود؟ فرضیات لازم برای حل این مسئله را ارائه دهید.

ب: اگر فرض کنیم عمر منظومه شمسی ۴ میلیارد سال $(T = ۴ Gyr)$ باشد، چه کسری از دنباله‌دارهای موجود در ابر اورت با این سازوکار از این ابر خارج می‌شوند؟ چگالی عددی ستاره‌ای در اطراف منظومه شمسی، ۰/۱ ستاره بر پارسک مکعب $(n = ۰/۱ star/pc^۳)$ است.

ج: فرض کنیم شعاع ابر اورت $۱۰^۴ AU$ باشد؛ کسر محاسبه شده در قسمت (ب) چقدر خواهد شد؟ (۴۵ نمره)

۱۰- ماخ سازمان فضایی اروپا در مارس ۲۰۱۵ میلادی، متغیری قیفاووسی به نام ساما (SAMA) کشف کرده است، این سازمان، طول l و عرض b کهکشانی ساما را در دستگاه مختصات کهکشانی اندازه‌گیری کرده است.

$$(l, b) = (۵۷^\circ ۴۵' ۴۸'', ۳۷^\circ ۵۳' ۴۸'')$$

با توجه به این توضیحات به سوالات زیر پاسخ دهید:

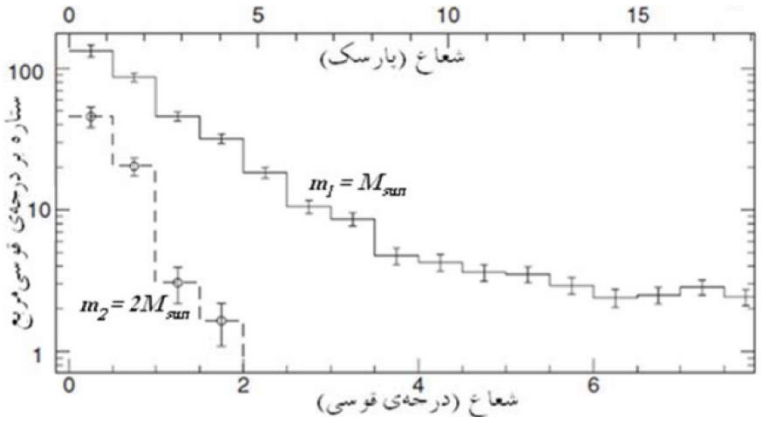
الف: مختصات کهکشانیِ ستاره قطبی برابر $(l, b) = (۱۲۳^\circ ۵۵' ۵۱'', ۲۸^\circ .۷' ۴۴'')$ و مختصات استوواییِ قطبِ شمالِ کهکشانی برابر $(\alpha, \delta) = (۱۲^h ۵۱^m ۲۷^s, ۲۷^\circ .۷' ۴۲'')$ است. بعد و میلِ ساما در دستگاه استوایی را بدست آورید.

ب: سازمان فضایی اروپا برای مطالعه‌ی بیشتر بر روی این ستاره، قصد ساختن رصدخانه‌ای را دارد. با توجه به مشکلاتِ جذبِ نورِ ستاره در جو زمین، صرفاً مکان‌هایی برای رصد این ستاره مناسب هستند که ارتفاع ستاره بتواند در آن محل از ۷۰ درجه بیشتر شود (توجه کنید که لزومی ندارد که در طی یک روز همیشه ارتفاع ستاره از ۷۰ درجه بیشتر باشد؛ کافی است فقط یک لحظه ارتفاع بیشتر از ۷۰ درجه شود.) بنابراین، عرض جغرافیایی رصدخانه در چه بازه‌ای می‌تواند باشد؟

ج: با توجه به اینکه اکثر سطح زمین را آب فرا گرفته است و سهم خشکی‌ها اندک است، بنابراین طول جغرافیایی رصدخانه فقط می‌تواند بین ۷۰ تا ۱۰۰ درجه شرقی قرار داشته باشد، بنابراین در چند درصد از سطح زمین، امکان ساخت چنین رصدخانه‌ای وجود خواهد داشت؟

د: بدترین زمان برای رصد، وقتیست که فاصله‌ی زاویه‌ای این ستاره با خورشید کمینه شود، در چه روزی این اتفاق رخ می‌دهد؟ فاصله‌ی زاویه‌ای ساما با خورشید در آن روز چقدر است؟ (۶۰ نمره)

۱۱- ماخ یک خوشه‌ی ستاره‌ای از دو نوع ستاره، با جرم‌های $m_۱ = M_{sun}$ و $m_۲ = ۲M_{sun}$ تشکیل شده است. در این خوشه که در آن جداسازی جرمی اتفاق افتاده است، ستاره‌های با جرم‌های مختلف، توزیع فضایی متفاوتی دارند، بطوری که ستاره‌های پرجرم‌تر در نواحی درونی‌تر خوشه تمرکز دارند.




