جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
هفتمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک سال ۱۳۸۹

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۳۷	۹	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب آزاد است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمندیم به موارد زیر توجه فرمایید:

- لطفاً مشخصات، کد آموزشگاه و کد دانش‌آموزی خود را آن طوری که در پاسخ‌نامه از شما خواسته‌شده، به‌دقت در محل مربوط بنویسید.
- لطفاً در پر کردن ردیف مربوط به تاریخ تولد دقت کنید.
- کد دفترچه سؤال شما (۲) است که لازم است این عدد را در پاسخ‌نامه در محل مربوط علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه کنید، کد دفترچه سؤال شما که در بالای هر صفحه نوشته‌شده، با کد اصلی که در این صفحه است برابر باشد.
- این آزمون **۳۹ سؤال چندگزینه‌ای** و **۸ مسئله‌ی** کوتاه دارد و وقت آن **۴ ساعت** است.
- استفاده از ماشین‌حساب مهندسی که قابل‌برنامه‌ریزی نیست، مجاز است.
- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- در قسمت سؤال‌های چندگزینه‌ای، پاسخ‌های غلط نمره‌ی منفی دارند. هر سؤال فقط یک جواب درست دارد. علامت زدن بیش از یک گزینه برای یک سؤال، نمره‌ی منفی را دو برابر خواهد کرد؛ حتی اگر یکی از گزینه‌های علامت زده‌شده درست باشد.
- پاسخنامه را تمیز نگه‌دارید از تا کردن آن خودداری کنید. فقط در آنجایی که از شما خواسته‌شده، چیزی بنویسید یا علامت بزنید. هرگز در پشت پاسخ‌نامه چیزی ننویسید. هر نوشته یا علامت نامربوط، ممکن است دستگاه علامت‌خوان را به‌اشتباه بی اندازد.
- به همراه داشتن تلفن همراه یا هرگونه وسیله‌ی ارتباطی دیگر مجاز نیست.
- نتایج این مرحله از آزمون المپیاد، اواخر اسفندماه اعلام خواهد شد.
- پاسخنامه‌ی این آزمون توسط **کامبیز خالقی** و **ذوالفقار دانشی‌نسب** تهیه شده است.

www.MAAKH.ir

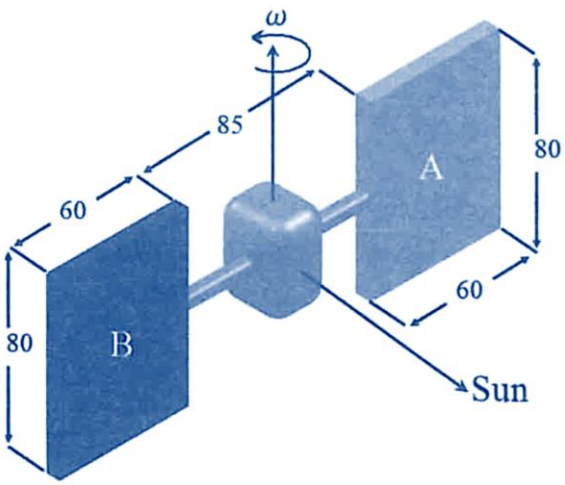
کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

ثابت‌های فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}$	$۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$
σ	ثابت استفان بولتزمان	$Wm^{-۲}K^{-۴}$	$۵/۶۷\times۱۰^{-۸}$
k_B	ثابت بولتزمان	$JK^{-۱}$	$۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$
h	ثابت پلانک	Js	$۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$
c	سرعت نور	$ms^{-۱}$	$۳/۰۰\times۱۰^{۸}$
eV	الکترون‌ولت	J	$۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$
	سال نجومی	$days$	$۳۶۵/۲۶$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}$
Au	واحد نجومی	m	$۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}$
Ly	سال نوری	m	$۹/۴۶\times۱۰^{۱۵}$
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	$۶/۹۶\times۱۰^{۸}$
$R_\oplus$	شعاع شعاع زمین	m	$۶/۳۸\times۱۰^{۶}$
	شعاع مشتری در استوا	m	$۷/۱۵\times۱۰^{۷}$
	شعاع ماه	m	$۱/۷۴\times۱۰^{۶}$
	شعاع مداری ماه	m	$۳/۸۴\times۱۰^{۸}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷\times۱۰^{۲۴}$
	جرم مشتری	kg	$۱/۹۰\times۱۰^{۲۷}$
$T_\odot$	دمای خورشید	K	$۵/۷۹\times۱۰^{۳}$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}$
	ثابت خورشیدی	$Wm^{-۲}$	$۱/۳۷\times۱۰^{۳}$
	قدر مطلق بولومتریک خورشید		$۴/۷۲$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		$-۲۶/۸$
	قدر ظاهری ماه بدر		$-۱۲/۷$
	عمر خورشید	$years$	$۱۰^{۱۰}$
$H_\circ$	ثابت هابل	$Kms^{-۱}Mpc^{-۱}$	۷۰

۱- هنگامی‌که نور به سطح یک جسم برخورد می‌کند، فوتون‌ها به‌واسطه‌ی تغییر تکانه‌ی خطی خود، بر سطح نیرو وارد می‌کند. این نیرو که تنها ناشی از تابش است، نیروی تابشی نامیده می‌شود. همچنین انرژی فوتون‌ها از رابطه‌ی $E = pc$ به دست می‌آید.

در این رابطه، p اندازه حرکتِ خطی فوتون‌ها و c سرعت نور است. ماهواره‌ای فضایی را در نظر بگیرید که به دور زمین می‌چرخد و به دو سطح A و B که هر دو در جهت عمود بر تابش خورشید قرار دارند، مجهز است، به‌طوری‌که سطح A بازتابنده‌ی کامل نور و سطح B جذب‌کننده‌ی کامل نور است. گشتاور ناشی از نیروی تابشی، چند نیوتن‌متر و جهت آن نسبت به جهت نشان داده‌شده در شکل چگونه است؟ ابعاد در شکل به سانتی‌متر است.



الف) موافق، $۱/۶\times۱۰^{-۶}$ ب) موافق، $۹/۳\times۱۰^{-۷}$ ج) موافق، $۲/۲\times۱۰^{-۶}$

د) مخالف، $۱/۶\times۱۰^{-۶}$ هـ) مخالف، $۹/۳\times۱۰^{-۷}$ و) مخالف، $۲/۲\times۱۰^{-۶}$

۲- شماره‌گذاری اجرام موجود در فهرست NGC بر اساس افزایش بُعد است؛ یعنی اولین جرم این فهرست جرمی است که کمترین بُعد را دارد و از آن پس با افزایش بُعد، سایر اجرام شماره‌گذاری می‌شوند. با توجه به اینکه این فهرست دربرگیرنده‌ی ۷۸۴۰ جرم غیر ستاره‌ای است. مکان $NGC۴۸۲۶$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) $\alpha = ۲^h۳۸^m, \delta = -۱۹^\circ۲'$ ب) $\alpha = ۰۶^h۰۱^m, \delta = +۲۳^\circ۱۹'$

ج) $\alpha = ۱۲^h۵۷^m, \delta = +۲۱^\circ۴۱'$ د) $\alpha = ۲۰^h۰۶^m, \delta = -۲۱^\circ۵۵'$

۳- چگالی جرمی آستانه‌ی کیهان به‌صورت $\rho_c = \alpha c^m G^n H^p$ که در آن G ثابت گرانش نیوتن، H پارامتر هابل، c سرعت نور و α ثابتی بدون بعد است. کدام گزینه درست است؟

الف) $n = -۱, m = ۲, p = ۲$ ب) $n = ۱, m = -۱, p = -۲$

ج) $n = ۱, m = ۰, p = -۲$ د) $n = -۱, m = ۰, p = -۲$

هـ) $n = -۱, m = -۲, p = -۲$ و) $n = ۱, m = ۰, p = ۲$

۴- خط طیفی آلفای اتم هیدروژن (H_α) تابش شده از یک ستاره که طول‌موج آن در آزمایشگاه ۶۵۶/۱ نانومتر است، از طریق طیف‌سنجی اندازه‌گیری شده است. طول‌موج H_α اندازه‌گیری شده در دو نقطه‌ی مقابل هم در استوای ستاره به‌اندازه‌ی $۹\times۱۰^{-۱۲}\ m$ باهم اختلاف دارند. با فرض این‌که این اختلاف به خاطر دوران ستاره باشد، دوره‌ی تناوب چرخش این ستاره به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟ (قطر ستاره را $۱/۴\times۱۰^{۹} m$ و محور دوران ستاره منطبق بر صفحه کره‌ی سماوی فرض کنید.)

الف) ۵۰ روز ب) ۳۵روز ج) ۲۵روز

د) ۲۰روز هـ) ۱۵روز

۵- اطلاعات مربوط به دو ستاره‌ی A و B برای ناظر زمینی در جدول زیر داده‌شده‌اند. اگر می‌توانستیم به ستاره A سفر کنیم. قدر ظاهری B را در آسمان آنجا چه عددی اندازه می‌گرفتیم؟

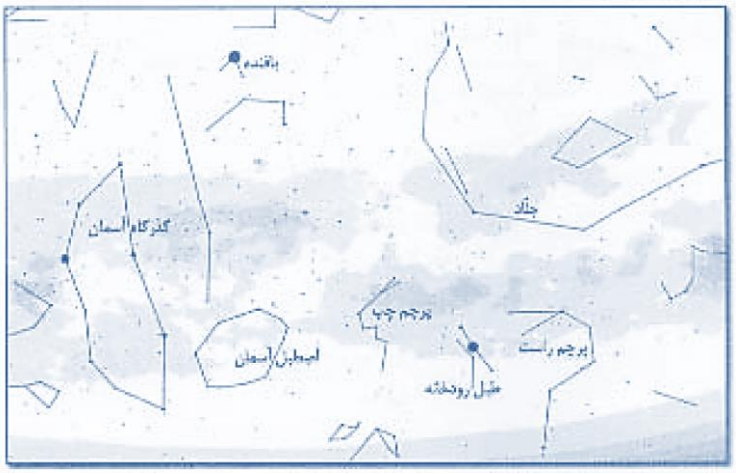
	ستاره‌ی A	ستاره‌ی B
قدر مطلق	۴/۵	۱/۵
قدر ظاهری	-۰/۵	۱/۵
میل	$+۳۰^\circ$	$+۴۵^\circ$
بُعد	۱۳۶°	۴۶°

الف) ۴ / ۴۳ ب) ۱ / ۴۳ ج) ۲ / ۶۷ د) $-۱ / ۶۷$

۶- منجمی با یک تلسکوپ نیوتنی ۶ اینچ که فاصله‌ی کانونی آن ۶۰ سانتی‌متر است، می‌خواهد کمربند جبار را مشاهده کند. برای اینکه کمربند جبار کاملاً در میدان دید او قرار گیرد، باید از کدام چشمی استفاده کند؟ $(FOV = ۴۵^\circ)$

الف) ۵ میلی‌متری ب) ۱۰ میلی‌متری ج) ۲۵ میلی‌متری د) ۴۰ میلی‌متری

۷- تصویری که مشاهده می‌کنید، نشان‌دهنده‌ی بخشی از آسمان است که مثلث تابستانی در آن قرارگرفته است. در این تصویر صورت‌های فلکی به شکلی که تمدن‌های قدیمی کره‌ای می‌شناخته‌اند، مشخص‌شده است. ستاره‌ی دنب در کدام صورت فلکی کره‌ای قرار دارد؟



الف) اصطبل آسمان ب) طبل رودخانه
ج) گذرگاه آسمان د) بافنده
هـ) جلاد

۸- ابوریحان بیرونی در انتهای کتاب «اُسطرلاب» فصلی در خصوص محاسبه‌ی محیط زمین دارد. او در این فصل روشی را معرفی می‌کند که در آن با استفاده از میزان افت (مقدار پایین آمدن افق نسبت به حالت عادی) می‌توان شعاع زمین را محاسبه کرد. او پس از معرفی این روش از بلندترین کوهی که بر روی زمین قرار دارد نام می‌برد و می‌گوید: «محاسبه نشان می‌دهد که مقدار افت افق بر قله‌ی کوهی به این بلندی، باید تقریباً سه درجه باشد و در مسائلی از این‌دست، باید به تجربه و امتحان متوسل شد و کامیابی جز از جانب خداوندِ توانایِ دانا نیست» با توجه به این گفته‌ی ابوریحان، او ارتفاع بلندترین کوه را چقدر تصور می‌کرده است؟

الف) ۳۰۰۰ متر ب) ۹۰۰۰ متر ج) ۲۰ کیلومتر
د) ۵۰ کیلومتر هـ) ۹۰ کیلومتر و) ۳۰۰ کیلومتر

۹- مجموع زوایای داخلی مثلث تابستانی ۳۷ / ۳ رادیان و مجموع زوایای داخلی مثلث زمستانی ۲۳ / ۳ رادیان است. با فرض اینکه ستاره‌ها به‌صورت همگن توزیع شده باشند. نسبت تعداد ستاره‌های درون مثلث تابستانی به ستاره‌های درون مثلث زمستانی چقدر است؟

الف) ۱ / ۴ ب) ۰ / ۷ ج) ۱ / ۰۱

د) ۰ / ۹۹ هـ) ۱ / ۲

۱۰- انحنای زمین ارسال امواج رادیـویی را بین آنتن‌های زمینی در فواصل طولانی محدود می‌کند. برای ارسال امواج رادیویی به‌فواصل طولانی‌تر، از یکی از لایه‌های جو به نام یون‌سپهر استفاده می‌شود. بدین ترتیب که آنتن فرستنده، امواج رادیویی را به‌سوی یون‌سپهر ارسال می‌کند. این امواج پس از برخورد به یون‌سپهر به سمت زمین بازتاب می‌شوند و به آنتن گیرنده می‌رسند. با فرض آن‌که بازتاب از یون‌سپهر به‌صورت منظم باشد و فقط از یک‌بار بازتابش استفاده کنیم، بیش‌ترین فاصله‌ی دو آنتن گیرنده و فرستنده در روی زمین چه قدر می‌تواند باشد؟ (ارتفاع لایه‌ی بازتاب‌کننده یون‌سپهر را $۱۱۰km$ در نظر بگیرید و از ارتفاع آنتن‌های رادیویی صرف‌نظر کنید)

الف) $۱۳۰۰km$ ب) $۳۵۰۰km$ ج) $۱۷۰۰km$ د) $۲۴۰۰km$

۱۱- خورشید هنگام غروب کمی بیضی‌وار مشاهده می‌شود. جهت قطر بزرگ این بیضی در شهری با عرض جغرافیایی ۵۱ درجه ..... .

