جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۰۰	۸	۲۵

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۲۵ سوال تستی و ۸ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۰۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

- سوال‌های **۱۲** تا **۲۵** در چند دسته‌ی سوالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سوال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سوال ٤ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

۱- رستم ۱۳۹۴ سکه با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۴ بر روی میز قرار داده است. تعدادی از این سکه‌ها عادی (یک رو شیر و یک رو خط) و بقیه‌ی سکه‌ها هر دو رو شیر هستند (این تعداد می‌تواند صفر هم باشد). سهراب می‌خواهد تعداد سکه‌های هر دو رو شیر را پیدا کند ولی چشمانش بسته است. او تنها می‌تواند در هر حرکت تعدادی از سکه‌ها را انتخاب کرده و از رستم بخواهد آنها را پشت و رو کند. پس از آن رستم تعداد سکه‌های روی میز که به سمت شیر هستند را به سهراب می‌گوید.

سهراب می‌داند در ابتدای کار دقیقا ۱۰۰ سکه به سمت شیر هستند، حداقل چند حرکت لازم است تا سهراب تعداد سکه‌های دو رو شیر را بیابد؟

الف) ۱۳۹۳ ب) ۱ ج) ۱۳۹۴ د) ۱۱ هـ) ۱۰

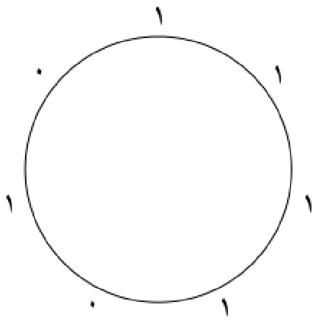
۲- می‌خواهیم در خانه‌های جدول زیر، اعداد ۱ تا ۹ را قرار دهیم، به صورتی که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر، برابر باشد. جای دو تا از اعداد (۱ و ۵) نیز مشخص شده است.

	۵	۱

برای یک خط مانند L در صفحه، $f(L)$ برابر مجموع اعداد خانه‌هایی از جدول است که با آن خط، تقاطع دارند (یک خانه از جدول با خط L تقاطع دارد، اگر حداقل ۲ نقطه‌ی مشترک با آن خط داشته باشد). بیشینه‌ی ممکن $f(L)$، در میان تمام جدول‌ها و خط‌های ممکن چند است؟ (هر خانه از جدول یک مربع به طول واحد است)

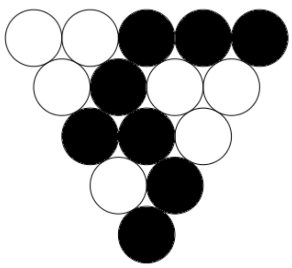
الف) ۲۵ ب) ۳۲ ج) ۳۱ د) ۲۷ هـ) ۳۰

۳- می‌خواهیم ۷ رقم ۰ و ۱ را دور دایره بچینیم. می‌گوییم رشته‌ی S در این چینش آمده است، اگر چند رقم متوالی در دایره وجود داشته باشند که با کنار هم قرار دادن‌شان به ترتیب ساعت‌گرد، رشته‌ی S تشکیل شود. تعداد دفعات وجود S در چینش را $f(\mathrm{S})$ می‌نامیم. برای مثال، در چینش روبرو، $f(۱۱۰) = ۱$ و $f(۱۱) = ۳$ و $f(۰۱۱۱۰) = ۰$ است. یک چینش اعداد دور دایره را در نظر بگیرید. به ازای هر رشته‌ی دودویی S که حداکثر ۳ رقم دارد، $۲^{f(S)}$ را محاسبه می‌کنیم و این مقادیر را با هم جمع می‌کنیم (به عنوان مثال در شکل مقابل این عدد برابر ۷۰ می‌شود). عدد نهایی حداقل چند است؟ (برای رشته‌هایی که در چینش وجود ندارند $f(\mathrm{S}) = ۰$ است.)