اطلاعات لازم و نمودار چگالی سطحی عددی به صورت تابعی از شعاع، (فاصله از مرکز خوشه) برای این دو نوع ستاره در شکل زیر داده شده است.

الف: با توجه به شکل بالا فاصله‌ی این خوشه تا ناظر زمینی را برحسب پارسک محاسبه کنید؟

ب: مقدار جرم متوسط ستارگان، $(\langle m \rangle)$ برحسب فاصله از مرکز خوشه را محاسبه کنید و مقادیر عددی

آن را در جدول وارد کنید. در جدول، مقدار عددی جرم متوسط ستاره‌ها (برحسب جرم خورشید) در پنج ناحیه (فاصله از مرکز برحسب درجه، (درجه)r) خواسته شده است.

| r(درجه) | $\langle m \rangle$ |
|---|---|
| ۰/۲۵ | |
| ۰/۷۵ | |
| ۱/۲۵ | |
| ۱/۷۵ | |
| ۲/۲۵ | |

ج: فرض کنید رابطه‌ی جرم- درخشندگی به صورت $L\alpha M^{۳/۵}$ است. قدر ظاهری این خوشه را محاسبه کنید؟

د: منحنی جرم متوسط را برحسب فاصله از مرکز خوشه رسم کنید. (۵۵ نمره)

۱- الف) سرعت متوسط به راحتی به دست می‌آید:

$$\bar{v} = \frac{۱۰۰۰ + ۴۰۰}{۲} = ۷۰۰ km/s$$

ب) با فرض اینکه سرعت انبساط ثابت باقی بماند، خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{\bar{v}t}{d}$$

$$\alpha = \frac{۲۰}{۲۰۶۲۶۵} = \frac{۷۰۰ \times ۱۰۶ \times ۳ \times ۱۰^{۷} km}{d}$$

$$d = \frac{۲/۱ \times ۱/۰۶ \times ۱۰^{۱۲} \times ۲/۰۶ \times ۱۰^{۴}}{۲} km$$

$$\Rightarrow d = ۲ \times ۱۰^{۱۶} km = ۶۶۰ pc$$

۲- ابتدا فاصله ستاره‌ای با قدرمطلق ۵ و قدر ظاهری ۱۶ را به دست می‌آوریم:

$$\log d = \frac{m - M + ۵}{۵}$$

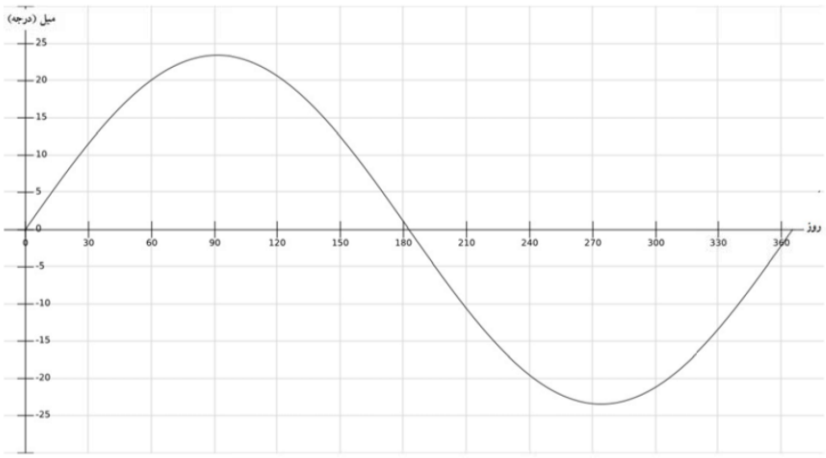
$$\log d = \frac{۱۶}{۵} \Rightarrow d = ۱/۵۸۴ \times ۱۰^{۳} pc$$

خطای اختلاف‌منظر به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{۱}{d}, \Delta\alpha = ۲۳ \times ۱۰^{-۶} \sec$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = ۲۳ \times ۱۰^{-۶} \times ۱/۵۸۴ \times ۱۰^{۳} = ۳/۶۴ \times ۱۰^{-۲}$$

۳- الف)