الف) به افق زاویه ۵۱ درجه دارد. ب) موازی افق است.

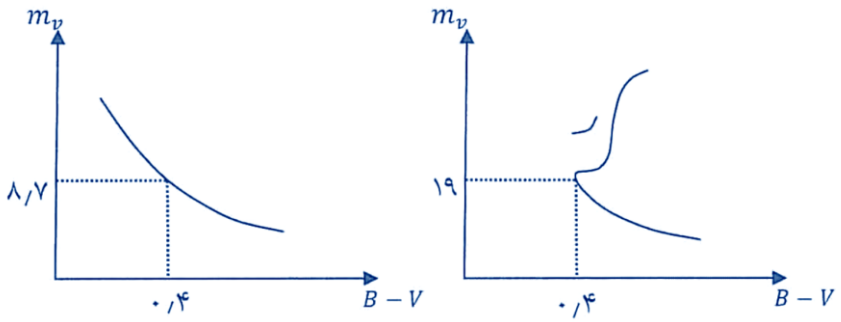
ج) به افق زاویه ۳۹ درجه می‌سازد. د) عمود بر افق است.

۱۲- یک خوشه‌ی کهکشانی را در نظر بگیرید. فرض کنید هر کهکشان مانند یک ذره‌ی گاز ایده‌آل رفتار می‌کند. میانگین سرعت تصادفی کهکشان‌ها درون این خوشه‌ی کهکشانی تقریباً $۱۰۰km/s$ و چگالی تعدادشان $۰/۰۰۲۹Mpc^{-۳}$ است. اگر جرم متوسط هر کهکشان $۳\times۱۰^{۴۴}gr$ باشد، چه فشار تقریبی را می‌توان به این خوشه‌ی کهکشانی نسبت داد؟

الف) $۱۰^{-۲۲}Pa$ ب) $۳\times۱۰^{-۱۷}Pa$ ج) $۷\times۱۰^{۶}Pa$

د) $۹\times۱۰^{-۲۰}Pa$ هـ) $۹\times۱۰^{۲}Pa$

۱۳- نمودار قدر ظاهری – رنگ برای دو خوشه‌ی ستاره‌ای مطابق شکل‌های زیر به‌دست‌آمده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد نوع و فاصله‌ی خوشه‌ها تا زمین درست است؟



الف) خوشه‌ی ۱ باز، خوشه‌ی ۲ کروی و خوشه‌ی ۲ به زمین نزدیک‌تر است.

ب) خوشه‌ی ۱ کروی، خوشه‌ی ۲ باز و خوشه‌ی ۲ به زمین نزدیک‌تر است.

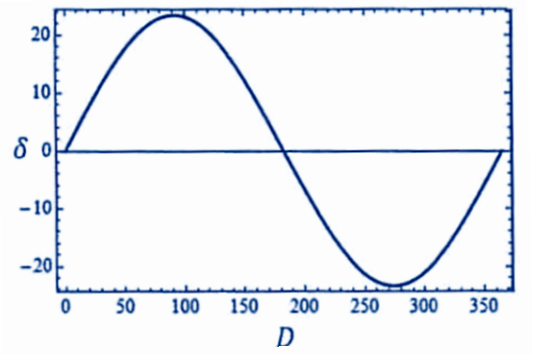
ج) خوشه‌ی ۱ باز، خوشه‌ی ۲ کروی و خوشه‌ی ۱ به زمین نزدیک‌تر است.

د) خوشه‌ی ۱ کروی، خوشه‌ی ۲ باز و خوشه‌ی ۱ به زمین نزدیک‌تر است.

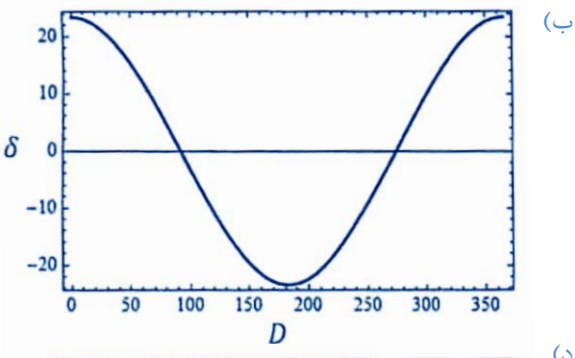
www.MAAKH.ir

۱۴- ماخ کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایانگر میل خورشید (δ) برحسب روزهای سپری شده از آغاز سال شمسی (D) است؟

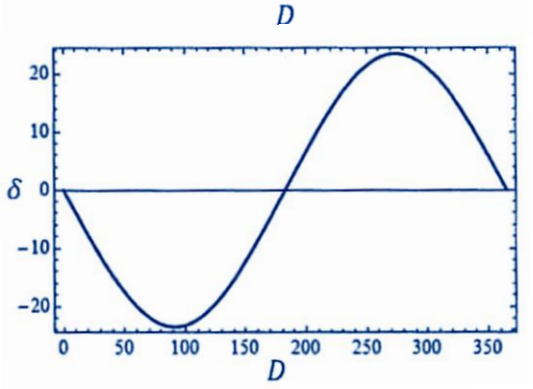
الف)



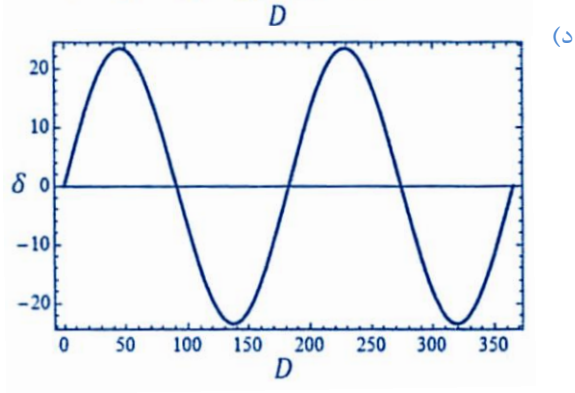
ب)



ج)



د)



۱۵- ماخ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست **نیست**؟

الف) در مدل استاندارد کیهان‌شناسی، کیهان در مقیاس‌های (بزرگ‌تر ۱۰۰ از مگا پارسک) همگن و همسانگرد است.

ب) طیف تابش زمینه‌ی کیهانی از طیف پلانک تبعیت می‌کند.

ج) رصدها نشان می‌دهند که کم‌تر از ۵۰ درصد عالم از ماده‌ی درخشان تشکیل‌شده است.

د) رصد ابرنواخترهای نوع Ia نشان می‌دهد که شتاب انبساط عالم منفی است.

هـ) در انبساط کیهانی، دمای کیهان با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

۱۶- ماخ تصویر روبرو بخشی از ستارهای آسمان را نشان می‌دهد که نام یکی از ستاره‌ها در آن مشخص‌شده است.

کدام‌یک از صورت‌های فلکی زیر در نقشه موجود نیست؟

الف) دب اکبر

ب) اکلیل شمالی

ج) سنبله

۱۷- بر اساس قانون انبساط هابل، سرعت نسبی دور شدن دو جسم که به فاصله R از یکدیگر قرارگرفته‌اند در زمان حال به‌صورت $v = H_{\circ} R$ است. با توجه به تعریف $t_H \equiv H_{\circ}^{-1}$ کدام گزینه **نادرست** است؟

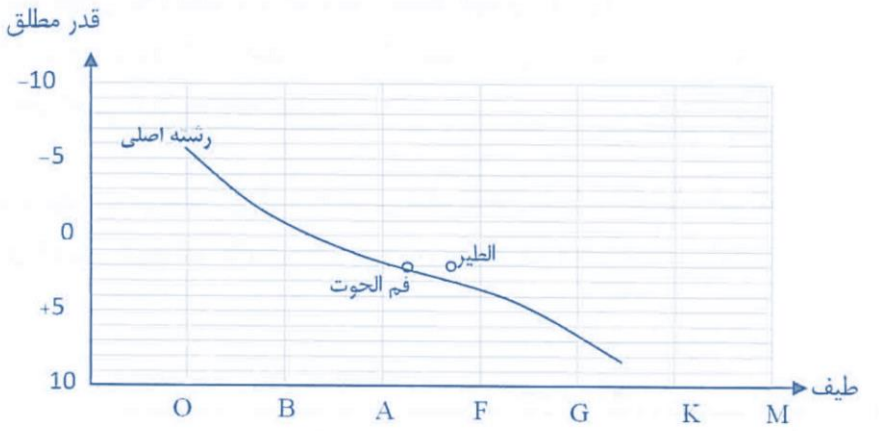
الف) سن کیهانی که همیشه با شتاب منفی منبسط شود از t_H کوچک‌تر است.

ب) سن کیهانی که همیشه با شتاب مثبت منبسط شود از t_H بزرگ‌تر است.

ج) اگر شتاب انبساط کیهان صفر باشد، در آن صورت سن عالم برابر با t_H است.

د) سن کنونی کیهانِ ما دقیقاً برابر با t_H است.

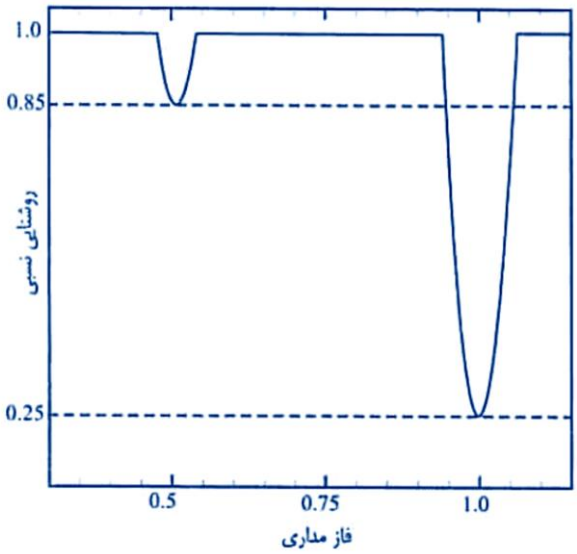
۱۸- قدر ظاهری برای ستاره‌ی فم‌الحوت ۱/۲ ثبت شده است. چنانچه فم‌الحوت دورتر از ستاره‌ی الطیر باشد، با توجه به نمودار قدر مطلق – رنگ داده‌شده، قدر ظاهری ستاره‌ی الطیر کدام است؟



الف) ۰/۷ ب) ۱/۵

ج) ۱/۷ د) ۲/۷

۱۹- نمودار روبرو منحنی نوری یک دوتایی گرفتی را نشان می‌دهد. اگر ستاره‌ای که در کمینه‌ی اولیه پوشانده می‌شود، یک ستاره‌ی خورشیدگون باشد، دمای سطح ستاره‌ی دیگر چه خواهد بود؟ (وقتی منظومه‌ی دوتایی کم‌ترین میزان روشنایی را داراست می‌گوییم در کمیته‌ی اولیه قرار دارد)

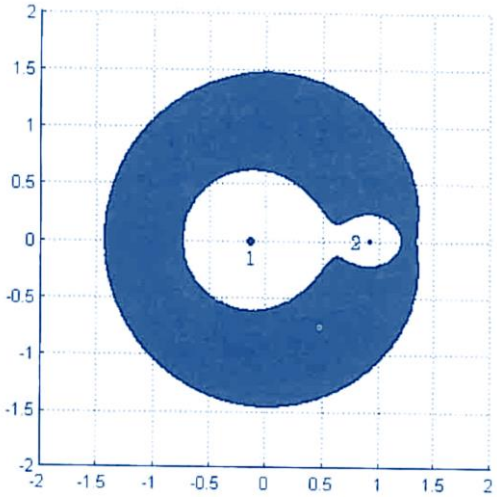


الف) $۸۱۰۰K$ ب) $۷۵۰۰K$

ج) $۶۲۰۰K$ د) $۴۴۰۰K$

هـ) $۳۹۰۰K$

۲۰- یک سیستم دوتایی متشکل از دو ستاره‌ی ۱ و ۲ در یک صفحه، مطابق شکل قرار دارند یک ستاره‌ی کوچک در فضای میان دو ستاره قرار دارد و در صفحه‌ی مداری دو ستاره حرکت می‌کند. حرکت سیاره به‌گونه‌ای است که: $V^2 = f(x,y)$. در این عبارت، V سرعت جسم و تابعی از مکان است. در شکل داده‌شده، مقدار تابع f در نواحی سفید، مثبت و در نواحی تاریک، منفی است. کدام گزینه در مورد حرکت سیاره امکان‌پذیر نیست؟



الف) بسته به مقدار انرژی سیاره، سیاره گاهی به دور ستاره‌ی ۱ و گاهی به دور ستاره‌ی ۲ می‌گردد.

ب) سیاره همیشه به دور ستاره‌ی ۱ می‌گردد.

ج) سیاره همیشه به دور ستاره‌ی ۲ می‌گردد.

د) سیاره از این منظومه‌ی دوتایی فرار می‌کند.

