جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

دفترچه سوالات
مرحله دوم
سومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۰۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

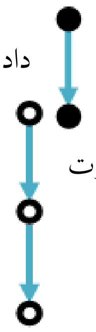
تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۰۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- بر روی صفحه‌ای تعداد $3n$ نقطه وجود دارد که هیچ سه‌تایی آن‌ها بر روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید که می‌توان با این نقاط تعداد n مثلث ساخت که کاملاً جدا از هم باشند. دو مثلث را جدا از هم می‌گوییم اگر هر یک در بیرون دیگری قرار گرفته باشد و رئوس و اضلاع آن‌ها هیچ برخوردی با یکدیگر نداشته باشند.

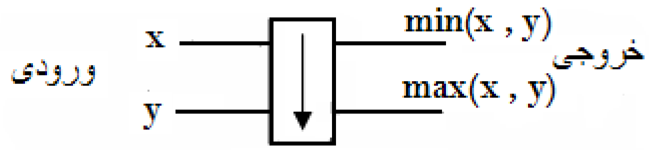
۲- می‌خواهیم تعدادی سکه با وزن‌های متفاوت را با یک ترازوی دوکفه‌ای و بدون استفاده از وزنه و با حداقل تعداد وزن کردن مرتب نماییم. واضح است که سه سکه را می‌توان با حداکثر سه بار وزن کردن مرتب نمود: ابتدا ترتیب وزن‌های دو عدد از این سکه‌ها را با یک‌بار وزن کردن به دست می‌آوریم. اگر ↓ نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی کوچک‌تر باشد، نتیجه را می‌توان به‌صورت نمایش داد. سپس سکه‌ی بعدی را با حداکثر دو بار وزن کردن، بین «زنجیره‌ی» دوتایی اضافه می‌نماییم. ترتیب نهایی به‌صورت در می‌آید.



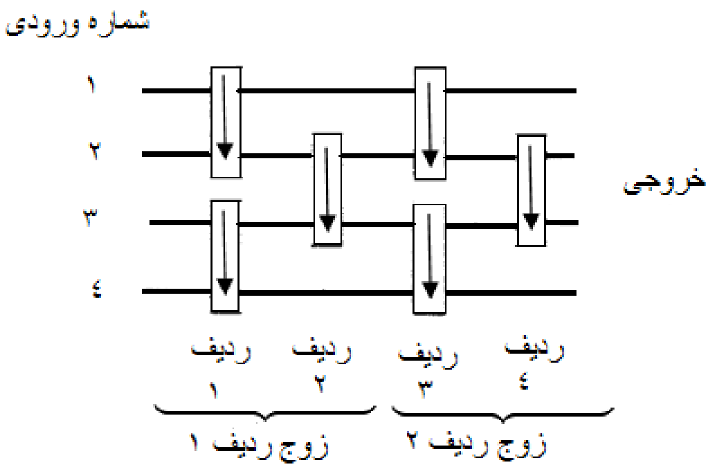
الف) نشان دهید که چهار عدد سکه را می‌توان با حداکثر ۵ بار وزن کردن مرتب کرد.

ب) نشان دهید که پنج سکه را می‌توان با حداکثر هفت بار وزن کردن مرتب کرد.

۳- یک «مقایسه کننده» را مطابق شکل زیر تعریف می‌کنیم:

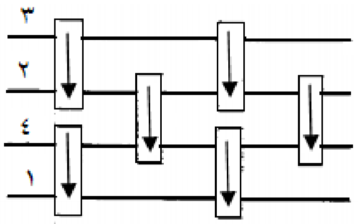


این مقایسه کننده دو عدد را به‌عنوان ورودی دریافت کرده، عدد کوچک‌تر را در خط اول خروجی خود و عدد بزرگ‌تر را در خط دوم خروجی قرار می‌دهد. با وصل کردن تعدادی از این مقایسه کننده‌ها بر اساس یک نظم خاص می‌توان یک «مدار مرتب کننده» ساخت به‌طوری‌که تعدادی عدد (از ورودی دریافت نموده و سپس از تعدادی عمل مقایسه این اعداد را به‌صورت مرتب در خروجی قرار دهد. به‌عنوان‌مثال شکل زیر یک مدار مرتب کننده با چهار ورودی را نشان می‌دهد:

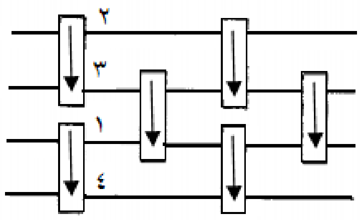


این مدار شامل ٤ ردیف و ۲ عدد «زوج ردیف» می‌باشد. نحوه کار یک مدار مرتب‌کننده به این صورت است که در هر مرحله تمامی مقایسه‌کننده‌های یک ردیف که دو عدد ورودی خود را دریافت کرده‌اند هم‌زمان با هم عمل می‌کنند. در ابتدای مرحله‌ی اول اعداد بر روی خطوط ورودی قرار دارند. پس از تعداد مراحلی برابر با تعداد ردیف‌ها اعداد به‌صورت مرتب در خروجی ظاهر می‌شوند.

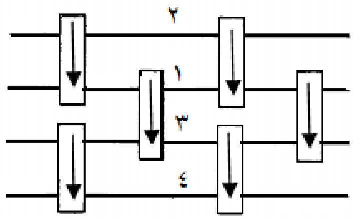
نحوه‌ی کار مدار مرتب کننده فوق برای اعداد ورودی ۳، ۲، ٤ و ۱ به‌صورت زیر است:



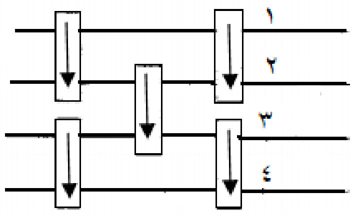
ابتدای مرحله ۱



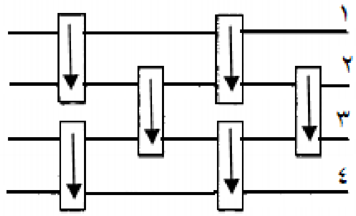
انتهای مرحله ۱



انتهای مرحله ۲



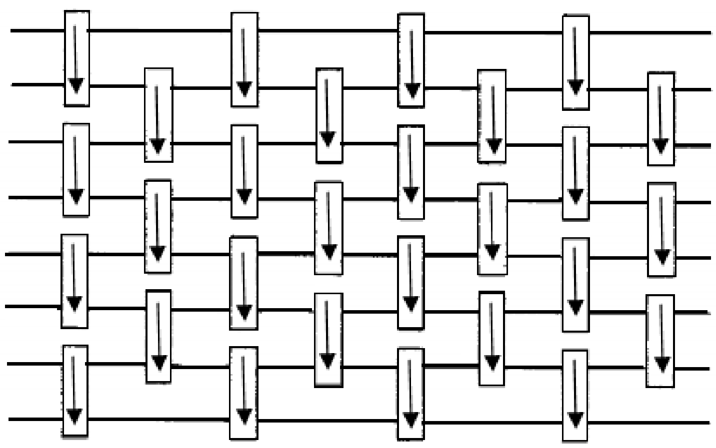
انتهای مرحله ۳



انتهای مرحله ۴

یک مدار مرتب کننده‌ی n تایی دارای n خط با شماره‌های ۱ تا n است که ردیف‌های شماره فرد شامل مقایسه‌کننده‌هایی است که خطوط با شماره‌ی $2k-1$ و $2k$ $(k=1,2,...)$ را با هم مقایسه می‌کند و مقایسه‌کننده‌های ردیف‌های زوج خطوط با شماره‌ی $2k+1$ و $2k$ $(k=1,2,..)$ را باهم مقایسه می‌نماید.

یک مدار مرتب کننده‌ی ۸ تایی را در شکل زیر می‌بینید:



الف) حدس بزنید که یک مدار مرتب‌کننده‌ی n تایی حداقل باید شامل چند زوج ردیف باشد و تعداد کل مقایسه‌کننده‌های آن را به دست آورید. در این قسمت اثبات لازم نیست.

ب) ثابت کنید که مدار مرتب کننده‌ی n تایی با تعداد زوج ردیف‌هایی که در قسمت الف حدس زده‌اید، کلیه‌ی جایگشت‌های ورودی از اعداد صفر و یک را مرتب می‌کند. در این قسمت باید حدس بند الف را برای ورودی‌های صفر و یک به‌طور کامل اثبات نمایید.

برای دریافت بخشی از نمره‌ی این قسمت می‌توانید آن‌را برای $n = 8$ ثابت کنید.