---

ب) ابتدا لازم است میل خورشید را برای روز ۱۵ اردیبهشت به دست آوریم:

$$t = ۱۵ + ۳۱ = ۴۶ days \Rightarrow \lambda_{\odot} = \frac{۴۶ \times ۳۶۰}{۳۶۵/۲۵} = ۴۵^{\circ}/۳۲$$

$$\delta_{\odot} = ۲۳^{\circ}۲۷' \times \sin \lambda_{\odot}$$

$$\Rightarrow \delta_{\odot} = ۱۶^{\circ} / ۶۸$$

در لحظه ظهر، خورشید در عبور بالایی قرار دارد. بنابراین ارتفاع آن برابر است با:

$$a = ۹۰ - \phi + \delta = ۷۱^{\circ} / ۰۸$$

می‌دانیم طول سایه شاخص عمودی به صورت زیر با زاویه ارتفاع رابطه دارد:

$$\tan a = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L \tan a = ۸۷ / ۵cm$$

که h اندازه شاخص است. حالا باید زاویه ساعتی خورشید در ساعت ۱۶:۰۰ را به دست آوریم:

$$H_{\odot} = ۱۶^{h}۰۰' - ۱۳^{h}۰۱' = ۲^{h}۵۹'$$

حال با نوشتن رابطه کسینوس‌ها در مثلث PZX، ارتفاع خورشید در آن لحظه به دست می‌آید:

$$\sin a = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta H$$

$$a = ۴۶^{\circ} / ۰۶$$

بنابراین طول سایه در این زمان به دست می‌آید:

$$L = \frac{h}{\tan a} = ۸۴ / ۳cm$$

۴- الف) ابتدا لازم است نرخ تولید هلیوم (تعداد هلیوم‌های تولید شده در هر ثانیه) را به دست آوریم:

$$n = \frac{L_{\odot}}{۲۵MeV / He} = \frac{۴ \times ۱۰^{۲۶} J / s}{۲۵ \times ۱۰^{۶} \times ۱ / ۶ \times ۱۰^{-۱۹} J / He} = ۱ \times ۱۰^{۳۸} He / s$$

بنابراین در هر ثانیه $۲ \times ۱۰^{۳۸}$ نوترینو تولید می‌شود. می‌دانیم نوترینوها همگی بدون جذب شدن از خورشید خارج می‌شوند. پس:

$$\frac{dN}{dS} = \frac{۲ \times ۱۰^{۳۸}}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۲ \times ۱۰^{۳۸}}{۴\pi (۱ / ۵ \times ۱۰^{۱۳} \text{ cm})^{۲}} = ۷ \times ۱۰^{۱۰} \frac{v}{cm^{۲}s}$$

ب) ابتدا تعداد هسته‌های بدن انسان بالغ را به دست می‌آوریم. جرم یک انسان بالغ را تقریباً ۸۰ کیلوگرم در نظر می‌گیریم:

$$N_{iuc} = \frac{M}{m_{nuc}} = \frac{۸۰kg}{۱ / ۶۷ \times ۱۰^{-۲۷} kg / nuc} = ۴ / ۸ \times ۱۰^{۲۸} nuc$$

حال تعداد برخوردها را به دست می‌آوریم:

$$N_{enc} = \frac{dN}{ds} \times \sigma \times N_{nuc} \times \Delta t$$

$$N_{enc} = ۷ \times ۱۰^{۱۰} \times ۱۰^{-۴۵} \times ۴ / ۸ \times ۱۰^{۲۸} \times ۳ / ۱۵ \times ۱۰^{۷}$$

$$\Rightarrow N_{enc} = ۱۰۶ v / year$$

پس تعداد حدود ۱۰۰ نوترینو در هر سال به اتم هسته‌های بدن انسان برخورد می‌کند.

۵- الف) واکنش دوم را معکوس کرده و با واکنش اول جمع می‌کنیم:

$$^{۴}He + ^{۴}He \rightarrow ^{۷}Be - ۹۳ / ۷keV$$

$$^{۴}He + ^{۸}Be \rightarrow ^{۱۲}C + ۷ / ۳۸MeV$$

$$E_{tot} = ۷۳۷۰ - ۹۳ / ۷ = ۷۲۷۶keV \Rightarrow \in = \frac{E_{tot}}{N} = \frac{۷ / ۲۸}{۳ \times ۱۲} = ۰ / ۶۱MeV / nuc$$

ب) مقدار انرژی تولید شده به ازای هر ذره آلفا در واکنش دوم برابر است با:

$$\underline{۹۳/۶keV} = ۴۷keV = ۴۷\times۱۰^{۳}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} = ۷/۵۲\times۱۰^{-۱۵}J$$

