جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تشریحی
مرحله دوم
دهمین دوره‌ی المپیاد نجوم اخترفیزیک سال ۱۳۹۲

تعداد سوالات تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
۱۰	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب غیر قابل برنامه‌ریزی مجاز است.

تذکرات پیش از آزمون:

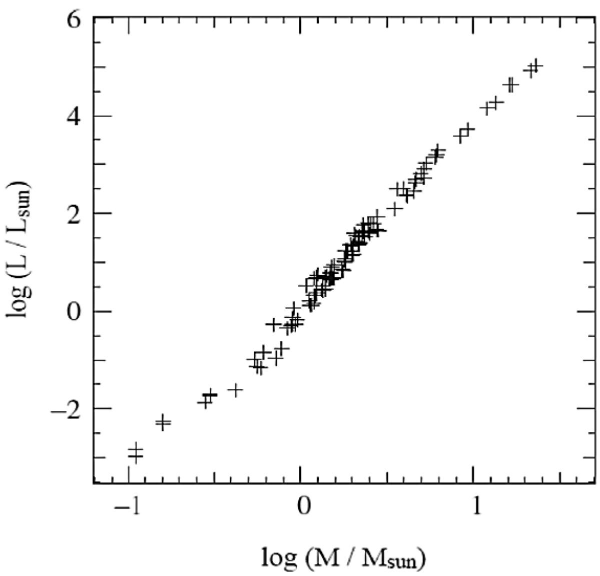
ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. درصورتی‌که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد. بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید. به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام شما صادرشده است. امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصحیحن، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش شدن دایره‌ها در چهارگوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
- پاسخنامه‌ی تشریحی این آزمون توسط **اعضای تیم جهانی ۲۰۱۴ المپیاد نجوم و تحت مدیریت دکتر حقی** تهیه شده و **ماخ** صرفاً آن را بازنشر کرده است.

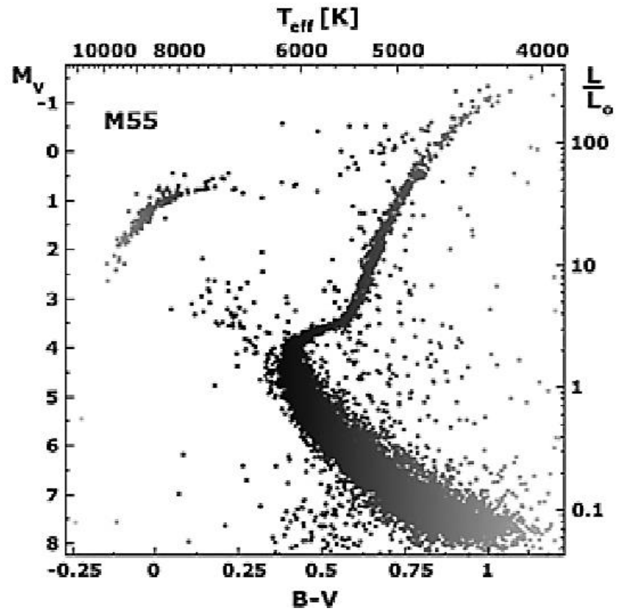
ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$6/67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
c	سرعت نور	$3 \times 10^{8} ms^{-1}$
pc	پارسک	$3/09 \times 10^{16} m$
Au	واحد نجومی	$1/50 \times 10^{11} m$
Ly	سال نوری	$9/46 \times 10^{15} m$
$R_\odot$	شعاع خورشید	$6/96 \times 10^{8} m$
$R_\oplus$	شعاع زمین	$6/38 \times 10^{6} m$
	شعاع ماه	$1/74 \times 10^{6} m$
	شعاع مداری ماه	$3/84 \times 10^{8} m$
$M_\oplus$	جرم زمین	$5/97 \times 10^{24} kg$
$T_\odot$	دمای خورشید	$5777\, K$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	$3/85 \times 10^{26} W$
	ثابت خورشیدی	$1/37 \times 10^{3} Wm^{-2}$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید	$-26/8$
H	ثابت هابل	$70\, km\, s^{-1} Mpc^{-1}$

۱- نمـودار جرم- درخشندگی ستارگان در مقیاس لگاریتمی (شکل ۱) و نمودار رنگ-قدر یک خوشه‌ی کروی (شکل-۲) داده‌شده است. از این نمودارها می‌توان برای تخمین سن و جرم ستاره‌ای خوشه استفاده کرد.



شکل ۱: نمودارجرم- درخشندگی



شکل ۲: نمودار رنگ- قدر یک خوشه ی کروی

الف) به کمک این نمودارها، درخشندگی و جرم ستاره‌ای خوشه را بیابید که در حال خروج از رشته‌ی اصلی است. جواب‌ها را برحسب درخشندگی و جرم خورشید به دست آورید.

ب) با فرض این‌که خوشه از ستارگان هم سن تشکیل‌شده است، سن خوشه‌ها را برحسب سال به دست آورید.

ج) تابع جرم یک خوشه‌ی ستاره‌ای، معرف تعداد ستاره‌هایی (dN) از خوشه است که جرمشان در بازه‌ی M و $M+dM$ قرار دارد. فرض کنید تابع جرم اولیه‌ی این خوشه به‌صورت زیر است:

$$\frac{dN}{dM} \propto \begin{cases} M^{-۱} & ۰/۱ < M < ۰/۵ \\ M^{-۲/۳۵} & ۰/۵ < M < ۲۰ \end{cases}$$

هم‌چنینی فرض کنید مدت‌زمانی که ستارگان نمایش داده شده در نمودار شکل ۲، در مراحل بعد از خروج از رشته‌ی اصلی (پَسا رشته‌ی اصلی) سپری می‌کنند حداکثر ۱۰ درصد مدت زمانی است که در رشته‌ی اصلی می‌گذرانند. حد بالا و پایینی برای جرم ستاره‌هایی که در مرحله‌ی پسا رشته‌ی اصلی قرار دارند، به دست آورید.

د) اگر در شکل ۲، در مجموع ۲۰۰ ستاره در مرحله‌ی پسا رشته‌ی اصلی موجود باشند، جرم کل این خوشه‌ی ستاره‌ای را به دست آورید.

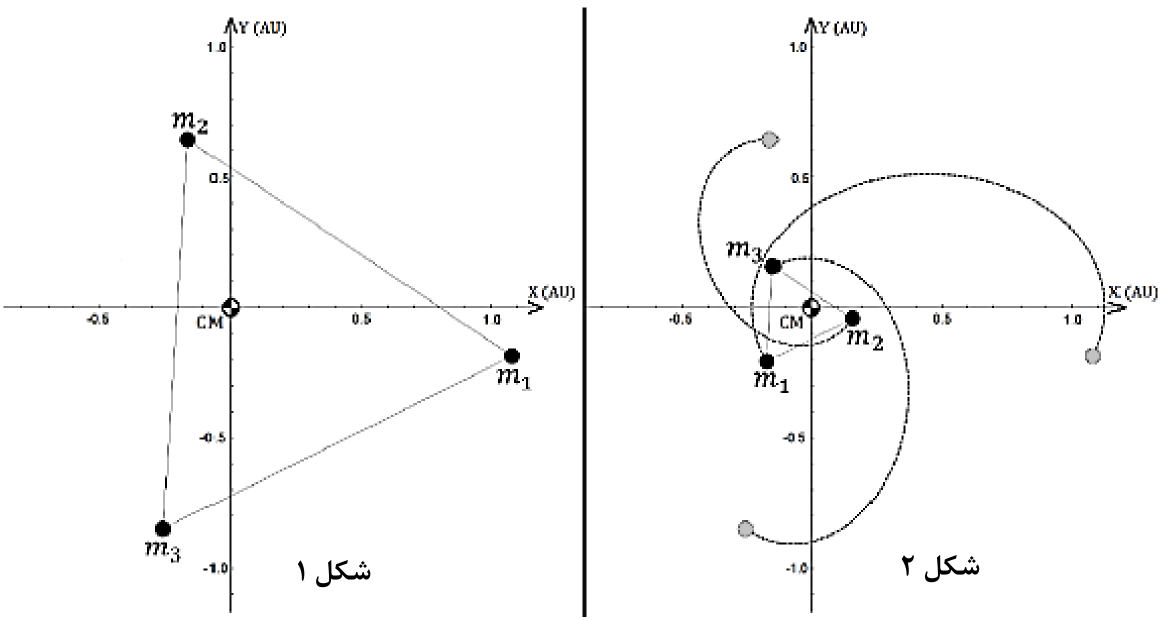
۲- پرتوهـای کـیـهـانی از عـوامل مزاحم در تصویربرداری‌های عمیق از آسمان هستند. این پرتوها با برخورد به سی‌سی‌دی‌ها و آزاد کـردن الکترون باعث اشباع پیکسل‌های سی‌سی‌دی و درنتیجه از بین رفتن اطلاعات نور سنجی آن بخش از سی‌سی‌دی‌ها می‌شوند. برای برطرف کردن این مشکل، منجمان زمان کلِ نوردهیِ سی‌سی‌دی را معمولاً به چند زمان کوتاه‌تر تقسیم می‌کنند تا درمجموع اطلاعات همه پیکسل‌های یک سی‌سی‌دی را در اختیار داشته باشند؛ یعنی اگر در یک نوردهی، پرتوی کیهانی موجب اشباع یک پیکسل شود، در نوردهی بعدی از این امر در امان بماند.