۲۱- در هزار سال گذشته، بسیاری از منجّمین اسلامی نتایج رصدهای خود را در قالب «زیج» منتشر کرده‌اند. محتوای زیج‌ها عموماً جدول‌های خسوف و کسوف، مقدار عددی توابع نجومی، تعدیل زمان، عرض‌های جغرافیایی، محاسبه‌ی سرعت میانگین خورشید و سیارات و ... بوده است. از مهم‌ترین زیج‌های دوره‌ی اسلامی می‌توان به زیج بتّانی، زیج جامع از کوشیار گیلانی، زیج ایلخانی از خواجه‌نصیرالدین طوسی و زیج خاقانی از غیاث‌الدین جمشید کاشانی اشاره کرد. برای نمونه، عبدالرحمن خازنی در بخشی از زیج سنجری (قرن ششم) سرعت زاویه‌ای میانگین خورشید در کره‌ی آسمان را برحسب درجه بر روز، در دستگاه شصت‌گانی به‌صورت مقابل گزارش کرده است: ۴۰ : ۲۹ : ۰۴ : ۵۳ : ۳۳ : ۲۰ : ۰۸ : ۵۹ : °۰؛ با توجه به این مقدار، سال اعتدالی چقدر است؟

الف) ۳۶۵روز و ۵ ساعت و ۵۰ دقیقه

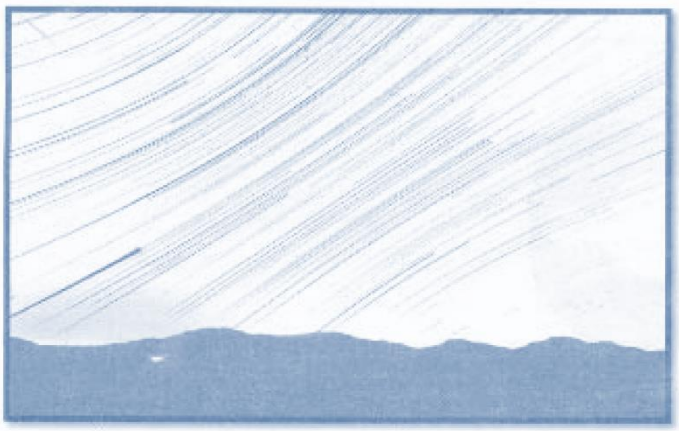
ب) ۳۶۵روز و ۶ ساعت و ۱۰ دقیقه

ج) ۳۶۴روز و ۹ ساعت و ۲۰ دقیقه

د) ۳۶۴روز و ۲۲ ساعت و ۱۰ دقیقه

هـ) ۳۵۴روز و ۶ ساعت و ۴۰ دقیقه

۲۲- با یک دوربین عکاسی، تصویر زیر را از رد ستاره‌ها در افق شرقی تهیه‌کرده‌ایم. برای گرفتن این عکس شاتر دوربین برای مدتی باز نگاه داشته‌ایم تا مسیر حرت ستاره‌ها نمایان شود. این عکس در چه عرض جغرافیایی گرفته‌شده است؟



الف) $35^\circ S$

ب) $55^\circ S$

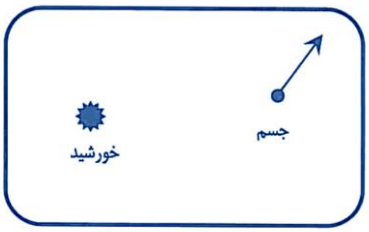
ج) $65^\circ S$

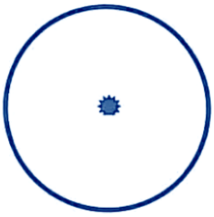
د) $65^\circ N$

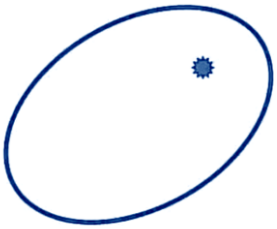
هـ) $55^\circ N$

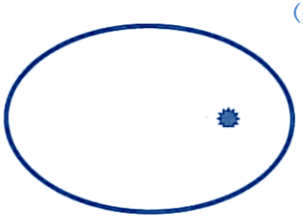
و) $35^\circ N$

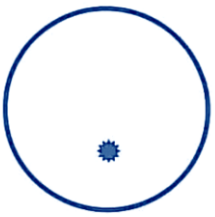
۲۳- بردار کشیده شده در شکل، بردار سرعت یک جسم کوچک در منظومه‌ی شمسی را به سمت خورشید در یک لحظه نشان می‌دهد. شکل مدار این جسم کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

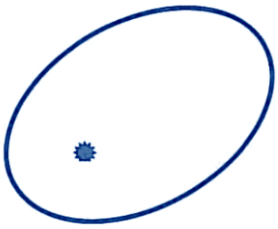


الف)


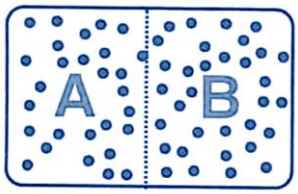
ب)


ج)


د)


هـ)


۲۴- ظرف شکل روبه‌رو از دو قسمت مساوی فرضی A و B تشکیل‌شده است. که دارای حجم برابر هستند. ۹۹ ذره در این ظرف قرار دارند و به‌طور تصادفی حرکت می‌کنند. در طول یک سال، مدت‌زمانی که همه‌ی ذرات فقط در قسمت A هستند و قسمت B کاملاً خالی است، به کدام عدد نزدیک‌تر است؟



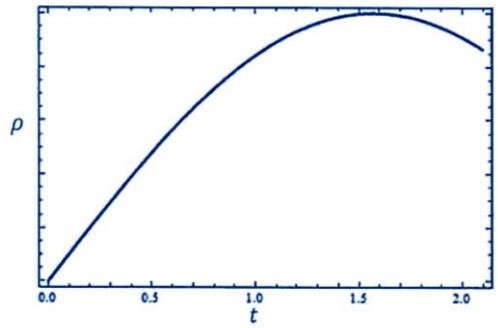
الف) $۱۰^{-۲۳}$ ثانیه
ب) $۱۰^{-۱۸}$ ثانیه
ج) $۱۰^{-۱۰}$ثانیه
د) $۱۰^{-۲}$ ثانیه
هـ) ۱ ثانیه

۲۵- دو دنباله‌دار در مدارهای باز در منظومه‌ی شمسی در گردش هستند. مدار دنباله‌دار اول سهمی شکل و مدار دنباله‌دار دوم هـذلولی شکل است. زمانی که دو دنباله‌دار در فاصله‌ای برابر از خورشید قرارگرفته‌اند، سرعت دنباله‌دار اول $۴۰km/s$ و سرعت دنباله‌دار دوم $۵۰km/s$ نسبت به خورشید است. هنگامی‌که دنباله‌دار دوم در فاصله‌ی بی‌نهایت از خورشید قرار می‌گیرد (از گرانش خورشید خارج می‌شود)، سرعت آن چند کیلومتر بر ثانیه خواهد بود؟

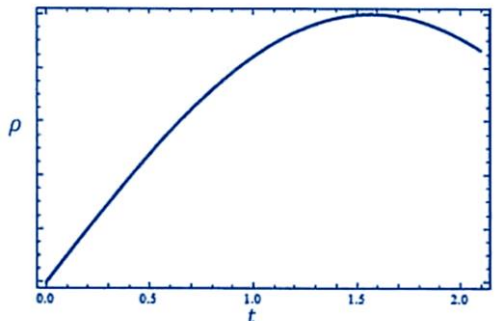
الف) ۴۰
ب) ۳۰
ج) ۲۱
د) ۶۴
هـ) ۱۰

۲۶- اگر در دوره‌ای از تحول کیهان، عالم عمدتاً از ماده‌ی غیر نسبیتی تشکیل‌شده باشد، نمودار چگالی عالم با زمان، کدام گزینه است؟ فرض کنید ضریب مقیاس a، که معیاری از شعاع عالم است، در آن دوران، با زمان رابطه‌ی زیر را دارد: $a \propto t^{\frac{۲}{۳}}$.

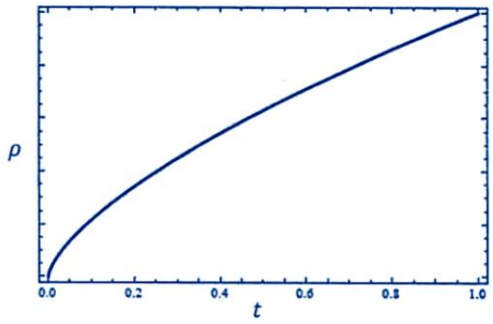
الف)



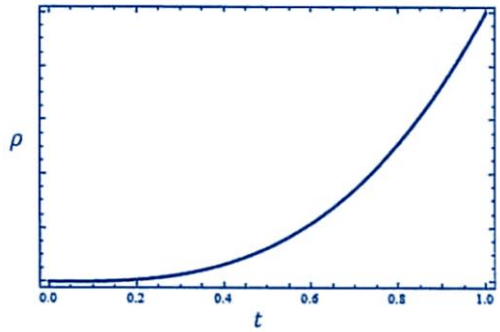
ب)



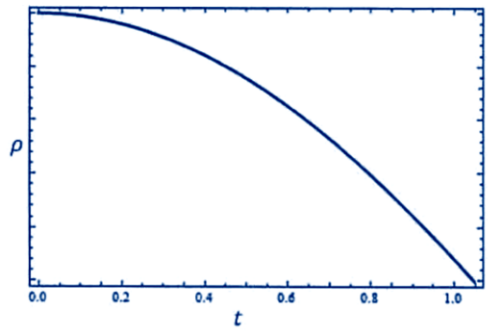
ج)



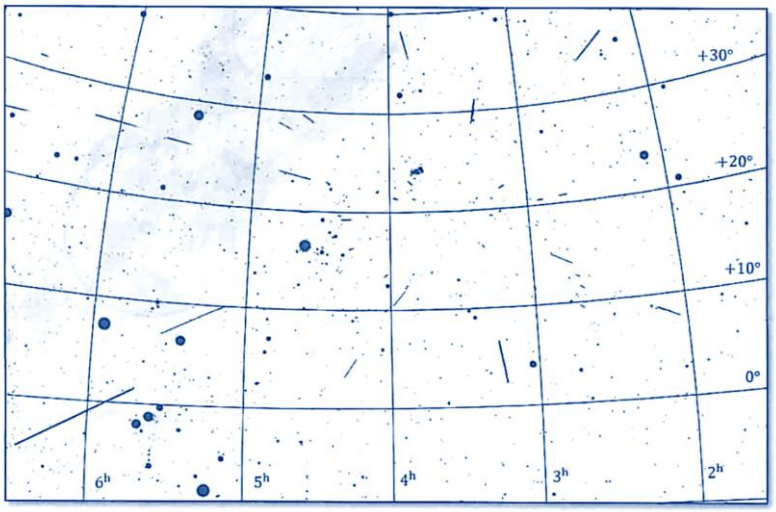
د)



هـ)



۲۷- روی نقشه‌ای که ملاحظه می‌کنید، ردهای مربوط به یک بارش شهابی رسم شده‌اند. این نقشه به‌وسیله‌ی خطوط هم بُعد و هم میل درجه‌بندی‌شده و بُعد و میل مربوط به هر یک از این خطوط بر روی آن نوشته شده است. بُعد و میل تقریبی کانون بارش کدام است؟



الف) $\delta = -۲۰^\circ ; \alpha = ۲^h ۳۰^m$

ب) $\delta = +۱۵^\circ ; \alpha = ۴^h ۳۰^m$

ج) $\delta = +۲۰^\circ ; \alpha = ۳^h ۳۰^m$

د) $\delta = +۳۵^\circ ; \alpha = ۲^h ۳۰^m$

۲۸- طول و عرض جغرافیایی مکـه‌ی مکرمه به ترتیب $39^\circ 54' E$ و $21^\circ 27' N$ است. در لحظه‌ای که خورشید دقیقاً در سمت‌الرأس مکه قرار دارد، ناظری خورشید را با سمت صفر و ارتفاع 10° مشاهده می‌کند. مکان این ناظر، کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) $l = 140^\circ 06' W\ ;\ \varphi = 78^\circ 33' N$

ب) $l = 50^\circ 06' W\ ;\ \varphi = 78^\circ 33' N$

ج) $l = 39^\circ 54' E\ ;\ \varphi = 68^\circ 33' S$

د) $l = 129^\circ 54' E\ ;\ \varphi = 68^\circ 33' S$

هـ) این پدیده امکان‌پذیر نیست.

۲۹- تا چه زمانی سرعت چرخش زمین به دور خودش بر اثر نیروی جزر و مدی ماه کاهش پیدا خواهد کرد؟

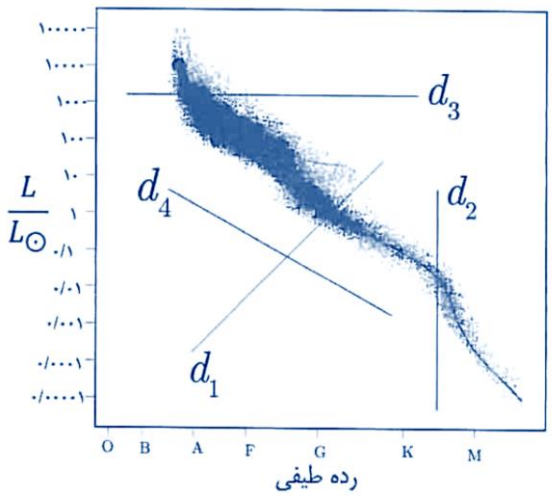
الف) زمانی که دوره‌ی تناوب چرخش زمین به دور خودش برابر با ۲۹ روز باشد.

ب) بر اساس قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای، دوره تناوب چرخش زمین تغییر نخواهد کرد.

ج) زمانی که دوره‌ی تناوب چرخش زمین به دور خودش با دوره‌ی تناوب چرخش ماه به دور زمین یکی شود.

د) زمانی که دوره‌ی تناوب چرخش زمین به دور خودش برابر با ۲۷ / ۳ روز شود.