این مقدار را برابر انرژی جنبشی متوسط هر ذره آلفا قرار می‌دهیم:

$$۷/۵۲\times۱۰^{-۱۵} = \frac{۳}{۲}kT \Rightarrow T = ۳/۶\times۱۰^{۸} = ۳۶۰MK$$

ج) مانند قسمت قبل، انرژی به دست آمده را برابر انرژی جنبشی میانگین هر ذره قرار می‌دهیم:

$$\frac{v}{c} = \frac{۱/۵\times۱۰^{۶}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۵\times۱۰^{-۳} = ۰/۵\%$$

۶- الف) با توجه به آمار توزیع پواسونی، نسبت سیگنال به نویز به صورت زیر است.

$$(\mathrm{S}/\mathrm{N}) = \frac{QE\times R^{*}\times t}{\sqrt{QE\times R^{*}\times t}}$$

که در آن $R^{*}$ آهنگ فوتون‌های تولید شده در چشمه آسمانی است.

از آنجا که تغییری در چشمه ایجاد نشده، می‌توانیم بنویسیم:

$$(\mathrm{S}/\mathrm{N})_B = (\mathrm{S}/\mathrm{N})_C$$

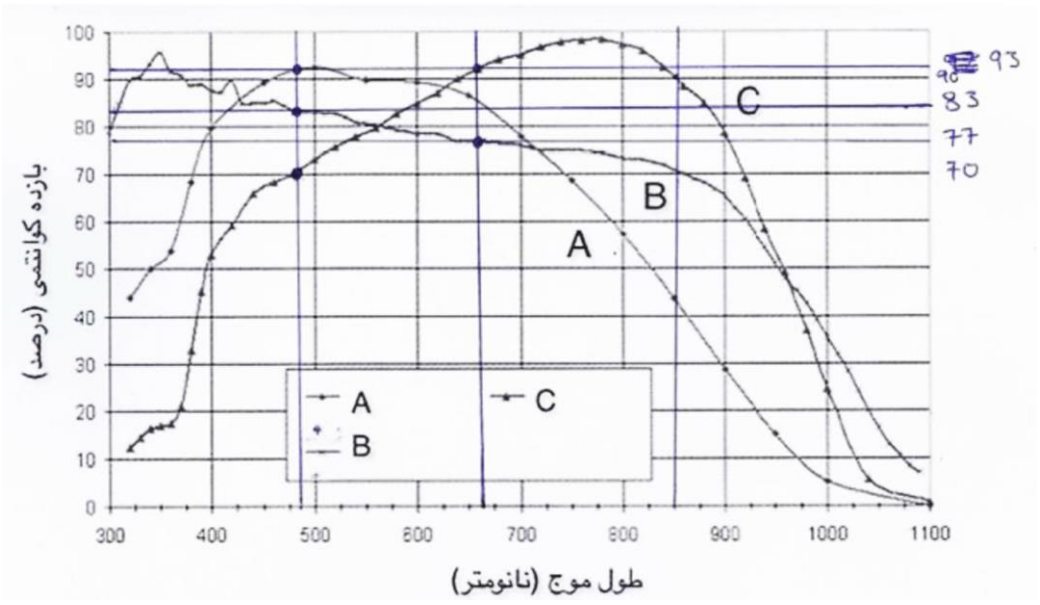
$$(\mathrm{QE})_B\times t_B = (\mathrm{QE})_C\times t_C$$

$$\frac{t_C}{t_B} = \frac{(\mathrm{QE})_B}{(\mathrm{QE})_C}$$

برای خطوط نشری $H_{\alpha}$ با طول موج ۶۵۶۳ داریم:

$$\frac{t_C}{t_B} = \frac{۹۳}{۷۷} = ۱/۲۱$$

بازه قابل قبول: (۱/۲۱ تا ۱/۲۶).




و برای خطوط نشری $H_{\beta}$ با طول موج ۴۸۶۱ نیز به همین ترتیب:

$$\frac{t_C}{t_B} = \frac{۷۰}{۹۳} = ۰/۸۴$$

بازه قابل قبول: (۰/۸۰ تا ۰/۸۸).