الف) ۵۵ ب) ۵۱ ج) ۵۶
د) ۶۳ هـ) ۵۳

۴- ۱۵ دایره همانند شکل روبرو داریم. هر دایره می‌تواند سفید یا سیاه باشد. رنگ دایره‌ها به صورت زیر مشخص می‌گردد:
دایره‌های سطر بالا به صورت مستقل می‌توانند سفید یا سیاه باشند.
بقیه‌ی دایره‌ها (همه به جز سطر بالا) به رنگ سیاه هستند، اگر و تنها اگر دو دایره‌ی مجاور سطر بالای آن ناهمرنگ باشند.
در بین تمامی حالات ممکن، حداکثر چند دایره‌ی سیاه می‌توانیم داشته باشیم؟



الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۹
د) ۱۲ هـ) ۱۳

۵- در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تمامی حالات ممکن را روی تخته کشیده‌ایم. در مجموع چند دایره‌ی سیاه خواهیم داشت؟

الف) ۲۴۰ ب) ۲۱۶ ج) ۲۵۶ د) ۲۰۸ هـ) ۲۲۴

۶- یک جایگشت

$$\pi = \langle \pi_۱, \pi_۲, \dots, \pi_۹ \rangle$$

از اعداد ۱,۲,۰۰۰,۹ را در نظر بگیرید. عدد جایگشت π برابر تعداد اعضایی از جایگشت مانند π_i است که زوجیت i و π_i برابر باشد. برای مثال عدد جایگشت $\langle ۵,۶,۳,۴,۲,۱,۷,۹,۸ \rangle$ برابر ۵ است. با در نظر گرفتن تمام جایگشت‌های ممکن، به طور میانگین عدد یک جایگشت چند است؟

الف) $\frac{۸۱}{۱۹}$ ب) $\frac{۱۳}{۳}$ ج) $\frac{۴۱}{۹}$ د) ۵ هـ) $\frac{۹}{۲}$

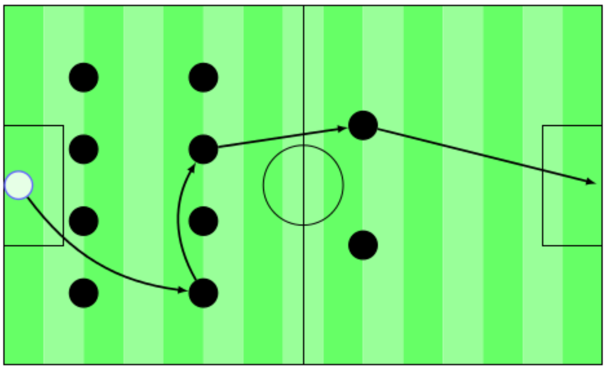
۷- یک عدد را وارونه می‌گوییم، هرگاه به صورت $\frac{۱}{n}$ باشد که n عددی طبیعی است. می‌خواهیم عدد ۱ را به صورت جمع k عدد وارونه‌ی متمایز بنویسیم. به ازای چند مقدار $۲ \leq k \leq ۶$ می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۳ ب) ۱ ج) ۵ د) ۰ هـ) ۴

۸- تیم فوتبال سلطان، با سیستم ۲-۴-۴ بازی می‌کند؛ یعنی ۱ دروازه‌بان، ۴ مدافع و ۴ هافبک و ۲ مهاجم دارد. هر توپی که به یک بازیکن در این تیم می‌رسد، یا آن را با یک شوت، تبدیل به گل می‌کند یا پاس می‌دهد.

هیچ بازیکنی حق ندارد به بازیکنی پاس بدهد که قبلا توپ به او رسیده و یا در خطوط عقب‌تر بازی می‌کند؛ برای مثال یک هافبک نمی‌تواند به یک مدافع پاس بدهد، اما می‌تواند به یک هافبکی که توپ به آن نرسیده و یا یک مهاجم پاس بدهد.

فرض کنید توپ در ابتدا در اختیار دروازه‌بان است و تیم می‌خواهد یک گل بزند (همانند شکل زیر). به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (حتی دروازه‌بان هم می‌تواند با یک ضربه‌ی مستقیم گل بزند.)