۳۰- در نمودار HR می‌توان دسته خطوطی با نام خطوط هم شعاع (شعاع ثابت) رسم کرد. به‌طوری‌که هر دو ستاره که روی یک خط هم شعاع باشند (مستقل از مکانشان در نمودار HR) شعاع یکسانی خواهند داشت. در نمودار HR مقابل، کدام‌یک از خطوط رسم شده می‌تواند یک خط هم شعاع باشد؟



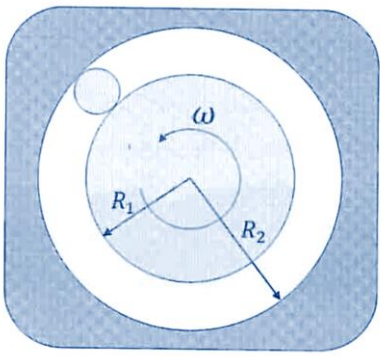
الف) d_1

ب) d_2

ج) d_3

د) d_4

۳۱- یک غلتک در فضای میان دو استوانه‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های R_1 و R_2 مـطـابق شـکل قرارگرفته است. استوانه‌ی خارجی ثابت است و استوانه‌ی داخلی با سرعت زاویه‌ای ω در جهت نشان داده‌شده گردش می‌کند. حرکت غلتک روی دو استوانه، غلتش کامل و بدون لغزش است. اگر غلتک به ازای هر دور چرخش به دور خود، یک‌بار دور مرکز استوانه‌ها بچرخد، در این صورت نسبت شعاع استوانه‌ی خارجی به استوانه‌ی داخلی چقدر است؟



الف) ۲

ب) ۳

ج) ۴

د) $\frac{5}{3}$

هـ) $\frac{4}{3}$

۳۲- ماخ مثلث کروی ABC را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که $AB = \frac{\pi}{۴}, \hat{B} = \frac{\pi}{۴}$ و $AC = \theta$. در کدام‌یک از حالات زیر مثلث ABC حتماً به‌صورت یکتا مشخص می‌شود؟

الف) $\theta < \frac{\pi}{۶}$

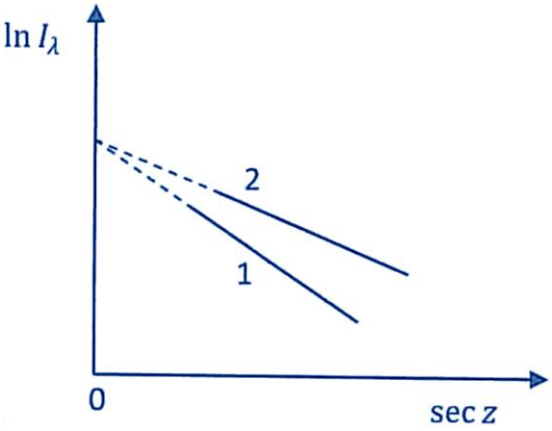
ب) $\frac{\pi}{۵} < \theta \leq \frac{۲\pi}{۷}$

ج) $\frac{\pi}{۶} < \theta \leq \frac{\pi}{۴}$

د) $\frac{\pi}{۴} \leq \theta < \frac{\pi}{۲}$

هـ) $\frac{\pi}{۷} \leq \theta < \frac{\pi}{۵}$

۳۳- ماخ لگاریتم شدت روشنایی بر حسب $\sec z$ که z فاصله‌ی سمت‌الرأسی است، برای ستاره‌ی ۱ توسط ناظر ۱ ثبت شده است. همین داده‌ها برای ستاره‌ی ۲ توسط ناظر ۲ در مکان دیگری نیز ثبت شده و منحنی‌های آن‌ها در نمودار زیر داده‌شده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟



الف) ضریب جذب در جو زمین برای ناظر ۱ کوچک‌تر از ضریب جذب در جو برای ناظر ۲ است.

ب) روشنایی ستاره‌ها در جو ناظر ۱ کمتر از جو ناظر ۲ تضعیف می‌شود.

ج) روشنایی هر دو ستاره، خارج از جو برابر است.

د) ارتفاع ستاره‌ی ۲ بیشتر از ارتفاع ستاره‌ی ۱ است.

۳۴- ماخ منبع اصلی تولید انرژی در ستاره‌ها واکنش‌های هسته‌ای است. در مرکز ستاره‌ها واکنش‌های هسته‌ای در چرخه‌های متفاوت روی می‌دهند به‌گونه‌ای که هر چرخه آهنگ تولید انرژی مشخصی دارد. دو نمونه از چرخه‌ی واکنش‌های هسته‌ای چرخه‌ی پروتون–پروتون (PP) و چرخه‌ی کربن-نیتروژن-اکسیژن (CNO)، است. آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی PP برابر با αT^n و در چرخه‌ی CNO برابر با βT^m است؛ که در آن T دمای مرکز ستاره و m, β, α و n ثوابتی مثبت هستند. اگر $\alpha > \beta$ و $m > n$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) در تمامی دماها آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی PP غالب است.

ب) در تمامی دماها آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی CNO غالب است.

ج) ابتدا آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی PP غالب است و سپس با افزایش دما آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی CNO غالب می‌شود.

د) ابتدا آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی CNO غالب است و سپس با افزایش دما آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی PP غالب می‌شود.

۳۵- ماخ کاوشگری در فضای خارج از منظومه‌ی شمسی در حرکت است. این کاوشگر به یک جسم ناشناخته نزدیک می‌شود و تحت تأثیر میدان گرانشی آن قرار می‌گیرد. در یک‌لحظه، دستگاه‌های سنجش کاوشگر، سرعت و شتاب کاوشگر را نسبت به جسم ناشناخته چنین ثبت می‌کنند؛ $v = ۳۹۷۸\, m/s$; $a = ۱/۳۴۱\, m/s^۲$. اگر مسیر حرکت کاوشگر به دور جسم ناشناخته سهمی شکل باشد، جرم جسم ناشناخته چقدر است؟

الف) $۶ \times ۱۰^{۲۴} kg$

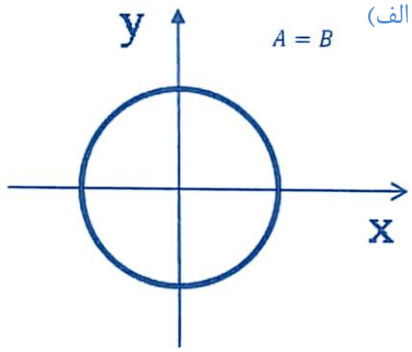
ب) $۴ \times ۱۰^{۲۲} kg$

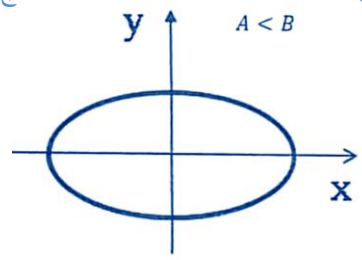
ج) $۳ \times ۱۰^{۲۵} kg$

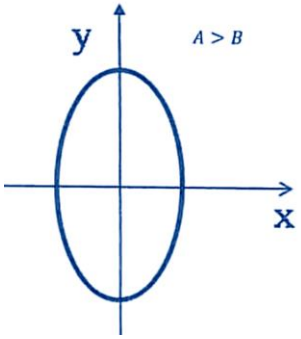
د) $۴ \times ۱۰^{۲۳} kg$

هـ) $۷ \times ۱۰^{۲۳} kg$

۳۶- کدام گزینه، توصیف درستی از مجموعه نقاطی در صفحه است که در معادله زیر صدق می‌کند؛ $Ax^2 + By^2 = C$ که در آن A، B و C اعداد حقیقی مثبت هستند.

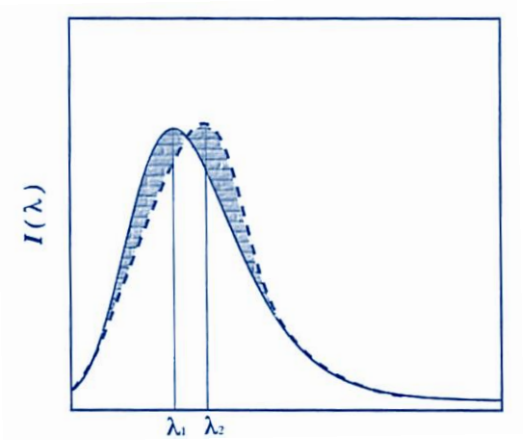
الف) 

ب) 

ج) 

د) هر سه گزینه درست است.

۳۷- در نمودار داده‌شده منحنی پیوسته، طیف تابشی یک جسم سیاه با دمای T و منحنی خط‌چین، طیف تابشی یک ستاره را نشان می‌دهد. سطح هاشور زده‌ی بالای منحنی پیوسته با سطح هاشور زده‌ی پایین آن برابر است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟



الف) شار تابشی کل جسم سیاه از شار تابشی کل ستاره کمتر است.

ب) دمای مؤثر ستاره با دمای جسم سیاه برابر است.

ج) دمای این جسم سیاه، از دمای جسم سیاهی که طول‌موج بیشینه‌ی شدت تابش آن λ_2 است، کمتر است.

د) دمای مؤثر ستاره از دمای جسم سیاه بیشتر است.

هـ) فرکانسی که در آن شدت تابش جسم سیاه بیشینه است، کمتر از فرکانس متناظر برای ستاره است.

۳۸- با فرض آن‌که عنصر هلیوم تنها در ستاره‌ها تولید می‌شود، میزان جرم هلیوم تولید شده در یک ثانیه برحسب کیلوگرم، در کل کیهان به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

الف) 10^{25} ب) 10^{40} ج) 10^{45} د) 10^{50}

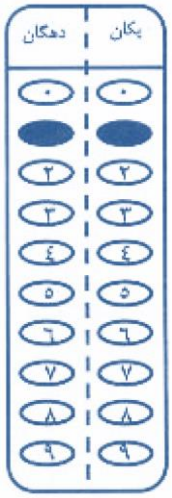
۳۹- یک فواره که شعاع دهانه‌ی آن ۲ سانتی‌متر است، آب را با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه به بالا می‌پاشد. شعاع مقطع آب در ارتفاع ۱/۸ متری چند سانتی‌متر است؟ $g = 10 m/s^2$

الف) $\sqrt{5}$ ب) $\sqrt{10}$ ج) $\sqrt[3]{7}$ د) $\sqrt[3]{5}$

«مسئله‌های کوتاه»

پیش از شروع به حل مسئله‌های کوتاه، توضیحات زیر را با **دقت** بخوانید. در این مسئله‌ها باید پاسخ را برحسب واحدهای موردنظر (متر، کیلو پارسک، ثانیه‌ی قوسی و غیره) که در صورت مسئله خواسته شده با دو رقم به‌دست‌آمده آورید؛ سپس خانه‌های مربوط به رقم‌های این عدد را در پاسخنامه سیاه کنید. توجه داشته باشید که رقم یکان عدد در ستون یکان و رقم دهگان در ستون دهگان علامت زده شود.

مثال: فرض کنید سرعت یک دنباله‌دار برحسب کیلومتر بر ثانیه خواسته‌شده است و شما مقدار آن را $۱۱/۲\frac{km}{s}$ محاسبه می‌کنید. ابتدا باید این عدد را به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد کنید تا ۱۱ به دست آید. سپس مطابق شکل زیر آن را در پاسخنامه وارد کنید:



ثوابت فیزیکی و نجومی در ابتدای برگه‌ی سؤالات داده‌شده است. در حل مسئله‌ها فقط از این ثوابت استفاده کنید. اعداد باید تنها یک‌بار و آن‌هم در انتهای حل هر مسئله گرد شوند.

اگر مرتبه‌ی بزرگی جواب از شما خواسته‌شده بود، پس از محاسبه‌ی پاسخ، ابتدا آن را به شکل نماد علمی یعنی $a\times۱۰^{b}$ درآورید و b را در پاسخنامه وارد کنید. دقت کنید که در این حالت $۱\le a<۱۰$ و b مرتبه‌ی بزرگی است. مثلاً یک واحد نجومی، یعنی $۱/۵\times۱۰^{۱۱}m$ را در نظر بگیرید. مرتبه‌ی بزرگی این عدد ۱۱ است.

هر مسئله ۱۲ نمره دارد، پاسخ نادرست در این بخش نمره‌ی منفی ندارد.

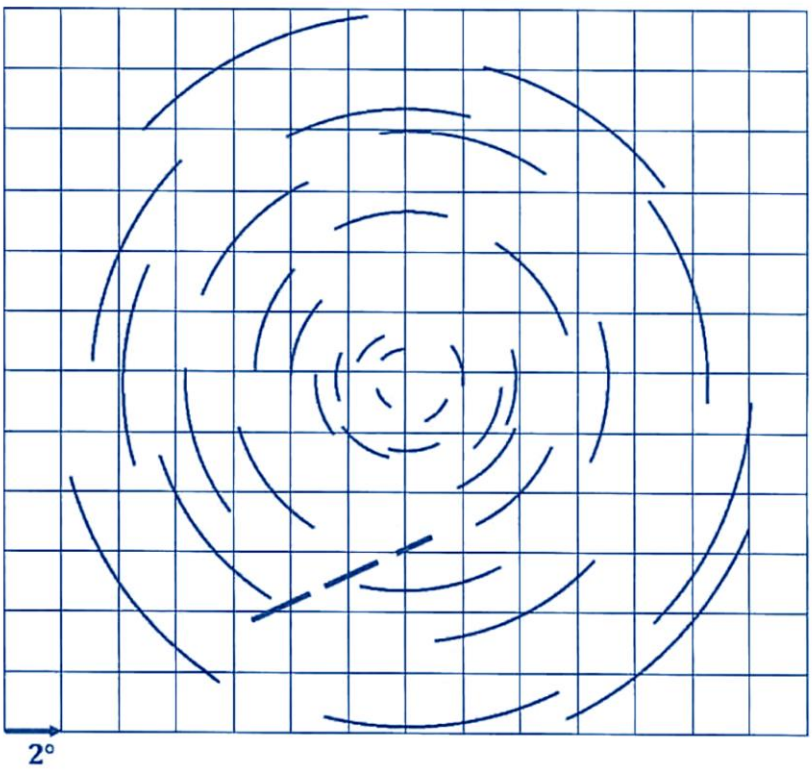
۱- ZHR (نرخ سرسوپی بارش شهابی) از رابطه‌ی زیر قابل‌محاسبه است:

$$ZHR = \frac{N \times r^{۶/۵-m_۰}}{T_{eff} \times (۱-C) \times \sin\theta}$$

در رابطه‌ی بالا N تعداد شهاب‌های ثبت‌شده در یک بازه‌ی زمانی، $m_۰$ قدر حدی، T_{eff} زمان مفید ثبت در بازه‌ی زمانی (برحسب ساعت)، C نسبت پوشیدگی آسمان، θ ارتفاع کانون بارش و r شاخص پراکندگی جمعیت است.