ب) اگر w پهنای فیلتر باشد، رابطه سیگنال به نویز سی‌سی‌دی به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\mathrm{S/N}) = \frac{QE \times R^* \times t \times w}{\sqrt{QE \times R^* \times t \times w}}$$

بنابراین نسبت سیگنال به نویز در دو حالت B و C به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{(\mathrm{S/N})_C}{(\mathrm{S/N})_B} = \frac{\sqrt{QE_C \times R^* \times t \times w_C}}{\sqrt{QE_B \times R^* \times t \times w_B}} = \sqrt{\frac{۹۰}{۷۰} \times \frac{۱}{۲}} = \sqrt{۰/۶۴} = ۰/۸$$

۷- ماخ الف)

$$E = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{mv^۲}{r} = \frac{GMm}{r^۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{GMm}{۲r}$$

$$E = \frac{GMm}{۲r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMn}{۲r}$$

ب)

$$W = \int F dx = \int -f dx = -f \times ۲\pi$$

$$E = E_. + W \Rightarrow -\frac{GMm}{۲(\mathrm{r}+\Delta\mathrm{r})} = -\frac{GMm}{۲r} - ۲\pi rf$$

$$\frac{۱}{(\mathrm{r}+\Delta\mathrm{r})} = \frac{۱}{r} + \frac{۴\pi rf}{GMm}$$

$$\frac{۱}{\mathrm{r}(\mathrm{r}+\Delta\mathrm{r})} = \frac{۱}{r^۲} + \frac{۴\pi rf}{GMm}$$

$$\frac{r-(\mathrm{r}+\Delta\mathrm{r})}{\mathrm{r}^۲(\mathrm{r}+\Delta\mathrm{r})} = \frac{۴\pi rf}{GMm}$$

$$\frac{(-\Delta\mathrm{r})}{\mathrm{r}^۲(\mathrm{r}+\Delta\mathrm{r})} = \frac{۴\pi rf}{GMm}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = -\frac{۴\pi f}{(\frac{GMm}{r^۲})}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، شعاع مداری ماهواره کاهش می‌یابد.

ج) فرض کنید یک ذره جو با جرم $m^۲$ به ماهواره با جرم $m_۱$ برخورد می‌کند. برخورد الاستیک فرض شده است. پس انرژی و تکانه خطی ثابت باقی می‌ماند.

$$\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱'^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲'^۲$$
$$m_۱v_۱ + m_۲v_۲ = m_۱v_۱' + m_۲v_۲'$$
$$\frac{m_۱(\mathrm{v}_۱ - \mathrm{v}_۱')}{m_۱(\mathrm{v}_۱^۲ - \mathrm{v}_۱'^۲)} = \frac{m_۲(\mathrm{v}_۲' - \mathrm{v}_۲)}{m_۲(\mathrm{v}_۲'^۲ - \mathrm{v}_۲^۲)}$$
$$v_۱ + v_۱' = v_۲' + v_۲$$

جو در ابتدا ساکن است $(\mathrm{v}_۲ = ۰)$:

$$v_۲' = v_۱ + v_۱'$$
$$m_۱v_۱ = m_۱v_۱' + m_۲(\mathrm{v}_۱ + \mathrm{v}_۱')$$
$$(\mathrm{m}_۱ + \mathrm{m}_۲)\,\mathrm{v}_۱' = (\mathrm{m}_۱ - \mathrm{m}_۲)\,\mathrm{v}_۱$$
$$v_۱' - v_۱ = \left[(\frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲}) - ۱\right]v_۱$$
$$\Rightarrow \Delta v_۱ = (-\frac{۲m_۲}{m_۱ + m_۲})\,\mathrm{v}_۱$$

کل تغییر سرعت ماهواره به صورت زیر به است که در آن $\Delta m$ کل جرمی است که به ماهواره برخورد می‌کند.

$$\Delta v_۱ = (-\frac{۲\Delta m}{m_۱ + \Delta m})\,\mathrm{v}_۱$$

می‌توانیم در مخرج کسر از $\Delta m$ در مقابل $m_۱$ صرف‌نظر کنیم. حال نیروی وارد شده به ماهواره برابر است با:

$$f = m_۱\frac{\Delta v_۱}{\Delta t} = m_۱(-\frac{۲\Delta m\,/\,\Delta t}{m_۱})\,\mathrm{v}_۱ = -۲v_۱\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

چگالی جو برابر $\rho$ فرض شده است. بنابراین:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta v}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho A\frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho A v_۱$$
$$f = -۲\rho a v_۱^۲$$

۸- ماخ الف) چگالی متوسط به راحتی قابل محاسبه است:

$$\rho = \frac{۱۰^{۱۱}}{\frac{۳}{۴}\pi R^۳} = \frac{۳\times۱۰^{۱۱}}{۴\pi\times۱۰^{۱۲}}۲\,/\,۳۸\times۱۰^{-۲}\,\frac{M_\odot}{pc^۳}$$

ب) حال جرم را با فرض یکنواخت بودن چگالی در رابطه شتاب گرانش قرار می‌دهیم:

$$M - \frac{۴}{۳}\pi r^۳\rho, a = -\frac{GM}{r^۲}$$

$$a = -G\frac{\frac{۴\pi}{۳}r^۳\rho}{r^۲} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{۴\pi G_p}{۳}r$$