الف) ۲۳۰۴ ب) ۱۱۵۲ ج) ۵۰۴۳
د) ۲۸۶۲۵ هـ) ۲۱۱۲۵

۹- سه توپ سیاه و سه توپ سفید داریم که به شکل زیر، در هفت جعبه جای گرفته‌اند:
فاصله‌ی دو جعبه تعداد جعبه‌های بین آن دو است. برای مثال فاصله‌ی دو جعبه‌ی مجاور صفر است. در هر حرکت می‌توان یک توپ که فاصله‌ی جعبه‌اش با یک جعبه‌ی خالی، حداکثر یک است را به خانه‌ی خالی انتقال داد. می‌خواهیم به حالتی برسیم که سه توپ سفید در سه جعبه‌ی سمت چپ و سه توپ سیاه در سه جعبه‌ی سمت راست باشند. حداقل چند حرکت برای این کار لازم است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۳ ج) ۱۵ د) ۱۷ هـ) ۱۶

۱۰- جایگشت $a_۱, a_۲, \dots, a_۶$ از اعداد ۱ تا ۶ را در نظر بگیرید. در ابتدا یک عدد را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و سپس در هر مرحله اگر عدد a_i انتخاب شده بود در مرحله‌ی بعد به ازای $a_i \neq ۶$ عدد $a_{a_i+۱}$ و برای $a_i = ۶$ عدد $a_۱$ انتخاب می‌شود. به ازای چند جایگشت مختلف می‌توان عدد اول را به گونه‌ای انتخاب کرد که بعد از تعدادی مرحله، همه‌ی اعداد جایگشت حداقل یک‌بار انتخاب شده باشند؟

الف) ۳۴۵ ب) ۰ ج) ۲۴۰ د) ۷۲۰ هـ) ۱۲۰

۱۱- مجموعه‌ی $S = ۱,۲,\ldots,۷$ داده شده است. دو تابع داریم:
$f(A)$ که مکمل زیرمجموعه‌ی A و $g(A,B)$ که اشتراک A و B را می‌دهد.
یک کیسه داریم که همه‌ی زیرمجموعه‌های S را درون آن ریخته‌ایم. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه از کیسه بیرون آوریم تا با استفاده از آن‌ها و توابع بتوان تمام زیرمجموعه‌های S را تولید کرد (برای تولید زیرمجموعه‌ها می‌توان از هر زیرمجموعه به تعداد دل‌خواه استفاده کرد).
فرض کنید ۱,۲,۵,۶ , ۲,۵,۳ و ۵,۶ را از کیسه بیرون آورده‌ایم. حداقل چند زیرمجموعه‌ی دیگر از کیسه بیرون بکشیم تا مطمئن باشیم با آن‌ها می‌توان مسئله را حل کرد؟

الف) ۱ ب) ۶۲ ج) ۶۷ د) ۶۴ هـ) ۳

یک کلمه درون یک پرونده‌ی متنی داده شده است و می‌خواهیم با کم‌ترین تعداد اعمال کپی (Copy) و درج (Paste) تعداد مشخصی نسخه از آن ایجاد کنیم.
در هر مرحله می‌توانیم تعداد دل‌خواهی از کلمات نوشته شده درون پرونده را در حافظه کپی کنیم و یا کلمات درون حافظه را در پرونده درج کنیم. (مثل کپی و پیست در ویرایشگرها، می‌توان یک بار کپی کرد و سپس چند بار درج کرد.)هر کپی ۱ واحد و هر درج نیز ۱ واحد هزینه دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۱۲- با حداقل چند واحد هزینه می‌توانیم دقیقا ۹۹ کلمه‌ی دیگر مشابه با کلمه‌ی اول ایجاد کنیم؟

الف) ۱۳ ب) ۲۰ ج) ۱۴ د) ۱۰ هـ) ۲۲

۱۳- با ۱۴ واحد هزینه حداکثر چند کلمه (با احتساب کلمه‌ی اولیه) می‌توان ایجاد کرد؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۸ ج) ۲۴۳ د) ۸۱ هـ) ۱۶۲

فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $a_۱$ تومانی، $a_۲$ تومانی و... داریم و بخواهیم مقدار n تومان را پرداخت کنیم (پرداخت یک‌طرفه است یعنی نمی‌توانیم مقداری را بپردازیم و بقیه‌ی پول را پس بگیریم). در صورتی که بتوان n تومان را پرداخت کرد، n را عددی خوب می‌گوییم. برای مثال اگر اسکناس‌های ۵۰۰، ۲۰۰، ۱۰۰، ۵۰ و ۱۰۰۰ تومانی داشته باشیم، ۲۹۰۰ عددی خوب است؛ اما ۲۹۵۳ عددی خوب نیست. هم‌چنین عددی مانند n را عجیب گوییم، اگر بتوان n تومان را پرداخت کرد؛ طوری که از هر نوع اسکناس حداکثر یک بار استفاده شود. در مثال قبل ۹۰۰ عجیب نیست.
اگر n یک عدد خوب باشد، کمینه‌ی تعداد اسکناس‌ها برای پرداختش را $f(n)$ می‌نامیم. فرض کنید یک نفر الگوریتم زیر را برای پرداخت انتخاب کند:
در هر مرحله بزرگ‌ترین اسکناسی که مقدار آن از n بیش‌تر نیست را انتخاب می‌کنیم. این مبلغ را پرداخت می‌کنیم و برای باقی پول همین روش را ادامه می‌دهیم تا پرداخت به طور کامل انجام شود.
عدد n را زیبا گوییم، اگر تعداد اسکناس‌هایی که با الگوریتم بالا پرداخت می‌کنیم، برابر $f(n)$ شود. به یک کشور، افسانه‌ای گوییم، اگر تمام اعداد طبیعی خوب، زیبا نیز باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۱۴- فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $۱,۳,۳^۲,۳^۳,\ldots$ تومانی داشته باشیم. می‌خواهیم یک نوع اسکناس از بین گزینه‌های زیر به اسکناس‌های‌مان اضافه کنیم. با اضافه کردن کدام گزینه تعداد اعداد عجیب n که $۱ \leq n \leq ۲۴۹$ بیش‌تر از بقیه گزینه‌ها است؟

الف) ۶ ب) ۴ ج) ۵ د) ۷ هـ) ۲

۱۵- فرض کنید گزینه‌های زیر اسکناس‌های ۵ کشور مختلف باشند. کدام گزینه مربوط به یک کشور افسانه‌ای نیست؟

الف) $۱!, ۲!, ۳!, \dots$ ب) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$ ج) $۱, ۲, ۳, ۵, ۹, \dots$ (۱ و $(۲^n + ۱)$ها)
د) $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$ هـ) گزینه‌های ج و د

گراف ساده‌ی n رأسی G با رئوس $۱, ۲, \dots, n$ را در نظر بگیرید. ماتریس مسیریاب گراف، یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی سطر iام و ستون jام آن، تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j است (مسیر دنباله‌ای از رئوس است که بین هر دو رأس متوالی یک یال وجود دارد و هر رأس حداکثر یک بار آمده است).
در صورتی که $i = j$ باشد، مقدار ۱ را در ماتریس قرار می‌دهیم.
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶- کدام یک از ماتریس‌های زیر، می‌تواند یک ماتریس مسیریاب باشد؟

ماتریس ۱:

۱	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

ماتریس ۲:

۱	۳	۳	۳	۳
۳	۱	۳	۳	۳
۳	۳	۱	۳	۳
۳	۳	۳	۱	۳
۳	۳	۳	۳	۱

ماتریس ۳:

۱	۱	۲	۱
۱	۱	۲	۲
۲	۲	۱	۲
۱	۲	۲	۱

ماتریس ۴:

۱	۴	۳	۳
۴	۱	۳	۳
۳	۳	۱	۳
۳	۳	۳	۱

ماتریس ۵:

۱	۳	۳	۲
۳	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۳
۲	۳	۳	۱

الف) ماتریس ۲ ب) ماتریس ۳ ج) ماتریس ۴ د) ماتریس ۱ هـ) ماتریس ۵

۱۷- می‌خواهیم با پرسیدن تعدادی از خانه‌های ماتریس مسیریاب یک گراف، تعداد مؤلفه‌های گراف را تشخیص دهیم. در هر گام می‌توان یکی از خانه‌های ماتریس را پرسید. در حداقل چند گام به طور تضمینی به هدف می‌رسیم؟

الف) n ب) $n - ۱$ ج) $n - ۲$ د) $\binom{n-۱}{۲} + ۱$ هـ) $\binom{n}{۲}$

۱۸- با استفاده از ماتریس مسیریاب یک گراف، پاسخ چند تا از موارد زیر را همواره می‌توان فهمید؟ (رأس برشی، رأسی است که پس از حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف افزایش یابد.)