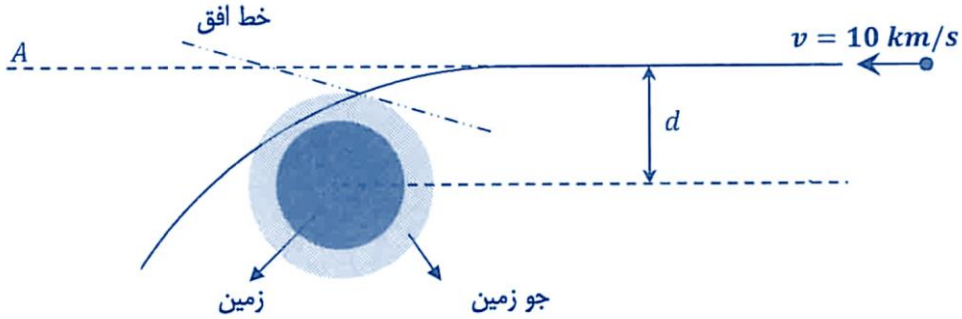
ناظری در شهر بلخ $\varphi = ۳۶^\circ ۴۵' N$ و $l = ۶۶^\circ ۵۴' E$ در حالی که قدر حدی‌اش ۶/۵ و زمان نجومی محلی (LST) برابر با $۱۱^h ۲۵^m$ است، اقدام به ثبت بارش شهابی اسدی می‌کند. او در مدت ۱۱ دقیقه، ۱۳ شهاب از این بارش را مشاهده می‌کند. با توجه به اینکه آسمان بالای افق این شخص کاملاً باز است، ZHR را محاسبه کنید؟ (بُعد و میل کانون این بارش را به ترتیب $۱۰^h ۱۲^m$ و $۲۳^\circ ۳۰'$ در نظر بگیرید).

۲- در شکل زیر عکسی را می‌بینید که از یک شهاب‌سنگ در حال عبور از آسمان گرفته شده است. طرز گرفتن این عکس بدین شکل است که یک پره در مقابل دوربین عکاسی با فرکانس ۱۸۰ دور در دقیقه می‌چرخد. توجه کنید که پره به‌طور کامل دهانه‌ی دوربین را می‌پوشاند. درنتیجه بر روی رد شهاب‌سنگ قطع‌شدگی‌هایی مشاهده می‌کنید. حال اگر فاصله شهاب‌سنگ از ماه ۱۰۰ کیلومتر باشد، با توجه به داده‌های موجود در تصویر، سرعت مماسی شهاب‌سنگ تقریباً چند کیلومتر بر ثانیه است؟



۳- فرایند بی‌دررو برای گاز کامل فرایندی است که $PV^{\frac{۵}{۳}}$ در طول آن ثابت می‌ماند، که P فشار گاز کامل و V حجم آن است. فرض کنید یک پوسته از آهن در حالت گاز کامل به‌صورت بی‌دررو و کروی از شعاع اولیه $۱۰^۵ km$ به شعاع نهایی R می‌رمبد. دمای اولیه، پوسته $۵ \times ۱۰^۸ K$ است. همچنین می‌دانیم دمای لازم برای فروپاشی هسته‌ی آهن به هسته‌ی هلیوم $۵ \times ۱۰^{۱۲} K$ است. برای اینکه این فروپاشی انجام بگیرد، شعاع پوسته‌ی آهن باید حداقل بر اثر رمبش چند درصد نسبت به شعاع اولیه کاهش یافته باشد؟ (مقدار درصد را بدون علامت درصد وارد پاسخنامه کنید).

۴- شهاب‌سنگی از فاصله‌ی بی‌نهایت دور مانند شکل زیر به سمت زمین حرکت می‌کند. سرعت آن در بی‌نهایت برابر با ۱۰ کیلومتر بر ثانیه است. امتداد بردار سرعت جسم در بی‌نهایت با خط‌چین A نشان داده‌شده است. فاصله‌ی عمودی این خط از مرکز زمین (d) برابر با ۹۰۰۰ کیلومتر است. زاویه‌ای که شهاب‌سنگ در هنگام ورود به جو با خط افق می‌سازد، چند درجه است؟ (جو زمین را کره‌ای با شعاع ۶۷۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید؛ خط افق نیز در هر نقطه بنا به تعریف، خطی عمود بر بردار شعاعی واقع در صفحه‌ی مداری است.)



۵- سیاه‌چاله‌ها واقعاً سیاه نیستند. درنتیجه‌ی اثرات کوانتومی، سیاه‌چاله‌ها تابشی دارند که تابش هاوکینگ نامیده می‌شود. می‌توان به این تابش یک دما نسبت داد که برای سیاه‌چاله‌های غیر چرخان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$T = \frac{hc^3}{16k\pi^2 GM}$$

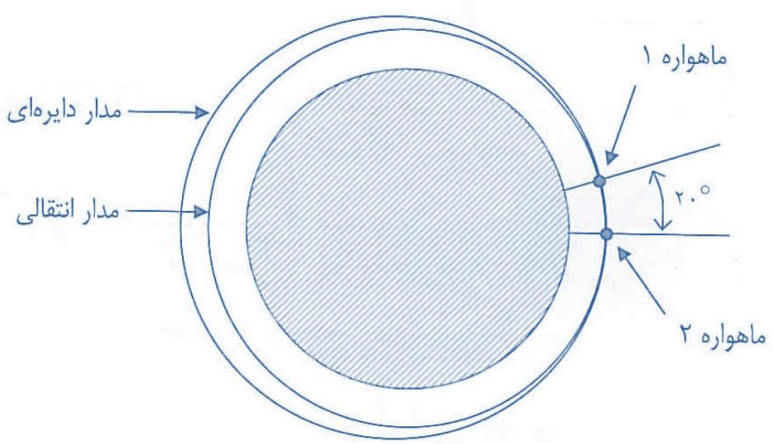
که در آن M جرم سیاه‌چاله، h نسبت پلانک، c سرعت نور، k ثابت بولتزمان، G ثابت جهانی گرانش است. درنتیجه‌ی این تابش، سیاه‌چاله جرم خود را از دست می‌دهند و اصطلاحاً تبخیر می‌شوند.

همچنین می‌دانیم که تابش زمینه‌ی کیهانی (CMB) تمام فضا را پرکرده است. سیاه‌چاله‌ها می‌توانند از این تابش تغذیه کنند و بدین ترتیب بر جرم خود بیفزایند. تابش زمینه‌ی کیهانی از توزیع طیف جسم سیاه با طول‌موج بیشینه‌ی تابش $\lambda_{\max} = 1/06mm$ تبعیت می‌کند جرم سیاه‌چاله‌ای که در نتیجه‌ی دو عامل ذکر شده در بالا، جرمش در طول زمان تغییر نکند، برحسب کیلوگرم چه قدر است؟ (در پاسخ‌نامه تنها مرتبه‌ی بزرگی جواب را وارد کنید.)

۶- در جهان در حال انبساط به علت محدود بودن سرعت نور، ما قادر به مشاهده‌ی فاصله‌ی محدودی از کیهان هستیم که به این فاصله «افق هابل» می‌گویند. با توجه به این مسئله و دانستن این‌که مقدار چگالی انرژی تابش در زمان فعلی $\rho_r = 0/260 MeV/m^3$ است، با استفاده از اصل هم ارزی جرم-انرژیِ اینشین مقدار ماده‌ی مورد نیاز برحسب کیلوگرم برای تولید این انرژی تابشی را در کره‌ی به شعاع افق هابل حساب کنید. (در پاسخ‌نامه تنها مرتبه‌ی بزرگی جواب را وارد کنید.)

۷- ماهواره ۱ ماهواره‌ای مخابراتی و ماهواره ۲، ماهواره‌ای حامل ربات تعمیرکار، هر دو در مدارهای دایره‌ای و هم صفحه، مطابق شکل به‌صورت هم‌جهت به دور زمین گردش می‌کنند. جهت چرخش هر دو ماهواره در شکل زیر، پادساعت‌گرد و ارتفاع دو ماهواره از سطح زمین، ۶۰۰ کیلومتر است. اختلاف زاویه‌ی دو ماهواره در حالت اولیه، ۲۰ درجه، مطابق شکل است.

ماهواره ۲ لازم است خود را به ماهواره ۱، جهت انجام تعمیرات، برساند. بنابراین ماهواره ۲ با کم کردن سرعت خود، در یک مدار انتقالی بیضوی قرار می‌گیرد که اوج آن روی مدار دایره‌ی خود قرار دارد. (مطابق شکل) و بعد از یک تناوب در مدار انتقالی، به ماهواره ۱ وصل می‌شود. کمترین ارتفاع ماهواره ۲ در مدار انتقال خود از سطح زمین چند کیلومتر است؟



۸- محمّد بن نجیب بکران جغرافی‌دانی است که اولین نقشه‌ی جغرافیایی مبتنی بر طول و عرض جغرافیایی را رسم کرده است. او پس از پایان ترسیم این نقشه بر روی پارچه‌ای بزرگ (۶۰۵ ه.ق.) کتابی کم‌حجم به نام «جهان نامه» برای بیان و تسهیل شناخت نقشه نوشت. در بخشی از «جهان نامه» فاصله‌ی شهرهای مختلف از هم برحسب فرسنگ آمده است. به‌عنوان‌مثال فاصله‌ی بغداد تا ری ۱۶۵ فرسنگ ذکر شده است. در جدول زیر طول و عرض جغرافیایی بغداد و ری را ملاحظه می‌کنید.

	طول جغرافیایی	عرض جغرافیایی
بغداد	۷۵°	۳۳°
ری	۸۵°	۳۵°

اطلاعات جدول بالا از زیج جامع نوشته‌ی کوشیار گیلانی نقل‌شده است که مبدأ طول جغرافیایی آن جزایر خالدات (در غربی‌ترین قسمت آفریقا) است؛ با توجه به این اطلاعات، ۱۰ فرسنگ چند کیلومتر است؟

کلید سؤالات

۱ هـ	۲۱ هـ	۴۱ هـ
۲ الف	۲۲ د	۴۲ د
۳ ج	۲۳ د	۴۳ د
۴ ب	۲۴ ب	۴۴ ب
۵ الف	۲۵ الف	۴۵ الف
۶ ب	۲۶ الف	۴۶ الف
۷ ب	۲۷ ب	۴۷ ب
۸ الف	۲۸ ب	۴۸ ب
۹ هـ	۲۹ ب	۴۹ ب
۱۰ ج	۳۰ ج	۵۰ ج
۱۱ الف	۳۱ ج	۵۱ ج
۱۲ ب	۳۲ ج	۵۲ ج
۱۳ د	۳۳ ب	۵۳ ب
۱۴ هـ	۳۴ د	۵۴ د
۱۵ ب	۳۵ د	۵۵ د
۱۶ ب	۳۶ ج	۵۶ ج
۱۷ ج	۳۷ الف	۵۷ الف
۱۸ هـ	۳۸ ب	۵۸ ب
۱۹ د	۳۹ ب	۵۹ ب
۲۰ ج	۴۰ ج	۶۰ ج

سؤالات تشریحی

۱- ۷۶

۲- ۱۱/۷۸ کیلومتر بر ثانیه

۳- ۹۹ درصد

۴- ۲۵ درجه

۵- ۲۳

۶- ۴۸

۷- ۷۶ کیلومتر

۸- ۵۷/۵ کیلومتر

۱- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

تکانه خطی اولیه فوتون‌ها را پیش از برخورد حساب می‌کنیم:

$$E = P_{\circ}c \; ; \; E = b_{\odot}\Delta S\Delta t = P_{\circ}c \;\; \Rightarrow \;\; P_{\circ} = \frac{b_{\odot}\Delta S\Delta t}{c}$$

نیروی اعمالی بر هر صفحه در بازه زمانی Δt ازاین‌قرار است؛ $P = F\Delta t$ و درنتیجه؛ $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$. از طرفی می‌دانیم در صفحه‌ی A که بازتابنده کامل است، فوتون‌ها پس از برخورد به صفحه در جهت عکس حرکت می‌کنند، پس تغییر تکانه خطی دو برابر مقدار اولیه و در جهت خورشید است؛ یعنی:

$$\Delta P_A = ۲P_{\circ} = ۲\frac{b_{\odot}\Delta S\Delta t}{c} \;\; \Rightarrow \;\; F_A = ۲\frac{b_{\odot}\Delta S}{c}$$

اما در صفحه B که جذب‌کننده کامل است، فوتون‌ها پس از برخورد متوقف می‌شوند و بنابراین، تغییر تکانه خطی برابر مقدار اولیه و در جهت خورشید است؛ پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\Delta P_B = P_{\circ} = \frac{b_{\odot}\Delta S\Delta t}{c} \Rightarrow F_A = \frac{b_{\odot}\Delta S}{c}$$

گشتاور این نیرو برابر حاصل‌ضرب نیرو در فاصله مرکز هندسی صفحه از مرکز دوران است. مرکز هندسی هر صفحه محل برخورد قطرهای آن است که با توجه به مشخصات روی نمودار، ۳۰ سانتی‌متر از لبه صفحه فاصله دارد. فاصله لبه صفحه تا مرکز دوران نیز ۴۲/۵ سانتی‌متر است؛ اما در مورد جهت گشتاور، نیرویی که به صفحه وارد می‌شود، قرینه نیرویی است که به فوتون وارد می‌شود؛ بنابراین گشتاور نیروی A در جهت دوران و گشتاور نیروی B در خلاف جهت دوران است. جهت مشخص‌شده را مثبت در نظر می‌گیریم؛

$$\tau_A = F_A.\Delta x = +۲\frac{b_{\odot}\Delta S}{c}\Delta x \;\; ; \;\; \tau_B = F_B.\Delta x = -\frac{b_{\odot}\Delta S}{c}\Delta x \;\; \Rightarrow \;\; \Sigma\tau = +\frac{b_{\odot}\Delta S}{c}\Delta x$$

جهت گشتاور موافق جهت مشخص‌شده است؛ حال با جایگذاری عددی خواهیم داشت؛

$$\Sigma\tau = \frac{+(۱۳۷۰\frac{W}{m^۲})(۰/۶\times۰/۸m^۲)}{(۳\times۱۰^۸\frac{m}{s})}(۰/۷۲۵m) = +۱/۵۹\times۱۰^{-۶}N.m$$

۲- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

توزیع اجرام NGC را در آسمان یکنواخت در نظر می‌گیریم و چون شمارش فقط به بُعد جسم بستگی دارد، با استفاده از تناسب می‌نویسیم:

$$\frac{n}{N_{\circ}} = \frac{\alpha}{۲۴^h} \;\; \Rightarrow \alpha = \frac{۴۸۲۶}{۷۸۴۰}۲۴^h = ۱۴/۷۷^h$$

نزدیک‌ترین گزینه به این مقدار، ۱۲ ساعت و ۵۷ دقیقه است.