که معادله‌ی یک نوسانگر هماهنگ ساده است. بنابراین دوره تناوب به دست می‌آید:

$$w=\sqrt{\frac{۴\pi G\rho}{۳}}\Rightarrow T=\frac{۲\pi\sqrt{۳}}{\sqrt{۴\pi G\rho}}=۲۹۰Myr$$

ج) باید احتمال برخورد ستاره را به دست می‌آوریم. ابتدا تعداد ستاره‌ها در استوانه‌ای به طول $۲۰kpc$ و مساحت مقطع $۲pc^۲$ به دست می‌آوریم:

$$N=۲\times۱۰^۴\times۲/۳۸\times۱۰^{-۲}=۴/۷۶\times۱۰^۲$$

حال مساحت موثر برخورد را محاسبه می‌کنیم:

$$S=\pi(۲۰۶۲۶۵)^{-۲}\times۴/۷۶\times۱۰^۲$$

$$P=\frac{S}{pc^۲}=\frac{\pi\times۴/۷۶\times۱۰^{-۸}}{(۲/۰۶)^۲}=۳/۵\times۱۰^{-۸}$$

$$x=\frac{۲۹۰}{۲}\times\frac{۱}{P}=\frac{۲۹۰}{۲}\times\frac{۱}{۳/۵\times۱۰^۸}Myr=۴/۱۴\times۱۰^۶Gyr$$

۹- الف) وقتی ستاره به دنباله‌دار به فاصله d می‌رسد، شتاب گرانش وارد شده به دنباله‌دار برابر $\frac{GM_*}{d^۲}$ است. دنباله‌دار این شتاب را در مدت تقریبی $\frac{۲d}{v_*}$ حس می‌کند. بنابراین دنباله‌دار در این مدت یک سرعت اضافی به اندازه $\Delta v$ ناشی از این شتاب می‌گیرد.

$$\Delta v\simeq\frac{۲GM_*}{dv_*}$$

برای این‌که دنباله‌دار از ابر خارج شود، باید $\Delta v$ برابر یا بیشتر از سرعت مدار دایره‌ای در ابر شود. $\Delta v>=v_c$

$$v_c=\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

$$\Delta v=v_c\Rightarrow\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}\simeq\frac{۲GM_*}{dv_*}$$

$$\Rightarrow d\simeq\frac{۲GM_*\sqrt{R}}{v_*\sqrt{GM_\odot}}\simeq۳۰۰AU$$

ب) تعداد ستاره‌هایی که احتمال برخورد با ابر اورت را دارند (در طول عمر منظومه شمسی) برابر است با:

$$n_*\pi R^۲v_*t(۲\pi^۲)$$

از طرفی هر ستاره که با ابر برخورد می‌کند، سطحی به اندازه $\pi d^۲$ را اشغال می‌کند. و اگر فرض کنیم از دو طرف پوسته کروی خارج می‌شود، $۲\pi d^۲$ از سطح ابر اورت در این مسئله دخیل می‌شود.

بنابراین در کل عمر ابر اورت،

$$n_*\pi R^۲v_*t(۲\pi d^۲)$$

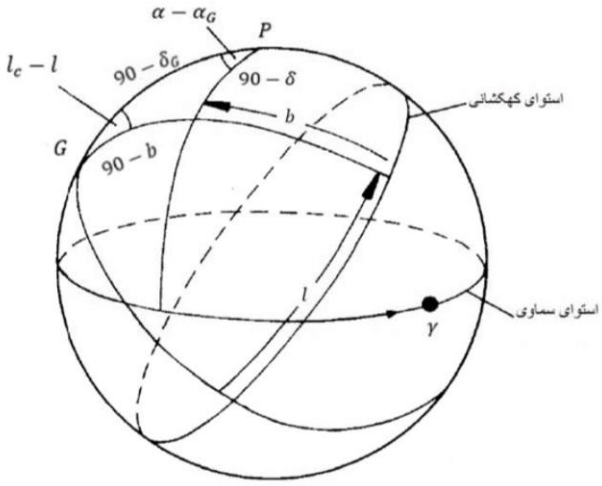
اگر این مساحت را بر مساحت ابر $۴\pi R^۲$ تقسیم کنیم، کسر موردنظر به دست می‌آید:

$$f = \frac{n_* \pi R^۲ v_* t (۲\pi d^۲)}{۴\pi R^۲} = \pi n_* t d^۲ \ / \ ۲ = \frac{۲\pi n_* t G M_*^۲ R}{v_* M_\odot}$$

$$\Rightarrow f = ۵\%$$

ج) در قسمت قبل دیدیم $f \propto \frac{۱}{R}$ پس اگر R به $\frac{۱}{۱۰}$ مقدار اولیه تقلیل یابد، $f = ۰/۵\%$ می‌شود.