- آیا گراف رأس برشی دارد؟
- آیا رأس v برشی است؟
- بین دو رأس v و u یال وجود دارد یا نه؟
- آیا گراف حداقل ۲ (نه لزوما مجزا) دور دارد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۰ د) ۲ هـ) ۴

روال جام حذفی بدین صورت است که ۲^n تیم در n مرحله با هم مسابقه می‌دهند به نحوی که در هر مرحله هر تیم با یک تیم دیگر مسابقه می‌دهد (مثلا در مرحله‌ی اول $۲^{n-۱}$ مسابقه انجام می‌شود) و تیم‌هایی که شکست بخورند حذف می‌شوند. تیم‌های پیروز شده (نیمه‌ی دیگر تیم‌ها) به مرحله‌ی بعد می‌روند و دوباره به همین ترتیب مسابقه می‌دهند تا جایی که فقط یک تیم باقی بماند که تیم قهرمان نامیده می‌شود.

هر تیم عددی بین ۰ تا $۲^n - ۱$ دارد که قدرت آن تیم را نیز نشان می‌دهد (قدرت هیچ دو تیمی با هم برابر نیست). در مسابقه‌ی بین دو تیم، تیمی پیروز خواهد شد که قدرت بیشتری داشته باشد مگر در شرایطی که هر سوال مشخص می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹- این مسابقات با شرکت ۶۴ تیم برگزار می‌شود ($n = ۶$). در یک مسابقه اگر قدرت دو تیم را در مبنای دو بنویسیم و همه‌ی رقم‌های آنها به جز یکی برابر باشند هر دو تیم ممکن است پیروز شوند، در غیر این صورت تیم قوی‌تر پیروز می‌شود. برای مثال اگر ۲ و ۱۰ با هم مسابقه بدهند، هر دو تیم می‌توانند پیروز شوند. اما اگر ۱۶ و ۷ با هم مسابقه بدهند، حتما ۱۶ پیروز خواهد شد. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

الف) ۳۱ ب) ۰ ج) ۱۵ د) ۱ هـ) ۹

۲۰- در یک جام حذفی ۳۲ تیم حضور دارند ($n = ۵$) و چهار تیم ۳۱، ۲۳، ۱۴ و ۵ آمادگی کافی ندارند و ممکن است در یک مسابقه به طور اتفاقی شکست بخورند. با این شرایط ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

الف) ۱۵ ب) ۱۶ ج) ۱ د) ۴ هـ) ۰

۲۱- در یک جام حذفی ۱۶ تیم حضور دارند ($n = ۴$) و هر تیم ممکن است به طور اتفاقی در یک مسابقه پیروز شود. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

الف) ۳ ب) ۶ ج) ۵ د) ۴ هـ) ۷

دنباله‌ای اکیدا صعودی مانند $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد داریم. ما هیچ اطلاعاتی درباره‌ی اعداد نداریم و فقط می‌دانیم اکیدا صعودی هستند. عدد x در این دنباله موجود است اما نمی‌دانیم کجای دنباله است و می‌خواهیم مکان عدد x در دنباله را بیابیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از a_iها را انتخاب کنیم؛ سپس به ما نتیجه‌ی مقایسه‌ی x با a_i گفته می‌شود؛ یعنی یکی از عبارات زیر گزارش داده می‌شود:

$$x < a_i, \quad x = a_i, \quad x > a_i$$

هزینه‌ی مقایسه‌ی عدد a_i با x، برابر w_i است. w_i داده شده است.

می‌خواهیم الگوریتمی ارائه دهیم که مکان عدد x در دنباله را بیابد. کمینه‌ی هزینه‌ای که بتوان به طور تضمینی این کار را انجام داد

$$f(w_۱, w_۲, \ldots, w_n)$$

می‌نامیم. برای مثال می‌توان نشان داد اگر تمام w_i ها برابر ۱ باشند، این مقدار برابر $\lceil \lg(n) \rceil$ خواهد شد (منظور از $Lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است).