۳- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

چون صحبت از چگالی جرمی به میان آمده واحد نهایی باید جرم بر مترمکعب باشد. این اتفاق تنها در مورد گزینه د روی می‌دهد؛ برای راحتی کار توصیه می‌شود ابتدا واحد ثوابت مذکور را به دست آورده و سپس با عددگذاری سعی کنید به واحد نهایی جرم بر مترمکعب دست پیدا کنید.

$$[\rho_c] = ML^{-3} \;\; ; \;\; [c] = LT^{-1} \;\; ; \;\; [G] = M^{-1}L^{3}T^{-2} \;\; ; \;\; [H] = T^{-1} \;\; ; \;\; [\rho_c] = [c]^m [G]^n [H]^p$$

و از برابر نهی عبارت‌ها برحسب توان‌هایشان، داریم: $ML^{-3} = (LT^{-1})^m (M^{-1}L^{3}T^{-2})^n (T^{-1})^p$. توان‌های دو طرف تساوی باید برابر باشد، پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$M: 1 = -n \;\; ; \;\; L: -3 = m + 3n \;\; ; \;\; T: 0 = -m - 2n - p \;\; \Rightarrow \;\; n = -1,\ m = 0,\ p = 2$$

۴- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

از رابطه‌ی دوپلر داریم؛ $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$؛ درنتیجه سرعت جابجایی $v = 3\times10^{8} m/s \times \frac{4/5\times10^{-12} m}{6/5\times10^{-7} m} = 2058\, m/s$ خواهد بود. از طرف دیگر طبق صورت سؤال، محور تناوب ستاره بر دیواره کره آسمان قرارگرفته پس زاویه انحراف مدار آن ۹۰ درجه است. پس از رابطه‌ی سرعت زاویه‌ای، $v = \omega R = \frac{2\pi R}{T}$ و دانستن قطر ستاره برابر $2R = 1/4\times10^{9} m$؛ می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$2058\, m/s = \frac{\pi \times 1/4\times10^{9} m}{T} \;\; \Rightarrow \;\; T = 2/14\times10^{6} s \simeq 24/7 \text{ روز}$$

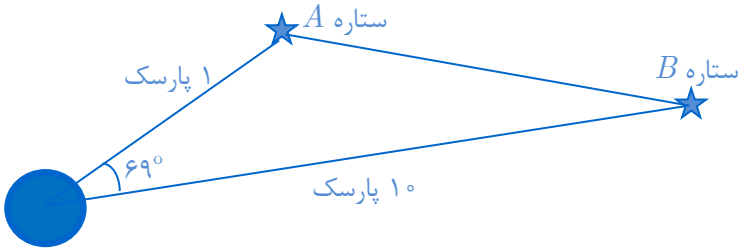
۵- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

ابتدا از روی قدر ظاهری و قدر مطلق، فاصله هر ستاره از خودمان را به دست می‌آوریم:

$$m - M = 5\log d - 5 \;\; \Rightarrow \;\; S_A: \;\; -0/5 - 4/5 = 5\log d - 5 \;\; \Rightarrow \;\; d_A = 1\, pc$$
$$m - M = 5\log d - 5 \;\; \Rightarrow \;\; S_B: \;\; 1/5 - 1/5 = 5\log d - 5 \;\; \Rightarrow \;\; d_B = 10\, pc$$

از طرفی طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توانیم فاصله زاویه‌ای دو ستاره را چنین بنویسیم:

$$\cos x = \cos(90 - \delta_A)\cos(90 - \delta_B) + \sin(90 - \delta_A)\sin(90 - \delta_B)\cos\Delta\alpha \;\; \Rightarrow$$
$$\cos x = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45 \cos(136 - 46) \Rightarrow \;\; x = 69^\circ$$



بنابراین می‌توانیم فاصله دو ستاره را از رابطه کسینوس‌ها در مثلث مسطحه بیابیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\theta \;\; \Rightarrow \; a^2 = 1 + 100 - 2\times1\times10\times\cos 69 \;\; \Rightarrow \;\; a = 9/68\, pc$$

اگر فاصله دو ستاره ۹/۶۸ پارسک باشد، با دانستن قدر مطلق، می‌توانیم قدر ظاهری ستاره را بیابیم:

$$m - 1/5 = 5\log 9/68 - 5 \;\; \Rightarrow \;\; m = 1/43$$

۶- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

می‌دانیم میل کمربند جبار تقریباً صفر و طول تقریبی آن ۳ درجه است؛ از طرف دیگر $FOV_T = \frac{FOV_{eye}}{m}$؛ برای محاسبه‌ی بزرگنمایی تلسکوپ هم از نسبت فاصله‌ی کانونی عدسی شیئی به فاصله‌ی کانونی عدسی چشمی استفاده می‌کنیم؛ یعنی $M = \frac{f_o}{f_e}$ پس داریم:

$$f_{eye} = \frac{f_o \times FOV_{eye}}{FOV_o} = \frac{۶۰۰mm \times ۳^\circ}{۴۵^\circ} \simeq ۴۰mm$$

۷- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

۸- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

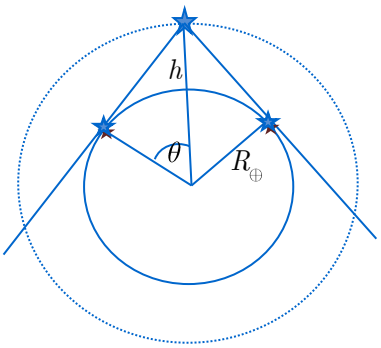
می‌دانیم ارتفاع افق منفی برحسب درجه از رابطه‌ی $\cos\theta = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}$؛ به دست می‌آید و چون؛ $r = ۶۴۰۰km$, $\theta = ۳^\circ$، درنتیجه پس از جایگذاری، $h = ۸/۹km \sim ۹۰۰۰m$ است.

۹- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

ازآنجاکه طبق فرض سؤال ستاره‌ها در هر دو مثلث همگن توزیع شده‌اند باید از نسبت مساحت‌های دو مثلث استفاده کنیم؛ از طرفی می‌دانیم مساحت مثلث کروی از رابطه‌ی $S = (A + B + C - \pi)r^۲$ به دست می‌آید؛ بنابراین چنین می‌نویسیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{(A_۱ + B_۱ + C_۱ - \pi)r_۱^۲}{(A_۲ + B_۲ + C_۲ - \pi)r_۲^۲} \;;\; r_۱ = r_۲ \;\Rightarrow\; \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۳/۲۷ - ۳/۱۴}{۳/۲۳ - ۳/۱۴} = ۱/۴۴$$

۱۰- گزینه د پاسخ صحیح است.



جای شهرهای گیرنده و فرستنده با ستاره‌ی آبی مشخص‌شده است؛ $\theta = \cos^{-1}(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h})$ و ارتفاع ماهواره از سطح زمین ۱۱۰ کیلومتر است؛ بنابراین فاصله‌ی شهر از پای عمود ماهواره ۱۰/۵۶ درجه است و فاصله‌ی دو شهر ۲۱ درجه است. برای تبدیل این مقدار به کیلومتر از تناسب استفاده می‌کنیم:

$$d = \frac{۲۰^\circ \times ۲\pi R_\oplus}{۳۶۰^\circ} = ۲۳۵۴\, km$$

۱۱- گزینه ب پاسخ صحیح است.

ازآنجاکه لایه‌های مختلف هوا موازی افق قرار دارند، اثر شکست هم موازی با افق به بیشینه خود می‌رسد.

۱۲- گزینه د پاسخ صحیح است.

طبق قانون گازهای ایده‌آل داریم؛ $PV = (\frac{۲}{۳}N)(\frac{۱}{۲}mv^۲)$ و طبق صورت سؤال داریم؛ $\rho = \frac{N}{V}$ ؛ $m = ۳\times ۱۰^{-۲۴}\ g$ ؛ $v = ۱۰^۵\ m/s$.

پس می‌توان قانون گازها را چنین نوشت؛ $P = \frac{۱}{۳}\frac{N}{V}mv^۲$ و بعد از جایگذاری:

$$P = \frac{۱}{۳}(\frac{۰/۰۰۲۹}{(۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶}\times ۱۰^۶)^۳})\times(۳\times ۱۰^{۴۴})\times(۱۰^{۱۶})^۲ = ۹/۸۲\times ۱۰^{-۱۷}\frac{gr}{m\times s^۲}$$

$$= ۹/۸۲\times ۱۰^{-۲۰}\frac{kgr}{m\times s^۲} = ۹/۸۲\times ۱۰^{-۲۰}Pa$$

۱۳- گزینه ب یا ج پاسخ صحیح است. (حذف)

ستاره مشخص‌شده در رشته اصلی هر دو نمودار دارای شاخص رنگ یکسانی است، بنابراین می‌توان با مقایسه قدر ظاهری آن، فاصله نسبی‌اش را تعیین کرد. قدر ظاهری این ستاره در خوشه سمت راست بیشتر است، بنابراین خوشه سمت راست دورتر از خوشه سمت چپ است.

هم‌چنین، نقطه بازگشت نمودار سمت چپ بسیار پایین‌تر از نمودار سمت راست است و این بدین معنی است که عمر خوشه سمت راست بسیار بیشتر از عمر خوشه سمت چپ است. با توجه به آن‌که خوشه‌های باز بسیار جوان‌تر از خوشه‌های کروی هستند، می‌توان نتیجه گرفت نمودار سمت راست مربوط به خوشه کروی دوردست و نمودار سمت چپ مربوط به خوشه باز نزدیک‌تر است. به دلیل عدم شماره‌گذاری نمودارها، نمی‌توان گزینه دقیق را مشخص کرد.

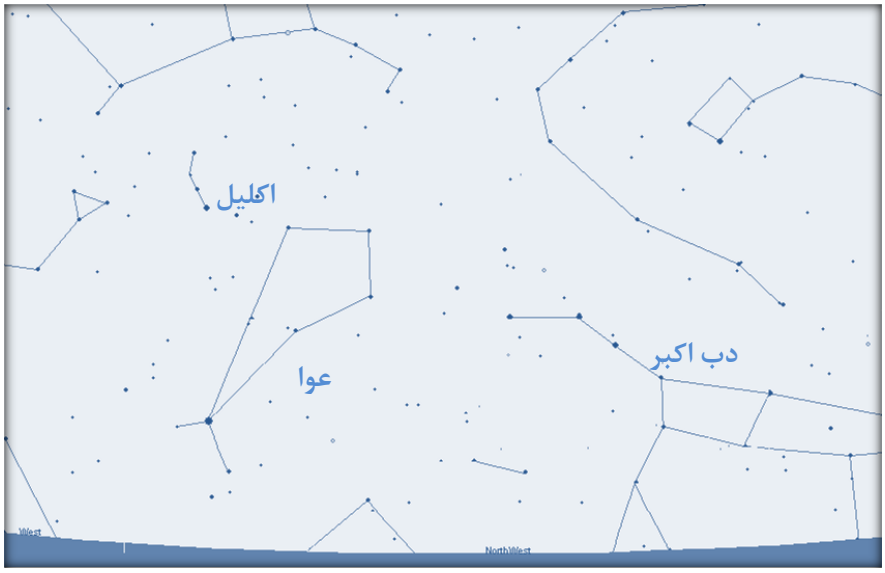
۱۴- گزینه الف پاسخ صحیح است.

می‌دانیم میل خورشید در نقطه‌ی اعتدال بهاری برابر ۰ بوده، به‌تدریج تا انقلاب تابستانی افزایش می‌یابد تا به ۲۳/۵+ درجه برسد. از لحظه انقلاب تابستانی تا انقلاب زمستانی به‌تدریج میل کاهش می‌یابد تا به ۲۳/۵- درجه جنوبی برسد و مجدداً از ۱ دی (انقلاب زمستانی) تا اعتدال بهاری، به‌تدریج میل افزایش می‌یابد؛ تمامی این شرایط تنها در گزینه‌ی الف رعایت شده است.

۱۵- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

در سال ۱۳۷۷، کشف چند ابرنواختر بسیار دوردست نشان داد که آهنگ انبساط عالم در روزگار ما بیشتر از گذشته بوده و این به معنی شتاب مثبت انبساط عالم است. همین پدیده بود که منجر به کشف انرژی تاریک شد.

۱۶- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.



عرض دایره‌البروجی تقریبی سماک اعزل و قلب‌الاسد صفر است.

۱۷- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

البته این توضیح تکمیلی لازم است که سن کنونی عالم کمی از این مقدار کمتر است، چراکه در این مدل اندازه‌گیری مقدار ثابت هابل در گذر زمان ثابت در نظر گرفته‌شده، درحالی‌که میدانیم پارامتر هابل تابع زمان تغییر می‌کند. تاکنون هیچ تابع دقیقی برای پیش‌بینی رفتار پارامتر هابل در گذر زمان پیشنهاد نشده است.

۱۸- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

از روی نمودار می‌توان گفت قدر مطلق دو ستاره تقریباً باهم برابر است؛ بنابراین قدر ظاهری ستاره دورتر، باید بیشتر از ستاره نزدیک باشد. پس می‌توان به‌سادگی فهمید که ستاره الطیر باید با قدر ظاهری کمتری دیده شود (پرنورتر). در میان گزینه‌ها تنها گزینه الف، قدری پرنورتر از ۱/۲ است.

۱۹- ماخ گزینه هـ پاسخ صحیح است.

میزان کاهش شدت تابش متناسب است با کسری از مساحتی که در هنگام گرفت، پوشیده می‌شود؛ مساحت این ناحیه در هر دو حالت گرفت (ستاره‌ی ۲ جلوی ستاره‌ی ۱ یا ستاره‌ی ۱ جلوی ستاره‌ی ۲) برابر است؛ بنابراین برای میزان کاهش شدت روشنایی متناسب با مساحت حذف‌شده از ناحیه‌ی تابش، می‌نویسیم؛ $\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{S\sigma T_1^4}{S\sigma T_2^4} = (\frac{T_1}{T_2})^4$. از طرفی از روی نمودار داریم:

$$\Delta L_۱ = ۱ - ۰/۸۵ = ۰/۱۵ \;\; ; \;\; \Delta L_۲ = ۱ - ۰/۲۵ = ۰/۷۵ \Rightarrow \frac{\Delta L_۱}{\Delta L_۲} = \frac{۰/۱۵}{۰/۷۵} = (\frac{T_۱}{T_۲})^۴$$

از طرفی، از روی نمودار می‌توانیم بفهمیم که چون در کمینه‌ی اول ستاره‌ی خورشید گون پوشیده می‌شود $T_۲ \cong T_\odot = ۵۷۰۰\,K$؛ بعد از جایگذاری دمای خورشید، در نسبت اخیر؛ به دمای تقریبی ۳۸۰۰ کلوین برای ستاره‌ی نخست می‌رسیم.