۴- در یک مدرسه x دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره‌های ۱ تا n نام‌گذاری می‌کنیم. می‌دانیم که دبیر i ام، $i+1$ نفر از دانش‌آموزان مدرسه را می‌شناسد. هر دانش‌آموز می‌تواند توسط بیش از یک دبیر شناخته شود. هر یک از این دبیرها می‌خواهد یکی از دانش‌آموزانی را که می‌شناسد به‌عنوان نماینده‌ی خود برگزینند به‌شرط این‌که هیچ دانش‌آموزی به‌عنوان نماینده‌ی بیش از یک دبیر انتخاب نشود. ثابت کنید که انتخاب این نماینده‌ها حداقل به 2^n حالت مختلف امکان‌پذیر است.

۵- فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد. ثابت کنید برای

$$k = \lceil 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \rceil$$

دنباله‌ی $A_1, A_2, \dots, A_k$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$A_i \subseteq 1,2,\dots,n \quad , \quad A_i \neq A_j \quad , \quad |Ai \triangle Aj| = 1 \Longleftrightarrow |i-j| = 1 \quad , \quad 1 \leq i,j \leq n$$

منظور از $A_i \Delta A_j$ تفاضل متقارن A_i و A_j یعنی $(A_i - A_j) \cup (A_j - A_i)$ است. همچنین $\lceil n \rceil$ نمایانگر کوچک‌ترین عدد صحیح ناکم‌تر از n است.

مثال: در حالت $n = 3$ خواهیم داشت $k = 5$ و دنباله‌ی موردنظر می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$A_1 = \{\}, A_2 = 1 \ , A_3 = 1,2 \ , A_4 = 1,2,3 \ , A_5 = 2,3$$

راهنمایی: می‌توانید از استقرا استفاده نمایید.

۶- فرض کنید n یک عدد طبیعی $(n > 2)$ و r یک عدد حقیقی $(0 \leq r \leq 1)$ باشد.

دو نفر با نام‌های A و B با یکدیگر بازی زیر را انجام می‌دهند A : یک عدد طبیعی $x(1 \leq x \leq n)$ را در نظر می‌گیرد B باید عدد x را پیدا کند. برای این منظور، سؤال‌هایی از A می‌پرسد. سؤال‌هایی که B از A می‌پرسد به این صورت هستند که «آیا x از k بزرگ‌تر است؟» (k می‌تواند هر عدد طبیعی بین ۱ و n باشد و توسط B انتخاب می‌شود). جواب‌های A به‌صورت «بله» یا «خیر» است A. ممکن است در جواب بعضی از سؤالات دروغ بگوید؛ اما می‌دانیم که برای هر عدد طبیعی i تعداد دروغ‌هایی که A می‌تواند در جواب سؤالات اول تا iام بگوید از $\lfloor r_i \rfloor$ تجاوز نمی‌کند. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح نا بیش‌تر از x است).

الف) الگوریتمی بنویسید که با فرض $r < 12$ عدد طبیعی n و عدد حقیقی r را از ورودی دریافت کرده و به‌جای B بازی کند؛ یعنی سؤالاتی به شکل «$Is \quad x > k?$» در خروجی چاپ کرده پاسخ‌های A را از ورودی دریافت نماید و با توجه به این پاسخ‌ها و این شرط که A نمی‌تواند به بیش از $\lfloor r_i \rfloor$ تا از i سؤال اول پاسخ دروغ دهد، عدد x را پیدا کند.

در مورد ایده‌ی الگوریتم حرز توضیح داده و متغیرهای آن‌را معرفی نمایید. مثال:

$Bnter \quad n:$ ۱۰

$Bnter \quad r:$ ۰.۲۵

$IS \quad x \quad >$ ۵ ? Yes

$IS \quad x \quad >$ ۸ ? No

$IS \quad x \quad >$ ۷ ? No

$IS \quad x \quad >$ ۶ ? Yes

$IS \quad x \quad >$ ۵ ? No

$The \quad number \quad (x) \quad is$ ۷

ب) ثابت کنید که اگر $r \geq$ ۱۲ باشد A می‌تواند طوری به سؤالات B جواب دهد که B هیچ‌گاه نتواند عدد x را پیدا کند. (همواره بیش از یک امکان برای عدد x موجود باشد).