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۲- مقدار

$$f(\underbrace{۲,۳,\ldots,۱۰,۱,۲,۳,\ldots,۱۰,\ldots,۱,۲,۳,\ldots,۱۰}_{۳۱۹})$$

چند است؟

الف) ۲۷ ب) ۲۶ ج) ۲۰ د) ۱۹ هـ) ۱۶

۲۳- مقدار

$$f(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{511},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{511})$$

چند است؟

الف) ۱۱ ب) ۱۹ ج) ۲۷ د) ۱۲ هـ) ۱۸

۲۴- فرض کنید $n \geq 4$ باشد. مقدار

$$f(n,n^2,n^3,\ldots,n^n)$$

چند است؟

الف) $n^{n-3}+n^{n-1}$

ب) $\left\lfloor n^{\frac{n}{2}}+n^{\frac{3n}{4}}+n^{\frac{7n}{8}}+\ldots\right\rfloor$

ج) $\sum_{1\leq 2k+1\leq n} n^{2k+1}$

د) $\left\lfloor \lg(1+n+n^2+\ldots+n^n)\right\rfloor$

هـ) $n+n^2+\ldots+n^{n-1}$

۲۵- فرض کنید $n \geq 3$ و تمام w_i ها متمایز هستند. چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

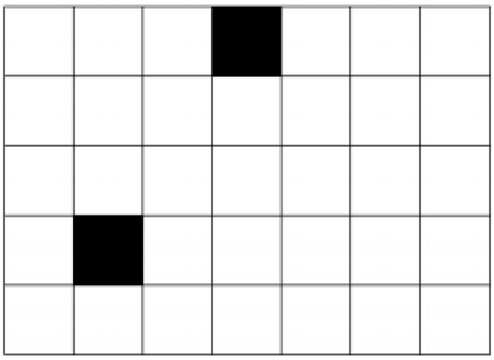
- هیچ الگوریتم بهینه‌ای در مرحله‌ی اول w_i بیشینه را انتخاب نمی‌کند.
- الگوریتم بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_iای را انتخاب می‌کند که $\left|\sum_{j>i} w_j - \sum_{j>i} w_j\right|$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در هیچ مرحله‌ای، a_1 را انتخاب نکند.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_i کمینه را انتخاب کند.

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۲ د) ۰ هـ) ۳

«آزمون روز دوم»

فرهاد و علی‌رضا در منهتن

فرهاد و علی‌رضا یک جدول $m\times n$ دارند $(m,n>1)$ و روی آن بازی می‌کنند. خانه‌ی واقع در سطر i-ام و ستون j-ام جدول را با (i,j) نشان می‌دهیم. **فاصله‌ی** دو خانه‌ی (r_1,c_1) و (r_2,c_2) را، برابر $|r_1-r_2|+|c_1-c_2|$ تعریف می‌کنیم. برای مثال، در جدول زیر، فاصله‌ی دو خانه‌ی مشخص شده، برابر ۵ است:



فرهاد k خانه‌ی $a_1,a_2,\ldots,a_k$ از جدول را انتخاب می‌کند و به علی‌رضا می‌گوید؛ سپس علی‌رضا یک خانه از جدول مانند X را انتخاب می‌کند و پس از این انتخاب، اعداد $b_1,b_2,\ldots,b_k$ را به فرهاد می‌گوید که b_i، فاصله‌ی خانه‌ی X تا خانه‌ی a_i است. حال باید فرهاد با توجه به این k عدد، خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا (X) را پیدا کند. فرهاد در صورتی می‌برد که خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا را بفهمد. فرض کنید هر دو نفر به به‌ترین نحو ممکن بازی می‌کنند.

اگر k کم‌ترین عددی باشد که فرهاد روشی برای انتخاب k خانه داشته باشد که ببرد، تعداد روش‌های انتخاب این k خانه را که فرهاد، با انتخاب آن‌ها به هدفش می‌رسد، به دست آورید. توجه کنید تنها با یافتن k، می‌توانید تا ۱۵ نمره بگیرید.