۱۰- ماخ الف) با توجه به شکل زیر و استفاده از روابط کروی، خواهیم داشت:




$$\cos(۹۰ - \delta) = \cos(۹۰ - \mathrm{b})\cos(۹۰ - \delta_G) + \sin(۹۰ - \mathrm{b})\sin(۹۰ - \delta_G)\cos(\mathrm{l}_c - l)$$

$$\sin\delta = \sin b \sin\delta_G + \cos b \cos\delta_G \cos(\mathrm{l}_c - \mathrm{l})$$

$$\Rightarrow \delta = ۳۴^\circ ۱۷' ۰۴''$$

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha_G)}{\sin(۹۰ - \mathrm{b})} = \frac{\sin(\mathrm{l}_c - l)}{\sin(۹۰ - \delta)}$$

$$\sin(\alpha - \alpha_G) = \frac{\cos b}{\cos\delta}\sin(\mathrm{l}_c - \mathrm{l})$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱۶^h ۵۵^m ۰۸^s$$

ب) برای اینکه ارتفاع ستاره ساما از ۷۰ درجه بیشتر باشد، باید فاصله‌ی زاویه‌ای سرسو تا ساما کمتر از ۲۰ درجه باشد پس یک عرقچین حاصل می‌شود، در طی یک شبانه‌روز این عرقچین می‌تواند حرکت کند پس:

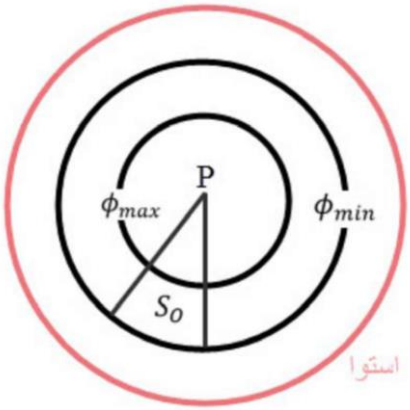
$$r = ۲۰^\circ, \begin{cases} ۹۰ - \phi_{\min} = ۹۰ - \delta + r \\ ۹۰ - \phi_{\max} = ۹۰ - \delta - r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{\min} = \delta - r \Rightarrow \phi_{\min} = ۱۴^\circ / ۲۸ \\ \phi_{\max} = \delta + r \Rightarrow \phi_{\max} = ۵۴^\circ / ۲۸ \end{cases}$$

$$۱۴^\circ / ۲۸ < \phi < ۵۴^\circ / ۲۸$$

ج) شکل زیر، کره زمین را از بالای قطب شمال نشان می‌دهد. نقاط موردنظر، بین دو دایره $\phi_{\min}$ و $\phi_{\max}$ قرار دارد:

$$S_r = S_۱ - S_۲$$

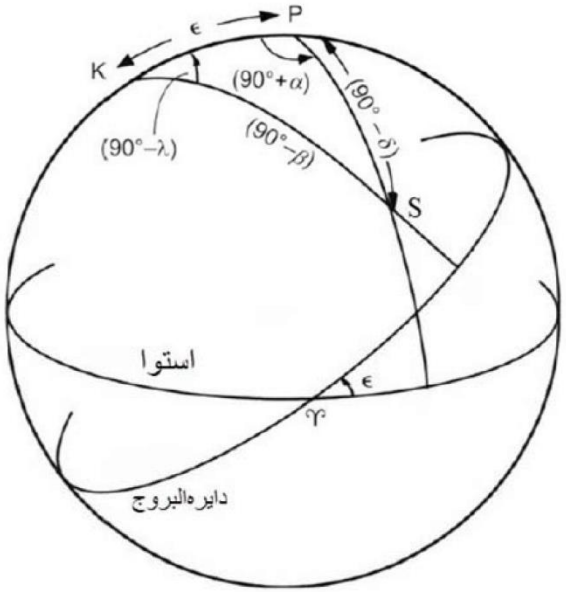



$$S_T = ۲\pi(۱ - \cos(۹۰ - \phi_{\min})) - ۲\pi(۱ - \cos(۹۰ - \phi_{\max}))$$
$$S_T = ۲\pi(\sin\phi_{\max} - \sin\phi_{\min})$$
$$S_O = \frac{۱۰۰ - ۷۰}{۳۶۰ \times S_T}$$
$$S_O = \frac{\pi}{۶}(\sin\phi_{\max} - \sin\phi_{\min})$$