۲۰- گزینه د پاسخ صحیح است.

در یک منظومه سه جسمی مانند این، فقط ۵ نقطه که به نقاط لاگرانژی مشهور هستند، وجود دارد که جسم سوم می‌تواند در شرایط پایدار به حرکت خود ادامه دهد. در دیگر حالت‌ها، جسم ناپایدار است و فرار می‌کند.

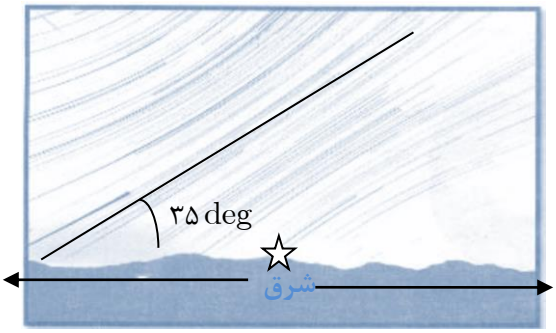
۲۱- گزینه الف پاسخ صحیح است.

تمامی نسبت‌های نوشته‌شده در جلوی واحد ۰ درجه از مرتبه یک شصتم عبارت قبلی خود هستند. مثلاً چنین می‌خوانیم صفر درجه و ۵۹ دقیق و ۰۸ ثانیه و ... برای تبدیل عبارت یاد شده به درجه خواهیم داشت:

$$۵۹ + \cfrac{۰۸ + \cfrac{۲۰ + \cfrac{۳۳ + \cfrac{۵۳ + \cfrac{۰۴ + \cfrac{۲۹ + \frac{۴۰}{۶۰}}{۶۰}}{۶۰}}{۶۰}}{۶۰}}{۶۰}}{۶۰}}{۶۰} = ۰/۹۸۵۶۵۲^\circ$$

بنابراین طبق زیج سنجری خورشید کمانی برابر مقدار فوق را در آسمان طی می‌کند. از تقسیم محیط یک دایره‌ی کامل طی شده توسط خورشید طی یک سال (۳۶۰ درجه)، بر این مقدار، تعداد روزهای سال به دست می‌آید؛ که برابر است با ۳۶۵/۲۴۰۴۷ یعنی ۳۶۵ روز و ۵ ساعت و ۵۰ دقیقه

۲۲- گزینه هـ پاسخ صحیح است.



می‌دانیم زاویه اندازه‌گیری شده در شکل فوق همان زاویه استوای سماوی با افق و برابر $۹۰ - \varphi$ است؛ بنابراین عرض جغرافیایی ۵۵ درجه خواهد شد. برای مشخص شدن شمالی یا جنوبی بودن این مقدار، باید به گفته مسئله که اشاره به عکاسی از افق شرقی دارد اشاره کرد. در نیمکره شمالی اگر به سمت شرق بنگریم انحنای ستاره‌ها به سمت شمال زیاد خواهد و برای نیمکره جنوبی، به سمت جنوب انحنا زیاد خواهد شد.

۲۳- ماخ گزینه هـ پاسخ صحیح است.

زاویه بردار سرعت با شعاع حامل این جسم بیشتر از ۹۰ درجه است؛ بنابراین مدار این جسم نمی‌تواند دایره باشد، چراکه در مدار دایروی بردار سرعت همواره بر شعاع عمود است. در مدار بیضی‌شکل نیز وقتی چنین اتفاقی می‌افتد که جسم در حال دور شدن از خورشید باشد؛ بنابراین با توجه به شکل ظاهری، فقط گزینه هـ دارای چنین شرایطی است.

۲۴- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

برای حل این سؤال باید از قوانین احتمال استفاده کرد. احتمال حضور ذره در هر یک از دو نیمه‌ی ظرف $\frac{۱}{۲}$ است. پس احتمال خالی شدن یک‌طرف ظرف $\frac{۱}{۲^{۹۹}}$ ذره است. برای تبدیل این نسبت به ثانیه چنین عمل می‌کنیم: $\frac{۳۶۵\times ۲۴\times ۶۰\times ۶۰}{۲^{۹۹}}$ که این مقدار برابر $۴/۵\times ۱۰^{-۲۳}$ ثانیه است.

۲۵- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

انرژی مداری دنباله‌داری که در مدار سهموی حرکت می‌کند برابر صفر است؛ بنابراین با نوشتن انرژی جنبشی و پتانسیل گرانشی برای واحد جرم دنباله‌دار داریم:

$$\frac{E}{m}=K+U=۰\rightarrow \frac{۱}{۲}(۴۰۰۰۰)^{۲}+U_{۰}=۰ \;\Rightarrow\; U_{۰}=-\frac{۱}{۲}(۴۰۰۰۰)^{۲}\,\frac{J}{kg}$$

از آن‌جاکه دنباله‌دار دوم هم در فاصله یکسانی از خورشید قرارگرفته، پس دارای پتانسیل گرانشی یکسانی است. انرژی مکانیکی این دنباله‌دار را برای واحد جرم می‌نویسیم:

$$\frac{E}{m}=K+U=\frac{۱}{۲}(۵۰۰۰۰)^{۲}-\frac{۱}{۲}(۴۰۰۰۰)^{۲}=۴/۵\times ۱۰^{۸}\,\frac{J}{kg}$$

در فاصله بی‌نهایت، پتانسیل گرانشی دنباله‌دار برابر صفر است و تمام انرژی مکانیکی آن معادل انرژی جنبشی خواهد بود. با توجه به رابطه انرژی داریم:

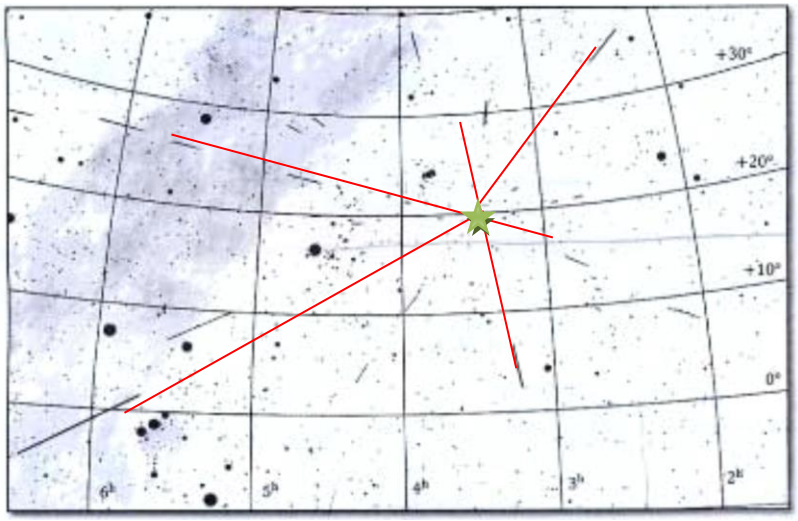
$$\frac{E}{m}=K=\frac{۱}{۲}v^{۲}=۴/۵\times ۱۰^{۸}\,\frac{J}{Kg}\rightarrow v=۳۰۰۰۰\frac{m}{s}=۳۰\frac{km}{s}$$

۲۶- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

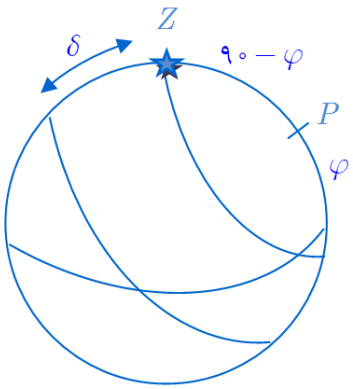
$$a\propto t^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow r\propto t^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow r^{۳}\propto t^{۲}\Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\propto t^{۲}\Rightarrow V\propto t^{۲}\Rightarrow \frac{۱}{V}\propto\frac{۱}{t^{۲}}\Rightarrow \frac{m}{V}\propto\frac{۱}{t^{۲}}\Rightarrow \rho\propto\frac{۱}{t^{۲}}$$

۲۷- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

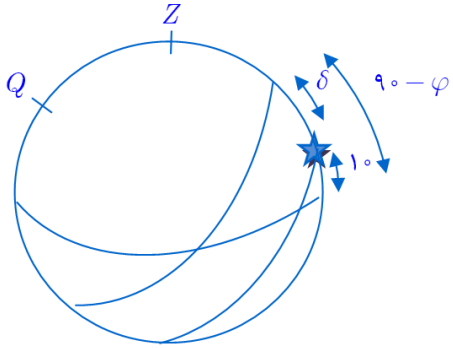
کافی است انتهای شهاب‌ها را امتداد دهیم تا به کانون بارش برسیم: اگر چنین کنیم به نقطه‌ای با بُعد $۳h\ ۳۰m$ و میل ۲۰ درجه می‌رسیم:



۲۸- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.



اگر قرار باشد خورشید از سمت‌الرأس شهری بگذرد، باید میل آن با عرض جغرافیایی شهر برابر باشد. درنتیجه: $\delta = ۲۱^\circ ۲۷' \mathrm{N}$ خواهد بود. از طرفی اگر قرار باشد خورشید برای شهر دیگر هم در همین لحظه دارای سمت ۰ باشد، باید برای هر دو شهر در لحظه عبور قرارگرفته باشد. درنتیجه اختلاف طول جغرافیایی دو شهر برابر صفر یا ۱۸۰ خواهد بود. اگر اختلاف بُعد صفر باشد، برای به دست آوردن مقدار عرض جغرافیایی، کره آسمان را برای مکان دوم، مجدداً رسم می‌کنیم.



پس خواهیم داشت؛ $a + \delta = -(۹۰ - \varphi) \Rightarrow \varphi = ۷۸^\circ ۳۱'$. از طرفی برای طول جغرافیایی شهر دوم؛ ۱۸۰-۳۸ بنابراین: $\lambda_{\max} = -۱۴۰$.

۲۹- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

به دلیل نیروی جزر و مدی، انرژی دورانی زمین کاهش‌یافته و به انرژی دورانی ماه افزوده می‌شود. با کاهش سرعت دوران زمین و ماه و افزایش فاصله بین آن‌ها، نیروی جزر و مدی نیز آرام‌آرام کاهش می‌یابد تا این سیستم درجایی قفل شود. این پدیده که قفل‌شدگی گرانشی نام دارد، وقتی اتفاق می‌افتد که نیروهای جزر و مدی وارد بر هر نقطه از جسم با گذشت زمان ثابت بماند تا هیچ انرژی دورانی منتقل نشود. این وضعیت نیز فقط وقتی اتفاق می‌افتد که دوره گردش وضعی زمین و انتقالی ماه با یکدیگر برابر شود. در چنین شرایطی، دوره نجومی ماه و دوره وضعی زمین حدود ۴۲ برابر شبانه‌روز فعلی خواهد شد.

۳۰- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

می‌دانیم رابطه درخشندگی، $L = ۴\pi r^۲ \sigma T^۴$. پس می‌توان نوشت؛ $r = \sqrt{\frac{L}{۴\pi T^۴}}$. طبق این رابطه اگر بخواهیم r ثابت باشد باید L و T به‌طور مشابه تغییر کنند یعنی یا هر دو افزایش یابند یا هر دو کم شوند؛ که این موضوع تنها در خط $d_۴$ دیده می‌شود؛ معادله‌ی خط مذکور چنین به دست می‌آید:

$$\frac{L}{L_\odot} = (\frac{R}{R_\odot})^۲(\frac{T}{T_\odot})^۴ \Rightarrow \log(\frac{L}{L_\odot}) = \log(\frac{R}{R_\odot})^۲ + \log(\frac{T}{T_\odot})^۴ \Rightarrow \log(\frac{L}{L_\odot}) = ۲\log(\frac{R}{R_\odot}) + ۴\log(\frac{T}{T_\odot})$$
$$\Rightarrow \log(\frac{R}{R_\odot}) = ۰/۵\log(\frac{L}{L_\odot}) - ۲\log(\frac{T}{T_\odot})$$

۳۱- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

نقطه تماس غلتک با استوانه داخلی باید هم سرعت با استوانه‌ی خارجی باشد تا روی آن نلغزد؛ $R_۱\omega = r\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{R_۱}{r}\omega$. در جسم غلتنده می‌دانیم که سرعت خطی مرکز جرم، نصف بیشترین سرعت خطی لحظه‌ای در جسم است؛ یعنی $v = \frac{r\omega'}{۲} = \frac{R_۱\omega}{۲}$؛ اما می‌دانیم که سرعت خطی مرکز جرم درواقع ناشی از دوران به دور مرکز استوانه‌هاست. شعاع این دوران نیز $R_۱ + r$ و سرعت دوران نیز ω'' است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = (R_۱ + r)\omega'' \Rightarrow \omega'' = \frac{v}{R_۱ + r} = \frac{r}{۲(R_۱ + r)}\omega'$$

با توجه به فرض مسئله، داریم:

$$\left.\begin{array}{c} T'' = ۴T' \Rightarrow \omega' = ۴\omega'' \\ ۲r = R_۲ - R_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\omega'}{\omega''} = ۴ \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{۵}{۳}$$

۳۲- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

در مثلث ABC ضلع $AB = \frac{\pi}{۴}$ و زاویه‌ی رأس $B = \frac{\pi}{۴}$. حال ضلع AC را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که AC کوچکتر از $\frac{\pi}{۴}$ باشد [به استثنای حالتی که زاویه‌ی C برابر ۹۰ درجه باشد]. در تمامی این حالات به ازای هر مقدار دلخواه طول ضلع AC دو مقدار متفاوت برای زاویه‌ی A یا C بدست می‌آید که خلاف فرض سوال است. پس بازه‌ی مطلوب برای طول ضلع $AC > \frac{\pi}{۴}$ و $AC = \frac{\pi}{۶}$ است.