منجمی از تلسکوپ فضایی هابل برای تصویربرداری استفاده می‌کند. در این مورد، پرتوهای کیهانی با آهنگ ۱۰۰ پرتو در ثانیه در سانتی‌متر مربع، به‌طور تصادفی اما با توزیع یکنواخت فرود می‌آیند. این تلسکوپ دارای فاصله‌ی کانونی ۵۷/۶ متر است و میدان دید آشکارساز آن

مربعی به ضلع ۱۶۰ ثانیه‌ی قوسی است. پهنای زاویه‌ای (ضلع) هر پیکسل مربعی شکل این سی‌سی‌دی ۰/۰۴ ثانیه قوسی است. اگر مدت‌زمان نورگیری از یک منطقه از آسمان ۲ ساعت باشد، حداقل تعداد تصاویری را که تلسکوپ هابل باید عکس‌برداری کند تا کمتر از ۰٫۵٪ پیکسل‌های هر عکس به دلیل برخورد پرتوهای کیهانی اشباع‌شده باشد؛ را بیابید. فرض کنید هر پرتوی کیهانی به هنگام اصابت به سی‌سی دی، تنها یک پیکسل را به اشباع می‌رساند.

۳- سه جرم m_1، m_2 و m_3 مطابق شکل ۱، بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. موقعیت اولیه‌ی این سه جرم به‌گونه‌ای است که مرکز جرمشان (CM) منطبق بر مبدأ مختصات است. این اجرام طوری پرتاب می‌شود که اولاً، مکان مرکز جرمشان ثابت مانده و ثانیاً، همواره بر روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باقی بمانند. به‌طوری‌که اندازه‌ی این مثلث برحسب زمان تغییر می‌کند. بعد از پرتاب، هریک از این اجرام تحت تأثیر نیروی گرانشِ دو جرم دیگر، مسیری می‌پیماید که در شکل ۲ نمایش داده‌شده است. واحدهای محورهای مختصات در این شکل‌ها واحد نجومی است.

اگر مقدار جرم m_1، برابر جرم خورشید باشد، مدت‌زمانی را بیابید که اجرام از وضعیت شکل ۱ به مثلث متساوی‌الاضلاع شکل ۲ برسند.



شکل ۱ شکل ۲

۴- باقی‌مانده‌های انفجارهای ابرنواختری عموماً ستاره‌های نوترونی هستند. طی یک انفجار ابر نواختی، ستاره‌ی نوترونی ایجادشده، انرژی‌ای در حدود $E_\nu = 10^{46} J$ تابش می‌کند. فرض کنید این تابش فقط ناشی از تابش نوترینوهای سریع است، کاملاً همسان گرد نیست و عدمِ تقارنی در حدود ۱٪ دارد که باعث پس‌زنی ستاره‌ی نوترونی در یک جهت خاص می‌شود. سرعت این ستاره‌ی نوترونی را در پایان انفجار ابرنواختری برحسب کیلومتر بر ثانیه تخمین بزنید.

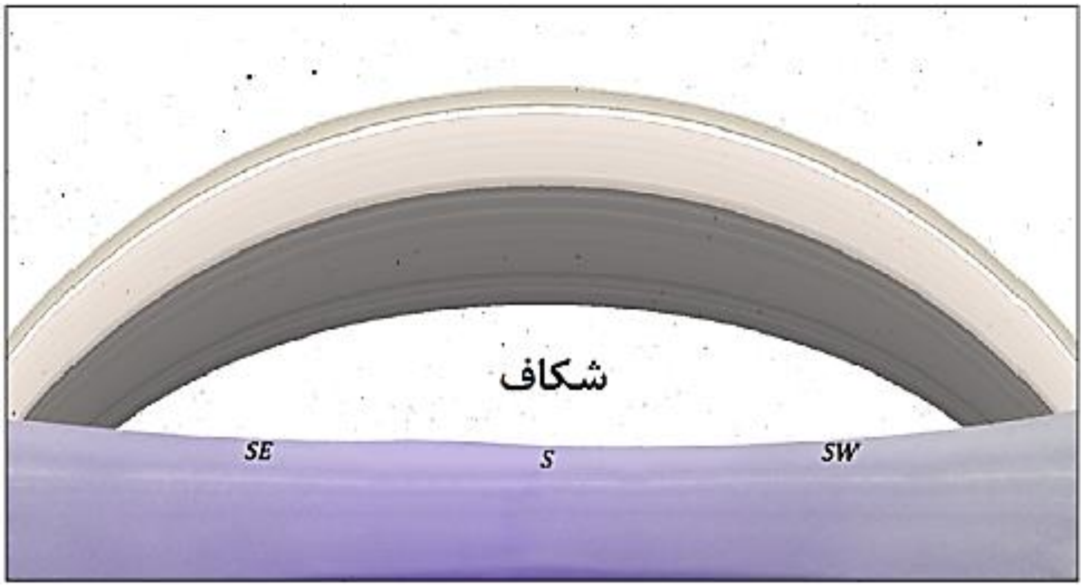
۵- سیاره‌ی زحل را می‌توان کره‌ای به شعاع $R = 60268 km$ در نظر گرفت که حلقه‌های زیبای آن در صفحه‌ی استواییِ سیاره از ارتفاع $h = 14030 km$ تا $H = 79552 km$ بالاتر از سطح سیاره قرارگرفته‌اند. این سیاره هر ۱۰ ساعت و ۳۴ دقیقه یک‌بار به دور محور خود می‌چرخد.

الف) ناظری که در عرض‌های کمِ شمالیِ سیاره قرار دارد؛ در سمت جنوب، منظره‌ای همانند تصویر زیر را مشاهده می‌کند. از دید او شکافی بین حلقه‌ها و افق وجود دارد که برای ناظرهای نزدیک قطب، این شکاف دیگر دیده نمی‌شود. کم‌ترین عرض جغرافیایی شمالی‌ای که در آن، فاصله‌ی بین افق و حلقه‌های دیده نمی‌شود، چند درجه است؟

حال فرض کنید، ناظری در عرض جغرافیایی که در قسمت الف به دست آوردید، قرار دارد. او قصد دارد در روزی که میل خورشید از دید زحل $\delta = -18^\circ$ است، بالا آمدن خورشید را از میان حلقه‌ها نظاره کند.

ب) با صرف‌نظر کردن از قطر زاویه‌ای خورشید، مدت‌زمانی را که خورشید از دید این ناظر پشت حلقه‌ها پنهان است (از طلوع تا بیرون آمدن خورشید از پشت حلقه‌ها)، بیابید.

ج) هنگام خروج خورشید از میان حلقه‌ها، مسیر ظاهری خورشید در آسمان، چه زاویه‌ای با لبه بالایی حلقه‌ها می‌سازد؟



۶- فرض کنید آهنگ تشکیل ستاره در یک کهکشان متناسب با e^{-t/t_s} کاهش می‌یابد که در آن $t_s = 3Gyr$ مقیاس زمانی است. عمر رشته‌ی اصلی ستاره‌ای به جرم ۳ برابر جرم خورشید ۳۵۰ میلیون سال است. محاسبه کنید چند درصد از ستارگانی با جرم ۳ برابر جرم خورشید که از ابتدا تشکیل‌شده‌اند، هم چنان بر روی رشته‌ی اصلی حضور دارند؟ فرض کنید که سن این کهکشانی ۱۰ میلیارد سال باشد.

۷- کریکلو سیارکی بین زحل و اورانوس است که سال گذشته چندین رصدخانه اختفای یک ستاره با آن را ثبت کردند، منجمان با بررسی داده‌ها متوجه وجود حلقه‌ای نازک اطراف سیارک شدند. هنگام اختفاء کریکلو در فاصله‌ی ۱۳/۵۴ واحد نجومی از زمین قرار داشت. از دید یکی از رصدخانه‌ها، ستاره دو بار پشت حلقه قرار گرفت که موقعیت این دو نقطه نسبت به سیارک در جدول زیر آورده شده است. از دید رصدخانه‌ای در مکان دیگر نیز ستاره دو بار ولی این بار به علت اختلاف‌منظر در نقاط متفاوتی پشت حلقه قرار گرفت. موقعیت یکی از این دو نقطه نیز در جدول زیر داده‌شده است. موقعیت این نقاط، در دستگاه مختصات دکارتی‌ای در صفحه‌ی آسمان بیان‌شده است که مرکزش روی مرکز سیارک، جهت x به سمت غرب و y به سمت شمال است.