بنابراین درصد نقاطی که می‌توان در آنها رصدخانه ساخت برابر است با:

$$\frac{S_O}{۴\pi} \times ۱۰۰ \simeq ۲ / ۴\%$$

د) مسیر خورشید همان مسیر دایره‌البروج است پس کمترین فاصله‌ی زاویه‌ای ساما تا خورشید برابر فاصله‌ی زاویه‌ای ساما تا دایره‌البروج است که این زاویه هم برابر با عرض دایره‌البروجی ساما است.




$$\sin b = \sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon\cos(۹۰ + \alpha)$$
$$\Rightarrow b = ۵۶^\circ / ۴$$

برای بدست آوردنِ تاریخ، طول دایره‌البروجی ساما را بدست می‌آوریم.

$$\frac{\sin(۹۰ - \lambda)}{\sin(۹۰ - \delta)} = \frac{\sin(۹۰ + \alpha)}{\sin(۹۰ - \mathrm{b})}$$
$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta}{\cos b}\cos\alpha$$
$$\lambda = ۲۴۵^\circ / ۴$$
$$t = \frac{\lambda}{۳۶۰} \times ۳۶۵ / ۲۵ \simeq ۲۴۸ / ۹ days$$

بنابراین بدترین زمان برای رصد ۳ آذر می‌باشد.

۱۱- الف) در شکل $۱۸pc$ معادل ۷/۸ درجه قوسی است.

$$۷ / ۸ \times \frac{pi}{۱۸۰} = \frac{۱۸pc}{d} \Rightarrow d = ۱۳۲$$

ب)

$$< m >= \frac{N_۱M_۱ + N_۲M_۲}{N_۱ + N_۲}$$

$$r = ۰/۲۵ \Rightarrow < m >= \frac{۴۵ \times ۲ + ۱۳۰ \times ۱}{۴۵ + ۱۳۰} = \frac{۲۲۰}{۱۷۵} = ۱/۲۵$$

$$r = ۰/۷۵ \Rightarrow < m >= \frac{۲۰ \times ۲ + ۹۰ \times ۱}{۲۰ + ۹۰} = ۱/۱۸$$

$$r = ۱/۲۵ \Rightarrow < m >= \frac{۳ \times ۲ + ۴۵ \times ۱}{۳ + ۴۵} = ۱/۰۶$$

$$r = ۱/۷۵ \Rightarrow < m >= \frac{۱/۸ \times ۲ + ۳۰ \times ۱}{۱/۲ + ۳۰} = ۱/۰۵$$

$$r = ۲/۲۵ \Rightarrow < m >= ۱$$

ج) مساحت هر لایه را باید محاسبه کنیم.

$$S_۱ = \pi(\frac{۱}{۲})^۲$$

$$S_۲ = \pi(۱ - (\frac{۱}{۲})^۲) = \frac{\pi}{۲} \times ۱.۵$$

$$S_۳ = \frac{\pi}{۲}(\frac{۹}{۴} - ۱) = \frac{\pi}{۲} \times ۲.۵$$

$$\vdots$$

$$S_k = \frac{\pi}{۲}(\mathrm{k} - \frac{۱}{۲})$$

$$M_۱ = ۲M_{sun} \Rightarrow L_۱ = ۸L_{sun}$$

$$N_{tot,۱} = ۴۵S_۱ + ۲۰S_۲ + ۳S_۳ + ۱.۸S_۴ \approx ۱۰۴$$

$$N_{tot,۲} \approx ۱۳۰S_۱ + ۹۰S_۲ + ۴۵S_۳ + ۳۰S_۴ + ۲۰S_۵ + ۱۰S_۶ + ۹S_۷ + ۵S_۸ + ۴(\mathrm{S}_۹ + \mathrm{S}_{۱۰} + \mathrm{S}_{۱۱})$$
$$+ ۲(\mathrm{S}_{۱۲} + \mathrm{S}_{۱۳} + \mathrm{S}_{۱۴} + \mathrm{S}_{۱۵} + \mathrm{S}_{۱۶}) \approx ۱۴۲۴$$

$$L_{\ tot} = ۱۰۴ \times ۸ + ۱۴۲۴ = ۲۲۵۶L_{sun}$$

$$M_{M_{sun}} = -۲.۵ \log ۲۲۵۶ \Rightarrow M = -۳.۶۶$$

$$m - M = ۵ \log d - ۵ \Rightarrow m = ۱.۹۴$$

د)