۳۳- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

همان‌طور که از نمودار قابل استخراج است، هر دو ستاره در مقدار $\sec z$ برابر ۰، شدت روشنایی‌های برابری خواهند داشت؛ از طرفی می‌دانیم $m = m_۰ + K\sec z$؛ که در آن $m_۰$ قدر ظاهری ستاره در حالت اولیه، K ضریب خاموشی جو و z فاصله سمت‌الرأسی ستاره است. ازآنجاکه در مقدار $\sec z = ۰$، شدت روشنایی دو ستاره برابر است؛ شدت روشنایی‌های برابر، قدرهای ظاهری برابر را نتیجه می‌دهد. وقتی قدر ظاهری دو ستاره برابر باشد به معنی حالتی شبیه صرف‌نظر از جو (اثر خاموشی جو) است.

۳۴- ماخ گزینه ج یا د پاسخ صحیح است. (ج صحیح‌تر)

آهنگ تولید انرژی هم‌ارز درخشندگی است. بنا به اطلاعات سؤال می‌توانیم چنین بنویسیم؛ $L_{CNO}=\beta T^{m}$; $L_{PP}=\alpha T^{n}$. برای مقایسه‌ی این دو چرخه نسبتشان را برآورد می‌کنیم:

$$\frac{L_{CNO}}{L_{PP}}=\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{T^{m}}{T^{n}}=\frac{\beta}{\alpha}\times T^{m-n}$$

چون m از n بزرگ‌تر و α هم از β بزرگ‌تر است؛ نسبت فوق به عبارت kT^{x} خلاصه می‌شود که در آن k کوچک‌تر از ۱، توان دما مثبت و دمای ستاره بسیار بزرگ‌تر از یک است. برای تحلیل عددی این عبارت و طبقه‌بندی برحسب جایی که درخشندگی دو چرخه باهم برابر باشد، توان دما را به دو زیر بازه‌ی بین صفر و یک و بزرگ‌تر از یک افراز می‌کنیم. اگر توان دما کوچک‌تر از یک باشد تا جایی که $\sqrt[m-n]{\frac{\alpha}{\beta}}=T$ شود، آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی CNO سریع‌تر از چرخه‌ی PP افزایش می‌یابد؛ اما اگر توان بزرگ‌تر از یک باشد تا جایی که $\sqrt[m-n]{\frac{\alpha}{\beta}}=T$ شود، آهنگ تولید انرژی در چرخه‌ی CNO کندتر از چرخه‌ی PP افزایش می‌یابد. پس هر دو گزینه‌ی ج و د ممکن است اتفاق بیفتد؛ اما با توجه به محتمل‌تر بودن $m\gg n$؛ گزینه‌ی ج منطقی‌تر به نظر می‌رسد.

۳۵- ماخ گزینه هـ پاسخ صحیح است.

انرژی مدار $E=K+U$ است؛ در مورد سهمی مقدار انرژی این مدار صفر است؛ بنابراین داریم؛ $K=-U$. در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{GmM}{r}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{v^{۲}r}{۲G}$$

از طرفی می‌دانیم؛ $a=\frac{v^{۲}}{r}\Rightarrow r=\frac{v^{۲}}{a}$. از جایگذاری این مقدار در رابطه بالا خواهیم داشت: $M=\frac{v^{۴}}{۲aG}$. حال فقط باید سرعت و شتاب را در رابطه جایگذاری کنیم که در نهایت به عدد ۷×۱۰^{۲۳}؛ کیلوگرم خواهیم رسید.

۳۶- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

توضیحات ارائه شده در هر گزینه، به ترتیب معادله استاندارد دایره، بیضی افقی و بیضی عمودی را نشان می‌دهد. (با عددگذاری هم می‌شود به‌صورت شهودی همه‌ی گزینه‌ها را اثبات نمود.)

۳۷- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

الف) از آنجا که مساحت‌های هاشور خورده برابرند، مساحت زیر نمودار هر دو جسم برابر است و این به معنی برابر بودن شار تابشی هر دو جسم است.

ج، د) دمای مؤثر ستاره را برابر دمای جسم سیاهی در نظر می‌گیرند که شار تابشی مشابهی را تولید کند و از آنجا که در نمودار تابش جسم سیاه شار تابشی معادل مساحت زیر نمودار است و طبق فرض مسئله، مساحت زیر دو نمودار برابر است دمای مؤثر ستاره با دمای جسم سیاه برابر است.

هـ) فرکانس با معکوس طول‌موج در ارتباط است پس این گزینه هم پاسخ صحیح نیست.

۳۸- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

تخمین زده می‌شود که حدود یک‌صد میلیارد کهکشان در عالم وجود داشته باشد. فرض می‌کنیم هر کهکشان یک‌صد میلیارد ستاره دارد که همه آن‌ها خورشید مانند هستند. درخشندگی کل این ستارگان از واکنش هم‌جوشی هیدروژن و تولید هلیوم به دست می‌آید:

$$L = NL_{\odot} = ۱۰^{۱۱} \times ۱۰^{۱۱} \times ۴ \times ۱۰^{۲۶} W = ۴ \times ۱۰^{۴۸} W$$

جرم مولد این انرژی را حساب می‌کنیم؛

$$\Delta E = L\Delta t = \Delta m.c^{۲} \Rightarrow \Delta m = ۴/۴ \times ۱۰^{۳۱} kg$$

در واکنش هم‌جوشی هسته‌ای هیدروژن به ازای جرم هر اتم هلیوم تولیدی، حدود یک‌هشتادم آن به انرژی تبدیل می‌شود که منجر به درخشش ستارگان می‌شود. پس جرم هلیوم تولیدی در هر ثانیه؛ $M_{He} \sim ۸۰\Delta m = ۳ \times ۱۰^{۳۳} kg$

۳۹- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

طبق قانون پیوستگی تا وقتی جریان آب پیوسته است، میزان حجم آب گذرنده از هر مقطع در واحد زمان برابر است. با استفاده از این قانون می‌نویسیم:

$$\Delta v \text{ ثابت} \Rightarrow \quad A_{۱} v_{۱} \Delta t = A_{۰} v_{۰} \Delta t \ \Rightarrow A_{۱} = \frac{v_{۰}}{v_{۱}} A_{۰}$$

از قانون طرفی در مور سرعت‌ها داریم؛ $v_{۱}^{۲} - v_{۰}^{۲} = -۲g\Delta h$، پس از جایگذاری مقادیر $v_{۱} = ۸ \frac{m}{s}$ به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\pi r_{۱}^{۲} = \frac{۱۰}{۸} \pi ۲^{۲} \quad \Rightarrow \quad r_{۱} = \sqrt{۵} cm$$

«مسئله‌های کوتاه»

۱- پاسخ: ۷۶

با جایگزینی اعداد داده‌شده در رابطه‌ی ZHR، رابطه به این شکل ساده می‌شود:

$$ZHR = \frac{۱۳ \times r^{۶/۵-۶/۵}}{\frac{۱۱}{۶۰} \times (۱ - ۰) \times \sin a} = \frac{۷۱}{\sin a}$$

که در آن a ارتفاع کانون بارش است. حال کافی است با استفاده از زمان نجومی، ارتفاع کانون را محاسبه نماییم:

$$\cos(۹۰ - a) = \cos(۹۰ - \varphi)\cos(۹۰ - \delta) + \sin(۹۰ - \varphi)\sin(۹۰ - \delta)\cos H$$

درنتیجه مقدار ارتفاع برابر ۶۹ درجه خواهد شد که از جایگذاری مقدار آن در رابطه اولیه، ZHR برابر ۷۶/۰۵ به دست خواهد آمد.

۲- پاسخ: ۱۱/۷۸ کیلومتر بر ثانیه

۱۸۰ دور در دقیقه معادل $\frac{۱}{۳}$ دور در ثانیه است؛ از طرف از شکل طول هر بخش از تصویر را ۲/۲۵ درجه اندازه می‌گیریم، یعنی:

$$\tan ۲/۲۵ = \frac{a}{d} = \frac{a}{۱۰۰km} \quad \Rightarrow \quad a = ۳/۹km$$

و سرعت برابر است با جابجایی تقسیم‌بر زمان، لذا $\frac{۳/۹km}{\frac{۱}{۳}s} = ۱۱/۷۸\frac{km}{s}$ خواهد بود.

۳- پاسخ: ۹۹ درصد

چون آهن مشابه گاز کامل رفتار می‌کند، پس قانون کلی گازهای کامل برقرار است؛ $\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲}$. با توجه به رابطه فرآیند بی‌دررو می‌توان رابطه‌ای برای P و V نوشت؛

$$PV^{\frac{۵}{۳}} = \text{ثابت} = K \quad \Rightarrow \quad PV = KV^{\frac{-۲}{۳}}$$

رابطه گازهای کامل را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{K}{T_۱V_۱^{\frac{-۲}{۳}}} = \frac{K}{T_۲V_۲^{\frac{-۲}{۳}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_۲}{V_۱} = \sqrt[\frac{-۲}{۳}]{\frac{T_۱}{T_۲}} = ۱۰^{-۶} \rightarrow (\frac{R_۲}{R_۱})^۳ = ۱۰^{-۶} \Rightarrow \quad \frac{R_۲}{R_۱} = ۰/۰۱$$

درصد کاهش؛ $\frac{\Delta R}{R_۱} = ۰/۹۹ = ۹۹\%$.

۴- پاسخ: ۲۵ درجه

از برابری انرژی در دو حالت قبل و بعد از ورود به جو زمین، داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + ۰ = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{GmM}{r} \quad \Rightarrow \quad v = ۱۴/۸\frac{km}{s}$$

از طرفی از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای، می‌دانیم تکانه‌ی شهاب‌سنگ ثابت می‌ماند پس می‌توانیم بنویسیم:

$$m_۱v_۱r_۱\sin\theta_۱ = m_۲v_۲r_۲\sin\theta_۲ \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_۲ = \frac{۹\times۱۰^۶\times۱۰\times۱۰^۳}{۱۴۸۰۰\times۶/۷\times۱۰^۶} = ۰/۹ \quad \Rightarrow \quad \theta_۲ = ۶۵ \text{ درجه}$$

این زاویه، فاصله سمت‌الرأسی شهاب‌سنگ است؛ بنابراین برای به دست آوردن ارتفاع آن از افق باید متمم این مقدار را به دست آوریم که برابر است با ۲۵ درجه.

۵- پاسخ: ۲۳

برای پایدار بودن جرم سیاهچاله، باید جرم تابشی آن با جرم جذب‌شده برابر شود، در این صورت دمای تابشی سیاهچاله می‌باید با دمای تابش هاوکینگ برابر شود. می‌دانیم رابطه‌ی دمای جسم سیاه با طول‌موج آن از قانون وین پیروی می‌کند؛ $T = \frac{۰/۰۰۲۹}{\lambda_{max}}$. از جایگذاری طول‌موج بیشینه تابش پس‌زمینه کیهانی، دمای آن را ۲/۷ کلوین برآورد می‌کنیم. حال باید این دما را در رابطه تابش هاوکینگ اعمال نمود.

$$M = \frac{hc^۳}{۱۶k\pi^۲GT} = \frac{۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\times(۳\times۱۰^۸)^۳}{۱۶\times۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\times۳/۱۴^۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۲/۷} = ۲/۵\times۱۰^{۲۲}$$

۶- پاسخ: ۴۸

سن جهان ۱۳/۷ میلیارد سال است، پس ۰ دورترین اجرام قابل‌مشاهده عالم ۱۳/۷ میلیارد سال از ما فاصله‌دارند؛ که این مقدار برابر است با:

$$r = ۱۳/۷\times۱۰^۹\times۹/۴۶\times۱۰^{۱۵} = ۱/۳\times۱۰^{۲۶}m$$

حال مقدار کل انرژی موجود در کره‌ای به شعاع افق هابل را برآورد می‌کنیم:

$$\rho_r = ۰/۲۶۰\frac{MeV}{m^۳} \quad \Rightarrow \quad M_r = \rho_rV = ۰/۲۶۰\times\frac{۴}{۳}\pi(۱/۳\times۱۰^{۲۶})^۳ = ۲/۴\times۱۰^{۷۸}MeV = ۳/۸\times۱۰^{۶۵}J$$

که کل این انرژی باید به جرم تبدیل شود، از هم‌ارزی جرم-انرژی $E = mc^۲$؛ داریم:

$$m = \frac{۳/۸\times۱۰^{۶۵}J}{(۳\times۱۰^۸)^۲} = ۴/۲\times۱۰^{۴۸}$$

پاسخ و مرتبه وارد شده در پاسخنامه، ۴۸ است.

۷- پاسخ: ۷۶ کیلومتر

ملاقات ماهواره ۲ و ۱ طی این زمان ۲۰ درجه جلوتر انجام شده و ماهواره ۱ به اندازه ۲۰ - ۳۶۰ درجه دوران کرده است. با توجه به این موضوع می‌توان دوره تناوب مدار انتقالی را به دست آورد:

$$\frac{۳۶۰}{T_۱}=\frac{۳۶۰-۲۰}{T_۲} \quad \Rightarrow \quad T_۲=\frac{۱۷}{۱۸}T_۱$$

از طرفی طبق قانون سوم کپلر می‌نویسیم؛ $(\frac{a_۱}{a_۲})^۳=(\frac{T_۱}{T_۲})^۲$؛ که در نتیجه‌ی آن $a_۲=۰/۹۶۲\,a_۱$ است.

$$h_{max}+h_{min}+۲R_{\oplus}=۲a \quad \Rightarrow \quad ۶۰۰+h_{min}+۲\times ۶۴۰۰=۰/۹۶\times(۲\times(۶۴۰۰+۶۰۰)) \Rightarrow ۷۶km$$

۸- پاسخ: ۵۷/۵ کیلومتر

ابتدا فاصله‌ی دو شهر را برحسب درجه و از قانون کسینوس‌ها به دست می‌آوریم؛

$$\cos x=\cos ۵۷\cos ۵۵+\sin ۵۷\sin ۵۵\cos ۱۰ \quad \Rightarrow \quad x=۸/۵^\circ$$

حال این مقدار را به کیلومتر و سپس به فرسنگ تبدیل می‌کنیم:

$$x=\frac{۲\pi r\times ۸/۵}{۳۶۰}=۹۴۹\,km=۹۴۹km\times\frac{۱۰\,farsang}{۱۶۵\,\frac{km}{farsang}}=۵۷/۵\,km$$