		(میلی‌ثانیه قوسی)	(میلی‌ثانیه قوسی)
داده‌های رصدخانه‌ی اول	۱	۱۷/۲۵	۱۶/۱۷
	۲	-۲۷/۱۳	۷/۷۲
داده‌های رصدخانه‌ی دوم	۳	-۱۰/۹۶	-۲۴/۰۷

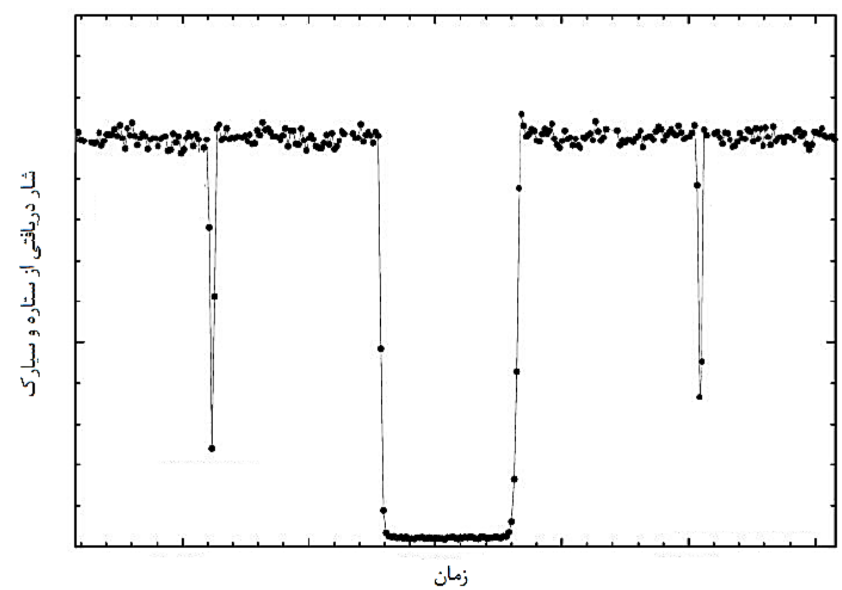
الف) شعاع حلقه (R) چند کیلومتر است؟

راهنمایی: در دستگاه مختصات دکارتی، معادله یک بیضی که مرکز آن روی مبدأ است و قطر بزرگ آن نسبت به محور x به‌اندازه‌ی θ به‌طور پادساعت‌گرد دوران یافته، به شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ است؛ که نیم‌محور بزرگ (a)، نیم‌محور کوچک (b) و اندازه‌ی θ برای این بیضی از روابط زیر قابل‌محاسبه‌اند:

$$b = \sqrt{\frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}} \qquad a = \sqrt{\frac{2}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}} \quad ; \quad \tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$$

ب) سیارک کریکلو پخ است و می‌توان آن را یک بیضی‌گون فرض کرد که از دوران بیضی‌ای با نیم‌قطر بزرگ r_l و نیم‌قطر کوچک r_s حول قطر کوچک حاصل‌شده است. حلقه در صفحه‌ی شامل نیم‌قطر بزرگ و عمود بر نیم‌قطر کوچک واقع‌شده است.

رصدخانه اول منحنی نوریِ صفحه‌ی بعد را از ستاره و سیارک به هنگام اختفا ثبت کرده است. گرفت طولانی‌تر یا رد شدن ستاره از پشت سیارک ایجادشده و دو گرفت دیگر مربوط به حلقه‌ها هستند. r_l و r_s را بیابید. (داده‌های اولِ جدول بالا زودتر از داده‌ی دوم رصد شده است).



ج) احتمال دارد که حلقه به دلیل در هم شکستن جرم صلبِ همگنی که از حد روشِ ($Roche$) سیارک عبور کرده، شکل‌گرفته باشد. اگر چگالیِ جرمِ صلبِ درهم‌شکسته $1gr/cm^3$ در نظر گرفته شود، جرم سیارک را تخمین بزنید. برای سادگی از پخی کریکلو صرف‌نظر کنید و آن را کره‌ی صلب همگنی به شعاع r_l فرض کنید.

۸- ماخ جرم و ابعاد کهکشانی که از یک قرص و برآمدگی کروی ($Bulge$) تشکیل‌شده، به شرح زیر است:

شعاع برآمدگی کهکشان ۴ کیلوپارسک، شعاع قرص کهکشان ۱۵ کیلوپارسک و ضخامت قرص آن ۳۰۰ پارسک است. جرم کل ستاره‌های این کهکشان 10^{11} برابر جرم خورشید است.

الف) اگر قطر قرصِ کهکشان برابر عرضِ برگه‌ی پاسخ‌نامه شما باشد؛ شکل کهکشان را از نمای لبه، با رعایت مقیاس ترسیم کنید.

ب) اگر همه‌ی ستاره‌های این کهکشان خورشید گون باشند و توزیع آن‌ها در همه‌جا یکنواخت باشد، چگالی عددی کهکشان چند ستاره بر پارسک مکعب خواهد بود؟

ج) حال فرض کنید که همه ستاره‌ها خورشید گون نیستند، بلکه جرمشان می‌تواند در بازه‌ی ۰/۱ تا ۱۰۰ برابر خورشید باشد. هم‌چنین تعداد ستاره‌هایی که جرمشان بین M و $M+dM$ است، از رابطه‌ی $dN = A.M^{-۲/۳۵}dM$ به‌دست می‌آید؛ که در آن A مقدار ثابتی است. در این حالت چگالی عددی کهکشان چند ستاره بر پارسکِ مکعب خواهد بود؟ این چگالی عددی چند برابر مقدار قسمت قبل است.

۹- ستارگان طی تحولشان تحت تأثیر پدیده‌ای به نام هدر رفت جرم قرار می‌گیرند. رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی تجربی است که مقدار هدر رفت جرم ($\dot{M}$) برای ستارگان بسیار درخشان $(L \geq ۱۰^۳ L_{\odot})$ به دمای سطحی (T_{eff}) و درخشندگی آن‌ها (L) مرتبط می‌سازد.

$$\log(-\dot{M}) \approx -۸/۱۶ + ۱/۷۷ \log(L) - ۱/۶۸ \log(T_{eff})$$

که در آن $\dot{M}$ برحسب جرم خورشید در سال $L,(M_{\odot}/yr)$ برحسب درخشندگی خورشید $(L_{\odot})$ و T_{eff} برحسب کلوین (K) سنجیده شده است.

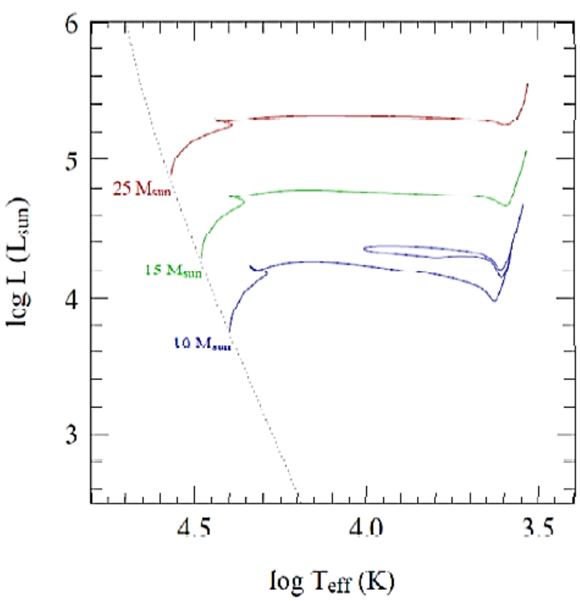
شکل زیر نمودارِ H-R است که مسیر تحول سه ستاره با جرم‌های مختلف در آن رسم شده است.

الف) برای ستاره‌ای به جرم $۲۵M_{\odot}$، مقدار هدر رفت جرم را (برحسب $M_{\odot}/yr$) در سه موقعیت زیر به دست آورید.

۱. بر روی رشته اصلی در ابتدای تحول ($Zero\ Age\ Main\ Sequence$)

۲. در انتهای رشته‌ی اصلی

۳. در انتهای مرحله‌ی ابر غولِ قرمز



ب) فرض کنید همه‌ی فوتون‌های تابش شده تکانه خود را به ذرات حامل باد ستاره‌ای منتقل کنند. بیشینه هدر رفت جرم طیِ فرآیند انتقال تکانه از طریق تابش به ذرات دیگر را برای ستاره‌ای با جرم $۲۵M_{\odot}$ که در ابتدای رشته‌ی اصلی قرار دارد، برحسب $M_{\odot}/yr$ محاسبه کنید. فرض کنید سرعت ذرات باد ستاره‌ای هنگام ترک ستاره، ۳ برابر سرعت فرار از سطح ستاره (v_{esc}) باشد.

۱۰- وقتی ماه شروع به گرفت می‌کند، سایه‌ی زمین به‌مرور سطح آن را می‌پوشاند تا وقتی‌که ماه به‌طور کامل پشت سایه زمین برود؛ در این موقع گرفت کامل شروع می‌شود و پس از مدتی ماه به‌آرامی از گرفت خارج می‌شود. اگر فرض کنیم که بخش قرارگرفته در سایه‌ی زمین کاملاً تاریک است و ماه به شکل همسان گرد بازتاب می‌کند، تابعیت قدر ظاهری ماه را برحسب زمان به دست آورید. قدر ظاهری ماه کامل ۱۲/۷۴- است.

مدارها را دایروی و هم صفحه فرض کنید. تمام اطلاعات موردنیاز شما در جدول ثوابت، داده‌شده است.

۱- الف) از برازش خط بر روی شکل شماره یک:

$$L \propto M^{3/8} \Rightarrow \frac{L}{L_{sun}} \approx \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{3/8}$$

از روی شکل دو و با استفاده از رابطه‌ی بالا، جرم ستاره‌ای که در حال ترک رشته‌ی اصلی (نقطه برگشت) است. برابر است با:

$$M \approx 1/2 M_{sun}$$

ب)

$$t \propto \frac{M}{L} \Rightarrow t \propto M^{-2/8} \Rightarrow \frac{t}{t_{sun}} \approx \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-2/8}$$

$$M \approx 1/2 M_{sun} \Rightarrow t \approx 6\,Gyr$$

ج) حد پایین جرم که همان $1/2 M_{sun}$ است.

حد بالا:

برای به دست آوردن حد بالای جرم، چون حداکثر ۱۰ درصد عمر رشته‌ی اصلی، در پسا رشته‌ی اصلی هستند، پس:

$$t' = t - \frac{10}{100} \times t \approx 6Gyr - 0/1 \times 6Gyr \approx 5/4Gyr$$

حد بالا برابر ۱/۲۵ جرم خورشید می‌شود.

$$\frac{t'}{t_{sun}} \approx \left(\frac{M'}{M_{sun}}\right)^{-2.8} \Rightarrow M' \approx 1/25 M_{sun}$$

د)

$$\frac{dN}{dM} = AM^{-1} \Rightarrow N = A \ln M \qquad ; \qquad 0/1 < M < 0/5$$

$$\frac{dN}{dM} = BM^{-2/35} \Rightarrow N = \frac{B}{-1/35} M^{-1/35} \qquad ; \qquad 0/5 < M < 20$$

برای ۰/۵ جرم خورشید باید دو مقدار بالا با هم برابر باشند، پس:

$$A \ln 0/5 = \frac{B}{-1/35} 0/5^{-1/35} \qquad (Eq.1)$$

با توجه به اینکه ۲۰۰ ستاره در مرحله‌ی پسا رشته‌ی اصلی هست، بنابراین:

$$200 = \int_{1/2}^{1/25} BM^{-2/35} dM = \frac{B}{-1/35}\left(1/35^{-1/35} - 1/2^{-1/35}\right) \Rightarrow B \approx 6440 \quad ; \quad (Eq.1) \Rightarrow A \approx 17540$$

برای محاسبه‌ی جرم کل باید از ۰/۱ تا ۲۰ جرم خورشید انتگرال گرفت.

$$M_{tot} = \int M\, dN = \int_{0/1}^{0/5} A\, dM + \int_{0/5}^{20} B\, M^{-1/35} dM \qquad \Rightarrow \qquad M_{tot} \approx 2/4 \times 10^{4} M_{sun}$$

۲- با استفاده از فرمول مقیاس تصویر

$$\frac{206265}{f} = \frac{206265}{57600} = 3/581 \frac{\text{arcsec}}{mm}$$

چون مقیاس تصویر داده‌شده است. ابعاد هر پیکسل به دست می‌آید:

$$\frac{۰/۰۴}{۰/۰۳۵۸۱} = ۱۱/۱۷\ micron\ per\ pixel$$

ابعاد سی‌سی‌دی:

$$\frac{۱۶۰\ \text{arcsec}}{۰/۰۴\,\dfrac{\text{arcsec}}{pix}} = ۴۰۰۰\ pixel$$

ابعاد فیزیک سی‌سی‌دی:

$$۱۱/۱۷\ micron \times ۴۰۰۰ = ۴/۴۶۸\ cm$$

یعنی ۴/۴۶۸ سانتی‌متر یا ۱۹/۹۶۳ یا ۲۰ سانتی‌متر مربع.

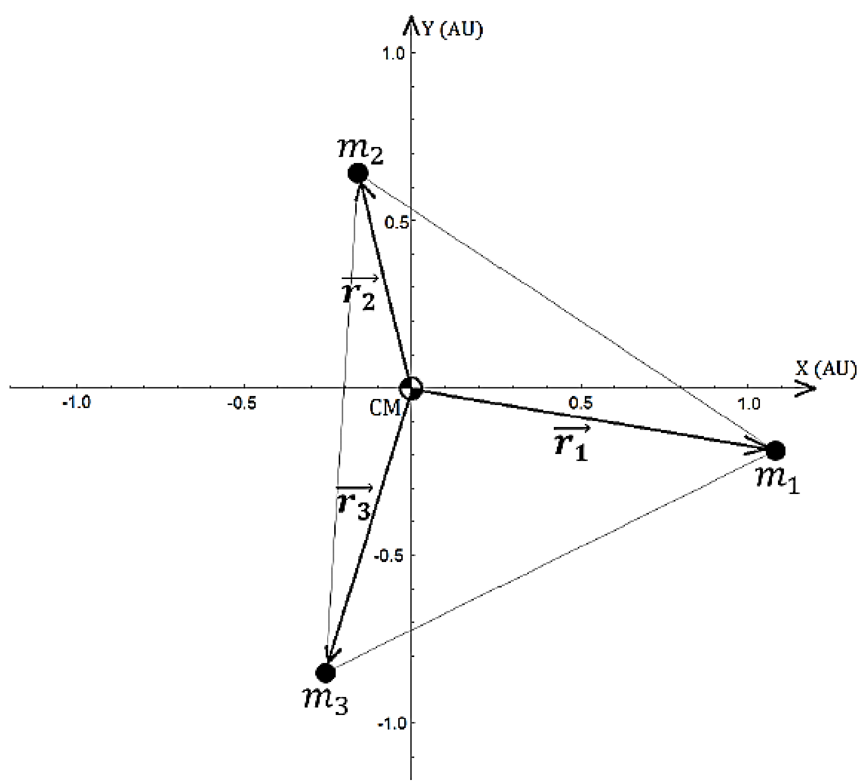
به‌عبارت‌دیگر ۲۰۰۰ پرتو کیهانی در هر ثانیه بر سی‌سی‌دی می‌نشینند. پس ۵ درصد کل پیکسل‌ها یعنی ۸۰۰۰۰۰ پیکسل می‌تواند تحت تأثیر قرار گیرد که زمان آن ۴۰۰ ثانیه خواهد بود؛ $\frac{۸۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰} = ۴۰۰\ \text{sec}$. پس تعداد تصاویر برابر است با: $\frac{۲h}{۴۰۰\ \text{sec}} = ۱۸$

۳- ابتدا باید معادله‌ی حرکت هریک از اجرام را در دستگاه مرکز جرم به دست آوریم. از تعریف مرکز جرم و با توجه به اینکه مرکز جرم در مبدأ مختصات است داریم:

$$m_۱\vec{r}_۱ + m_۲\vec{r}_۲ + m_۳\vec{r}_۳ = ۰$$

چون این سه جرم همواره بر روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند، بنابراین:

$$\left|\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱\right| = \left|\vec{r}_۲ - \vec{r}_۳\right| = \left|\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱\right| =: r$$



شتاب جرم ۱ که تحت تأثیر نیروی گرانش دو جرم دیگر است عبارت است از:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{Gm_2}{r^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)-\frac{Gm_3}{r^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_3)\\ &= -\frac{G}{r^3}(m_2\vec{r}_1+m_3\vec{r}_1-m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3)\\ &= -\frac{G}{r^3}(m_2\vec{r}_1+m_3\vec{r}_1+m_1\vec{r}_1)=-\frac{G}{r^3}(m_1+m_2+m_3)\end{aligned}$$

در واقع عبارت زیر برقرار است:

$$m_2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+m_3(\vec{r}_1-\vec{r}_3)=(m_1+m_2+m_3)\vec{r}_1$$

می‌توان با به توان دو رساندن طرفین این عبارت، رابطه بین r و r_1 را به دست آورد:

$$(m_2^2+m_3^3+m_2m_3)r_2=M^2r_1^2$$

که در آن M این‌گونه تعریف شده است:

$$m_1+m_2+m_3=:M$$

از این رو شتاب جرم ۱ برابر است با:

$$\ddot{\vec{r}}_1=-\frac{G(m_2^2+m_3^3+m_2m_3)^{\frac{3}{2}}}{r_1^3M^2}\vec{r}_1$$

که با تعریف $K_1:=\frac{G(m_2^2+m_3^3+m_2m_3)^{\frac{3}{2}}}{M^2}$ می‌توان آن را به شکل ساده‌ی زیر نیز نوشت؛ $\ddot{\vec{r}}_1:=-\frac{K_1}{r_1^3}\vec{r}_1$

این معادله نشان می‌دهد که مسیر جرم ۱ یک مقطع مخروطی است. این وضعیت برای دو جرم دیگر هم صادق است و این دو جرم هم بر روی یک مقطع مخروطی در حال حرکت هستند... با توجه به مسیر حرکت اجرام، در شکل ۲، این مقطع مخروطی بیضی است (می‌توان نشان داد که خروج از مرکز مدار این اجرام با هم برابر است.)

برای محاسبه مدت‌زمان خواسته‌شده، به دوره‌ی تناوب سیستم نیاز داریم که به مقدار K_1 وابسته است؛ که اگر نسبت جرم‌ها را محاسبه کنیم، K_1 قابل حصول خواهد بود. برای یافتن این نسبت‌ها از معادله مرکز جرم در شکل ۱ استفاده می‌کنیم.

$$m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3=0,\qquad \frac{m_2}{m_1}=:\eta_2,\qquad \frac{m_3}{m_1}=:\eta_3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0\\ y_1+\eta_2y_2+\eta_3y_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \eta_2=3/2\quad;\quad \eta_3=2/2$$

علاوه بر این، با توجه به اینکه مقدار جرم ۱ برابر جرم خورشید است، مقدار عددی K_1 به دست می‌آید:

$$K_1=\frac{G(\eta_2^2+\eta_3^3+\eta_2\eta_3)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta_2+\eta_3)}M_\odot=3/4\times10^{20}\quad N\,kg^{-1}m^2$$

بنابراین دوره تناوبِ این سیستمِ سه‌تایی عبارت است از:

$$P = ۲\pi\sqrt{\frac{a_۱^۳}{K_۱}} = ۱۲۸ / ۴ \; days$$

در این رابطه $a_۱$ نیم محور اصول مدار جرم ۱ می‌باشد که با اندازه‌گیری از روی شکل ۱ به دست می‌آید. علاوه بر این با اندازه‌گیری فواصل اوج و حضیض مدار این جرم می‌توان خروج از مرکز سیستم را نیز به دست آورد که تقریب برابر $e = ۰ / ۶۶$ است.

قطر بزرگ مدار جرم ۱ منطبق بر محور افقی است، ازاین‌رو موقعیت زاویه‌ی این جرم نسبت به راستای حضیض مدارش (θ) به‌راحتی قابل‌اندازه‌گیری است:

$$\begin{cases} \text{شکل ۲} & \rightarrow \theta_۱ = ۱۸۹ / ۹^\circ \\ \text{شکل ۱} & \rightarrow \theta_۲ = ۵۰ / ۵^\circ \end{cases}$$

این‌ها مقادیر آنومالی واقعی هستند، مقادیر آنومالی خروج از مرکزی (E) و میانگین (M) از روابط زیر قابل حصول خواهد بود:

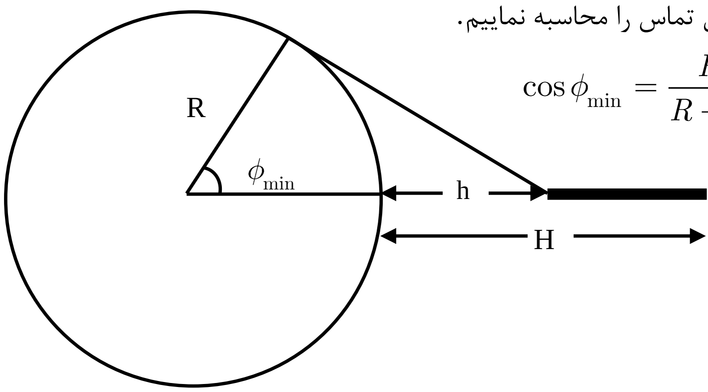
$$\tan\frac{E}{۲} = \sqrt{\frac{۱-e}{۱+e}}\tan\frac{\theta}{۲} \;\; ; \;\; E - e\sin E = M \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_۱ = ۳ / ۷۶۳ \\ M_۲ = ۰ / ۱۵۱ \end{cases} \Rightarrow M_۱ + M_۲ = \frac{۲\pi}{P}t \Rightarrow t = ۸۰ \; days$$

۴- ماخ

$$P_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \quad ; \quad M_{NS}V_{NS} = ۰ / ۰۱\left(\frac{E}{c}\right) \Rightarrow \quad V_{NS} = ۱۲۰\frac{km}{s}$$

۵- ماخ الف) برای پیدا کردن پایین‌ترین عرض جغرافیایی‌ای که بین حلقه‌ها و افق فاصله‌ای نمی‌بینند باید از لبه‌ی درونی حلقه شمالی‌ترین مماس را بر سطح سیاره رسم کنیم و عرض محل تماس را محاسبه نماییم.

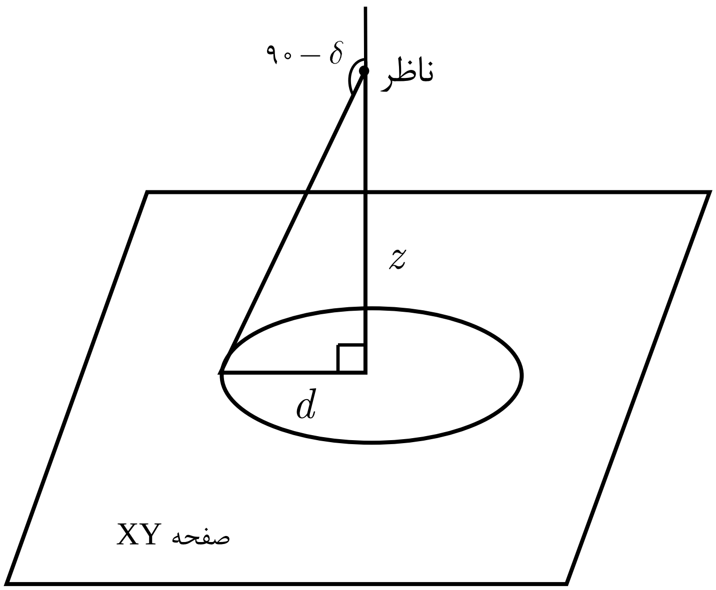
$$\cos\phi_{\min} = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \phi_{\min} = ۳۵.۸^\circ$$



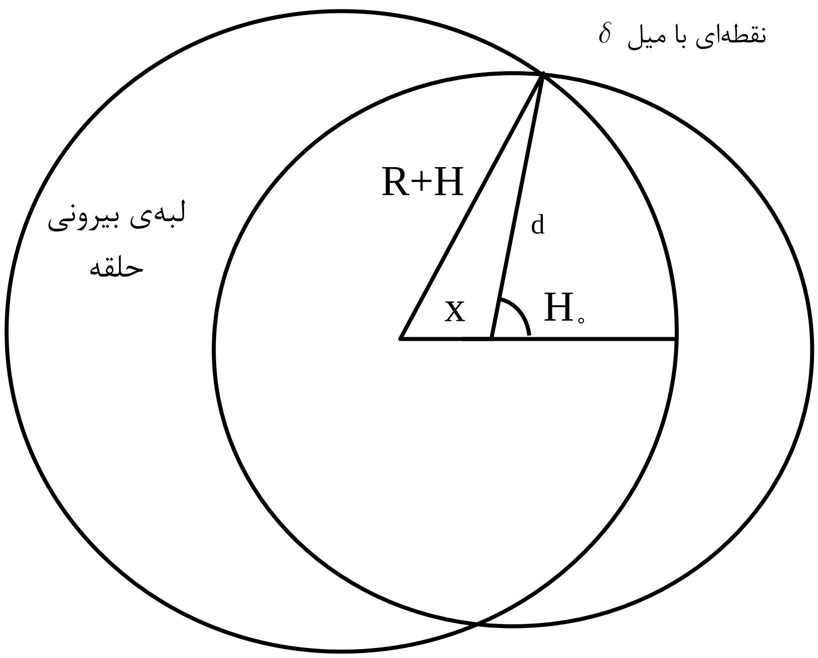
ب) در دستگاه مختصاتی به مبدأ مرکز سیاره که محور Z آن به سمت قطب شمال است و ناظر در صفحه‌ی XZ قرار دارد، مختصات ناظر از قرار زیر است:

$$x = R\cos\phi_{\min} = ۴۸۸۸۷km \quad ; \quad z = R\sin\phi_{\min} = ۳۵۲۴۶km$$

نقاطی از صفحه‌ی XY که ناظر آن‌ها را در میل δ می‌بینند، یک دایره به شعاع $d = z\tan(۹۰^\circ + \delta) = ۱۰۸۴۸۶km$ به مرکز تصویر محل ناظر (یعنی نقطه‌ای با مختصات $(x,۰,۰)$) را تشکیل می‌دهند.



حال باید اشتراک این دایره و لبه‌ی بیرونی حلقه‌های زحل را بیابیم. این دو نقطه‌ی اشتراک، نقاطی از لبه‌ی حلقه هستند که از دید ناظر مسیر ظاهری خورشید از آن‌ها می‌گذرد. تصویر بعدی، صفحه‌ی حلقه‌ها را با لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها و دایره‌ای که شامل نقاط با میل δ هستند. نشان می‌دهد. زاویه‌ای که به رأس تصویر ناظر با نام $H_\circ$ نشان داده‌شده است، زاویه‌ی ساعتی خورشید (البته در حقیقت ۳۶۰ درجه منهای زاویه‌ی ساعتی است!) هنگام بیرون آمدن از حلقه‌ها است. با رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلثات مسطحه این زاویه به دست می‌آید:



$$(R+H)^۲ = x^۲ + d^۲ + ۲xd\cos H_\circ$$

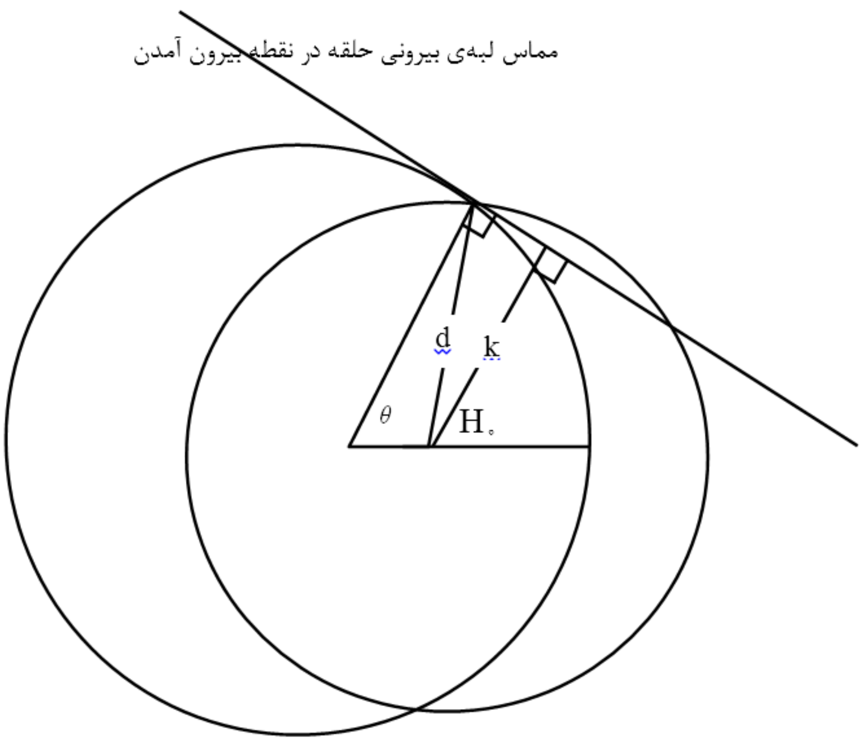
$$\Rightarrow H_\circ = ۵۹/۴^\circ$$

زاویه‌ی ساعتی خورشید هنگام طلوع را نیز با رابطه‌ی طلوع و غروب به دست می‌آوریم:

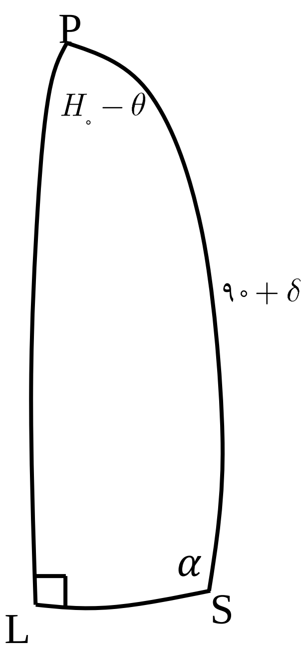
$$\cos H_r = -\tan\phi\tan\delta \Rightarrow H_r = ۷۶.۵^\circ$$

$$\Delta t = \frac{H_r - H_\circ}{۳۶۰}\times ۱۰^h۳۴^m = ۳۰\min$$

ج) ناظر مماس حلقه‌ها در نقطه‌ی برآمدن خورشید از لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها (این نقطه را در کره‌ی سماوی با S نشان خواهیم داد) را یک نیم‌دایره‌ی عظیمه مشاهده می‌کند. می‌خواهیم زاویه‌ی این نیم‌دایره‌ی عظیمه را با مسیر ظاهری خورشید حساب کنیم. اگر از محل تصویر ناظر بر این مماس عمودی رسم کنیم (این عمود به طول k نشان داده‌شده است)، نقطه‌ی عمود (این نقطه را در کره‌ی سماوی با L نشان می‌دهیم) بین نقاط این نیم‌دایره عظیمه پایین‌ترین میل (بیشترین فاصله از قطب شمال سماوی ناظر) را دارد. به این دلیل PL بر نیم‌دایره‌ی عظیمه‌ی مماس حلقه‌ها عمود است. نخست با رابطه‌ی سینوس‌ها در همان مثلث استفاده‌شده در قسمت قبل، زاویه‌ی θ را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{\sin\theta}{d} = \frac{\sin H_{\circ}}{R+H} \Rightarrow \theta = ۴۱/۹^\circ$$



حال در مثلث PLS، زاویه‌ی α را به دست می‌آوریم:

$$-\cos(۹۰^\circ) = \cos\alpha\cos(H_{\circ}-\theta) - \sin\alpha\sin(H_{\circ}-\theta)\cos(۹۰^\circ+\delta) \Rightarrow$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{\tan(H_{\circ}-\theta)\cos(۹۰^\circ+\delta)} \Rightarrow \alpha = ۹۵/۶^\circ$$

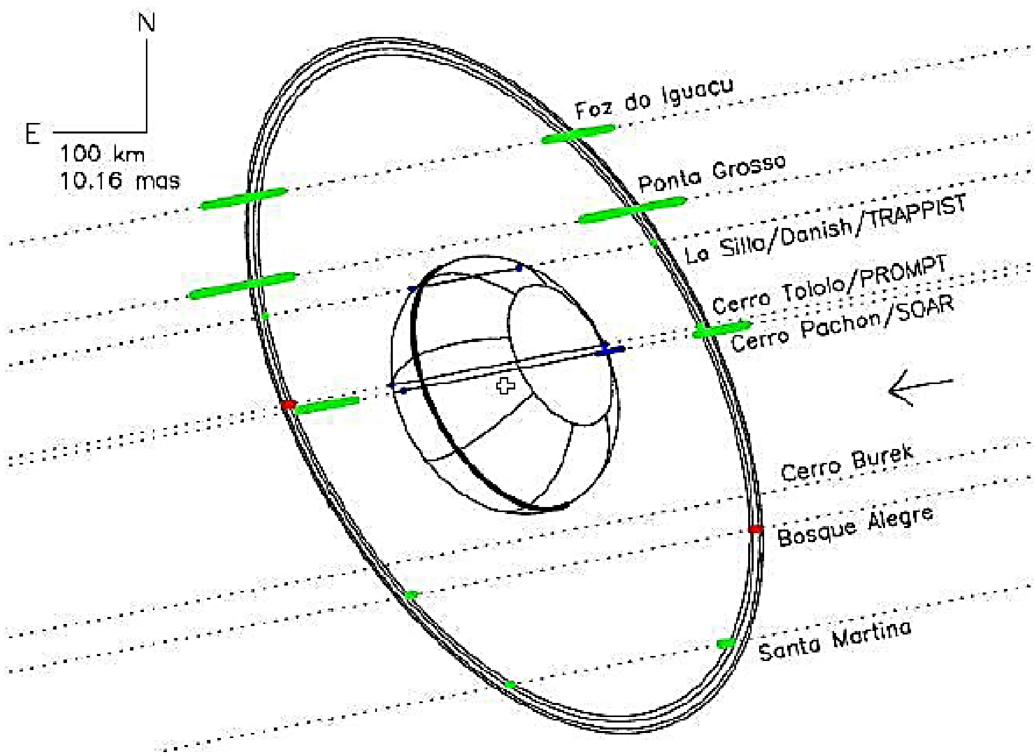
مسیر ظاهری خورشید با ضلع PS زاویه‌ی ۹۰ درجه می‌سازد، پس زاویه‌ی مسیر ظاهری خورشید با لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها $\alpha - ۹۰^\circ = ۵.۶^\circ$ است.

-۶ ماخ

$$\frac{\int_{۹/۶۵}^{۱۰} e^{-t/t_s}dt}{\int_{\circ}^{۱۰} e^{-t/t_s}dt} = \circ/\circ\circ۴۶ \Rightarrow fraction = \circ/۴۵\%$$

۷- الف) تصویر شبیه‌سازی‌شده‌ی زیر، با استفاده از داده‌های حاصل از رصدِ همزمان این اختفا در چندین رصدخانه به‌دست‌آمده است. خطوطِ موازیِ رسم شده، مسیر حرکت ستاره از پشت سیارک از دید رصدخانه‌های مختلف است. در حقیقت، چون رصدخانه‌ها در مکان‌ها متفاوتی قرار دارند؛ مسیر حرکتِ نسبیِ ستاره دچار اختلاف- منظر شده و جابجا می‌شود.

با عبور ستاره از پشت حلقه یا خود سیارک شار دریافتی از آن تغییر می‌کند که به کمک آن می‌توان ساختار هندسی سیارک را بررسی کرد (برخلاف صورت سؤال، این سیارک در واقعیت دو حلقه دارد که لبه‌های بیرونی و درونی هرکدام در شبیه‌سازی نشان داده‌شده است).



تصویر یک دایره بر صفحه‌ی آسمان یک بیضی با نیم قطر بزرگ R و نیم قطر کوچک Rcosi است. در این سؤال فقط سه‌نقطه از محیط بیضیِ دیده‌شده از حلقه را می‌دانیم که به کمک آن‌ها و معادله‌ی کلیِ یک بیضی، ضرایب A,B,C را حل یک دستگاهِ سه معادله-سه مجهول می‌یابیم. (واحد هرکدام عکس مربع میلی‌ثانیه‌ی قوسی است).

$A = ۰/۰۰۱۵۸ \quad ; \quad B = ۰/۰۰۱۰۳ \quad ; \quad C = ۰/۰۰۰۹۳$

از روی این ضرایب و با توجه به راهنمایی سؤال داریم:

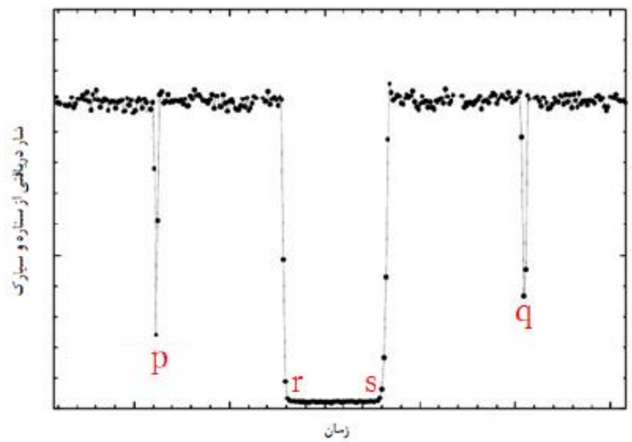
$a = ۳۹/۴۱ \; miliarc \; seccond \quad ; \quad b = ۲۳/۱۷ \; mas \quad ; \quad \theta = ۱۱۸/۹$

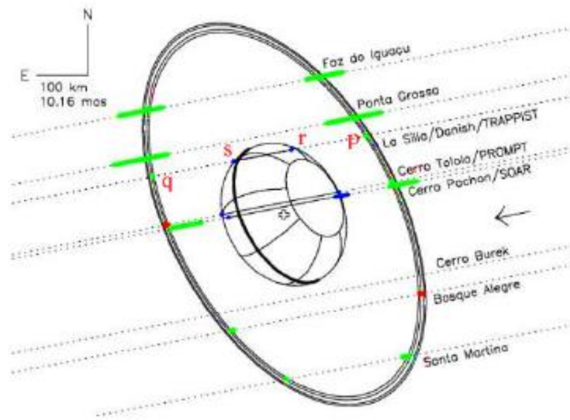
پس: $R \approx ۳۹۰ km$

در محاسبات بالا، ستون سمت راست و چپ داده شده در سؤال به ترتیب به‌عنوان مختصه‌ی x و y در نظر گرفته‌شده‌اند. با توجه به اینکه انتظار نداریم با دوران مختصات، مقادیر a،b عوض شوند، انتخاب برعکس x و y نیز بی‌ایراد است. البته θ تغییر می‌کند که در جواب‌های نهایی بی‌تأثیر است.

ب) دو داده‌ی اول جدول نقاط p,q را روی شکل و منحنیِ نوری نشان می‌دهند و گرفت طولانی در منحنی نوری بین r,s رخ می‌دهد. با استفاده از نسبت مدت‌زمان بین گرفت اول و سوم با گرفت اول و دوم و معلوم بودن مختصات p، مختصات r و با استفاده از نسبت مدت‌زمان بین گرفت اول و سوم با گرفت دوم و سوم و معلوم بودن مختصات q، مختصات s پیدا می‌شود.

$r=(۱/۷۲,۱۳/۲۱)mas$ و $s=(-۹/۳۸\ ,\ ۱۱/۰۹)mas$





برای تجسم کردن نحوه‌ی تصویر شدن بیضی‌گون بر صفحه‌ی آسمان، یک استوانه همانند شکل را در نظر بگیرید. محور این استوانه در راستای خط دید ما است و بیضی‌گون داخل آن محاط شده است. فصل مشترک این استوانه و بیضی‌گون یک بیضی است که نیم قطر بزرگش r_l و نیم قطر کوچکش بزرگ‌تر از r_s است. تصویری که ما از بیضی‌گون می‌بینیم، تصویر این بیضی (و نه خود آن) بر صفحه‌ی آسمان است. پس $\tilde{a}$ (نیم قطر بزرگ بیضی مشاهده‌شده از سیارک) برابر r_l و $\tilde{b}$ (نیم قطر کوچک آن) نصفِ فاصله‌ی دو خطِ موازی رسم شده در شکل است:

$$\tilde{a}=r_l \quad ; \quad \tilde{b}=\sqrt{r_l^۲\cos^۲ i+r_s^۲\sin^۲ i}$$

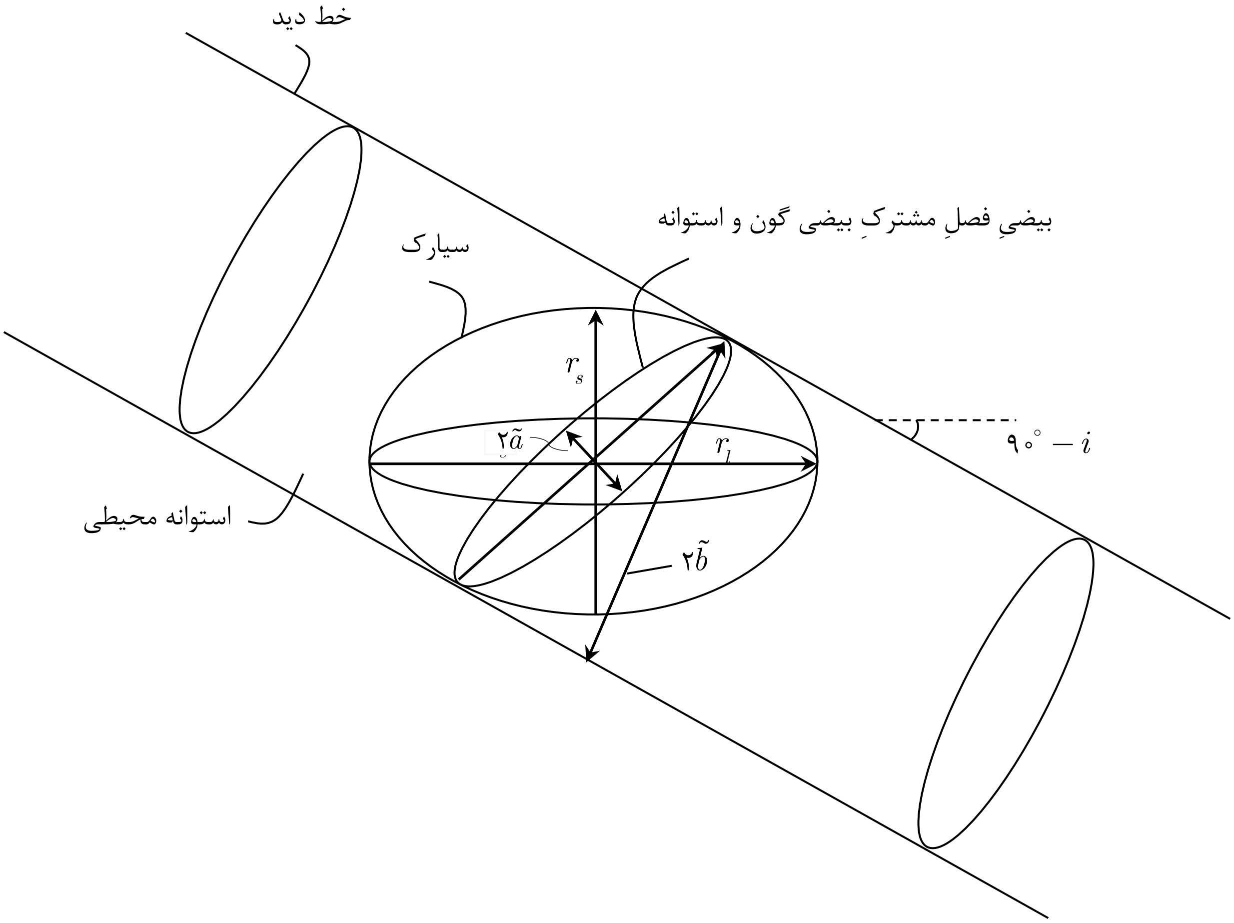
که رابطه‌ی آخر با به دست آوردن عرض از مبدأ خطِ مماس بر بیضی که زاویه‌ی شیبش $۹۰-i$ است، حاصل می‌شود.

θی بیضی دیده‌شده از سیارک با θی بیضیِ دیده‌شده از حلقه یکی است. (چرا؟) از طرفی r,s هم داریم. پس دوباره سه معادله-سه مجهول (که این بار با جایگذاری θ درواقع یک معادله- دو مجهول داریم) حل می‌کنیم؛ که استفاده از روابط راهنمایی، نتیجه می‌دهد:

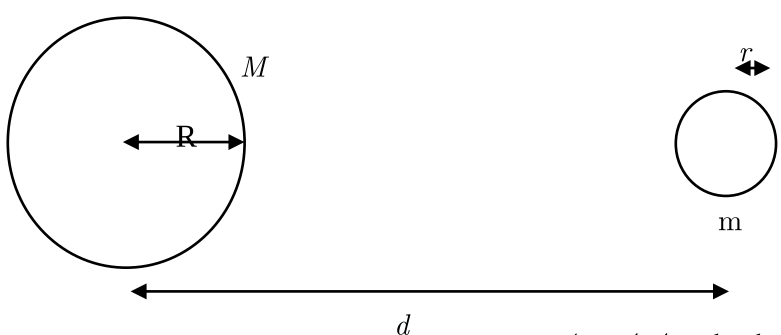
$$\tilde{a}=۱۴/۷۰\,mas \quad ; \quad \tilde{b}=۱۱/۵۵\,mas$$

پس با توجه به روابط بالا:

$$r_s=۱۱۳/۷km \quad ; \quad r_l=۱۴۴.۷km$$



ج) بیان ساده‌شده‌ی زیر را برای به دست آوردن حد روش برای اجسام صلب در نظر می‌گیریم:



شتاب گرانشی روی سطح جرم کوچک برابر است با:

$$\left|\vec{a}_g\right| = \frac{Gm}{r^۲}$$

برای شتاب جزر و مدی داریم:

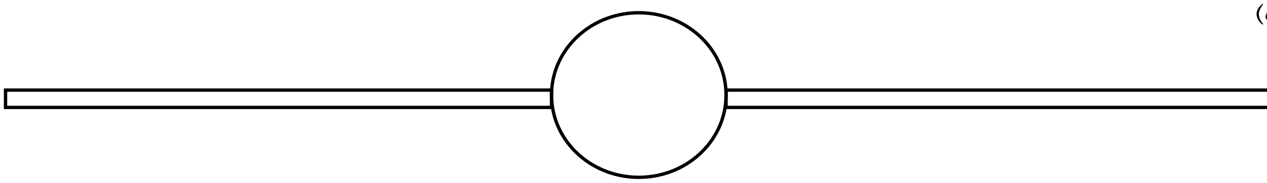
$$\left|\vec{a}_t\right| = \frac{GM}{(d-r)^۲} - \frac{GM}{d^۲} = \frac{GM}{d^۲}\left(\frac{۱}{(۱-\frac{r}{d})^۲} - ۱\right) \cong \frac{GM}{d^۲}(۱+\frac{۲r}{d}-۱) \cong \frac{۲GMr}{d^۳}$$

در آستانه‌ی فروپاشی این شتاب‌ها برابرند: $\left|\vec{a}_g\right| = \left|\vec{a}_t\right|$؛ یعنی: $d = \left(\dfrac{۲r^۳M}{m}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ و $\rho_M := \dfrac{M}{۴/۳\pi R^۳}$; $\rho_m := \dfrac{m}{۴/۳\pi r^۳}$ که برحسب چگالی‌ها می‌شود:

$$d = ۲^{\frac{۱}{۳}} R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{۱}{۳}} \cong ۱/۲۶R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اگر نیروی گریز از مرکز ناشی از گردش جرم کوچک را نیز لحاظ کنیم، ضریب از ۱/۲۶ به ۱/۴۴ تغییر می‌کند. برای سیارک $R = r_l$ و برای دو ضریب بالا به ترتیب داریم؛ $\rho_M = ۹/۸gr/cm^۳$ یا $\rho_M = ۶/۶gr/cm^۳$ پس: $M = ۱/۲\times۱۰^{۲۰}kg$ یا $M = ۸/۴\times۱۰^{۱۹}kg$ که حدود ٪۰/۱ جرم ماه است و بسیار جالب است که جسمی که ابعاد ظاهری‌اش در آسمان تنها چند میلی‌ثانیه‌ی قوسی است، جلوی ستاره‌های بسیار دوردست را می‌گیرد و ما می‌توانیم جزییات دقیقی از شکل و هندسه‌ی آن جسم را بفهمیم!

۸- الف)



ب) حجم کهکشان $۴/۸\times۱۰^{۱۱}$ پارسک مکعب، چگالی $= ۰/۲۱$ ستاره بر پارسک مکعب

ج) $M_G = \int_{۰/۱M_{sun}}^{۱۰۰M_{sun}} MdN \Rightarrow A = ۱/۷۲\times۱۰^{۱۰}M_{sun}^{۱/۳۵}$

د) $N = ۲/۸۵\times۱۰^{۱۱}M_{sun} \Leftarrow$ چگالی ۳ برابر قسمت ب یعنی ۰/۵۹ ستاره بر پارسک مکعب خواهد بود.

۹- الف) با توجه به نمودار و محل‌های خواسته‌شده مقادیر عددی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{M} = ۷\times۱۰^{-۸}\tfrac{M_{sun}}{Year}\ for\ ZAMS\ \ ;\ \ \dot{M} = ۷\times۱۰^{-۷}\tfrac{M_{sun}}{Year}\ for\ end\ of\ MS\ \ ;\ \ \dot{M} = ۵\times۱۰^{-۵}\tfrac{M_{sun}}{Year}\ for\ RGB$$

ب) برای ستاره با جرم ۲۵ مقدار دما و درخشندگی به‌صورت زیر از نمودار به دست می‌آید:

$$L = ۷۹۴۳۲L_{sun}\ ,\ T = ۳۷۱۵۳K \Rightarrow R = ۶/۸R_{sun} \qquad from\ Boltzman\ eq.$$

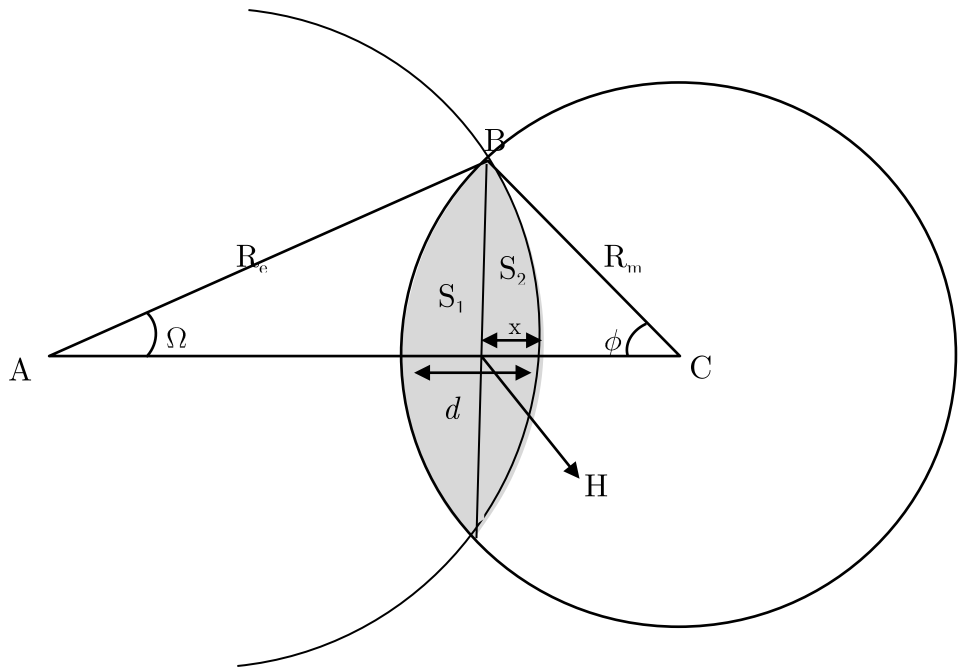
با توجه به شعاع و جرم ستاره سرعت فرار به دست می‌آید: $V_{escape} = ۳۶۰۰\dfrac{km}{s}$ و

$$\dot{M}V_\infty < \frac{L}{c} \quad \Rightarrow \dot{M} = ۴/۵\times۱۰^{-۷}\tfrac{M_{sun}}{Year}\ at\ ZAMS$$

۱۰- ابتدا باید دوره‌ی تناوب هلالی ماه را حساب کنیم:

$$\frac{۱}{T_m} - \frac{۱}{T_e} = \frac{۱}{T_s} \Rightarrow T_s = ۲۹/۵day\ \ ;\ \ \omega_s = \frac{۲\pi}{T_s} = ۲/۴۷\times۱۰^{-۶}\frac{rad}{s}$$

لحظه شروع گرفت $t = ۰$ است و $d = \omega_s \times t = d(t)$ هدف مسئله محاسبه‌ی نسبت قسمت تاریک (هاشور خورده) به کل سطح ماه است. $\Delta ABH : (R_e - x)^۲ + l^۲ = R_e^۲$ ،$\Delta BCH : \left[R_m - (d-x)\right]^۲ + l^۲ = R_m^۲$ در نتیجه: $x = \dfrac{\left(R_m - \dfrac{d}{۲}\right)d}{R_e + R_m - d}$ پس:



$$l^۲ = R_e^۲ - (R_e - x)^۲ = \left[R_e - (R_e - x)\right]\left[R_e + (R_e - x)\right] \quad \Rightarrow \quad l^۲ = x(۲R_e - x)$$

$$l = \frac{\sqrt{(R_m - \frac{d}{۲})d\left[(R_e + R_m)(۲R_e - d) - d\left(R_e - \frac{d}{۲}\right)\right]}}{R_e + R_m - d}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{dark} = ۲(S_۱ + S_۲) \\ S_۱ = R_m^۲ \times \frac{\phi}{۲} - l \times \frac{R_m - (d - x)}{۲} \; ; \phi = \sin^{-۱} \frac{l}{R_m} \\ S_۲ = R_e^۲ \frac{\Omega}{۲} - l \times \frac{R_e - x}{۲} \; ; \Omega = \sin^{-۱} \frac{l}{R_e} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{dark} = R_m^۲ \sin^{-۱} \frac{l}{R_m} + R_e^۲ \sin^{-۱} \frac{l}{R_e} - l(R_e + R_m - d)$$

$$\boxed{\frac{S_{dark}}{S_{full\ moon}} = \frac{S_{dark}}{\pi R_m^۲} = \frac{۱}{\pi} \sin^{-۱} \frac{l}{R_m} + \frac{R_e^۲}{\pi R_m^۲} \sin^{-۱} \frac{l}{R_e} - \frac{l(R_e + R_m - d)}{\pi R_m^۲}}$$

$$M(t) - M_{full\ moon} = -۲/۵ \log \frac{f(t)}{f_{full\ moon}} = -۲/۵ \log \frac{S_{fm} - S_d}{S_{fm}} \Rightarrow M(t) = M_{fm} - ۲/۵ \log \left(۱ - \frac{S_d}{S_{fm}}\right)$$

که چون لگاریتم همواره منفی است، پس $M(t) > M_{fm}$

در لحظه‌ای که $\frac{S_d}{S_{fm}} = ۱$ آن‌وقت $M(t) \to \infty$ که تاریکی مطلق است (فرض غیرواقعی و تقریب).