زبان اعصاب

فرهاد همواره دوست داشت که توابع را به صورت ساده بیان کند. به همین دلیل، امروز به این نتیجه رسید که اکثر توابع را می‌توان با تعدادی تابع اولیه و عمل‌گر ساده پیاده‌سازی کرد. از شما می‌خواهیم که به فرهاد در پیاده‌سازی برخی از این توابع کمک کنید. هم‌چنین فرهاد تنها به توابعی علاقه دارد که ورودی و خروجی آن‌ها، اعداد صحیح و نامنفی هستند. علی‌رضا به فرهاد، توابع ساده‌ی اولیه‌ی زیر را پیشنهاد داده است:

۱. **تابع پوچ:** این تابع تنها یک ورودی می‌گیرد و در خروجی، عدد ۰ را تحویل می‌دهد. این تابع را با z نشان می‌دهیم. برای مثال $z(10)=0$.

۲. **تابع افزون‌گر:** این تابع تنها یک ورودی می‌گیرد و اگر عدد n در ورودی به آن داده شود، عدد $n+1$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. این تابع را با inc نشان می‌دهیم. برای مثال $inc(5)=6$. فرهاد برای سادگی نمادی نیز تعریف کرده است. او به جای $x+1$ یا همان $inc(x)$ از نماد x' استفاده می‌کند.

۳. **توابع بازتاب:** این توابع به صورت $P_i^n(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ هستند که n عدد از ورودی می‌گیرند و i-امین عدد را تحویل می‌دهند. برای مثال تابع P_3^{10}، تابعی است که با گرفتن ۱۰ ورودی، همواره سومین ورودی را برمی‌گرداند. به عنوان مثالی دیگر $P_2^3(0,10,8)=10$ است.

با توابع بالا به تنهایی کار خاصی نمی‌توان کرد. به همین دلیل علی‌رضا عمل‌گرهای زیر را نیز به فرهاد پیشنهاد داده است. فایده‌ی این عمل‌گرها این است که با گرفتن چند تابع می‌توان توابع جدید ساخت.

۱. **عمل‌گر ترکیب:** این عمل‌گر یک تابع اصلی f می‌گیرد. فرض کنید f، m ورودی بگیرد. سپس این عمل‌گر توابع $g_1, g_2, \ldots, g_m$ را نیز از ورودی تحویل می‌گیرد که g_iها ورودی‌های یکسانی می‌گیرند (مثلا $x_1, x_2, \ldots, x_n$) به این ترتیب تابع جدید h ساخته می‌شود که $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$،

$$f(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

را برمی‌گرداند. این عمل‌گر را با

$$CN\left[f, g_1, g_2, \ldots, g_m\right]$$

نشان می‌دهیم.

۲. **عمل‌گر بازگشت:** این عمل‌گر، دو تابع f,g را می‌گیرد که f تابعی با یک ورودی و g تابعی با سه ورودی است. سپس این عمل‌گر، تابع بازگشتی h (با دو ورودی) را به صورت زیر می‌سازد:

$$\begin{cases} h(x,0) = f(x) \\ h(x,y') = g(x,y,h(x,y)) \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم منظور از y'، همان $y+1$ یا $inc(y)$ است. در واقع این عمل‌گر، برای محاسبه‌ی $h(x,y')$، مقدار $h(x,y)$ را به صورت بازگشتی محاسبه می‌کند و سپس حاصل $g(x,y,h(x,y))$ را برمی‌گرداند. این عمل‌گر را با $PR[f,g]$ نشان می‌دهیم.

فرهاد که حسابی گیج شده بود، از علی‌رضا خواست تا چند مثال برای او بزنند. علی‌رضا دو مثال زیر را برای بهتر فهمیدن فرهاد، ارائه کرد:

۱. فرض کنید می‌خواهیم تابع $const_1$ را بسازیم. این تابع باید به ازای هر ورودی x، همواره عدد ۱ را به عنوان خروجی، تحویل دهد. قبل از پیاده‌سازی این تابع، به هدف پیاده‌سازی این تابع توجه کنید. توابع و عمل‌گرهای تعریف شده، بسیار ساده و مقدماتی هستند و شما حتی دسترسی مستقیم به یک عدد صحیح ندارید و حتی نمی‌توانید مستقیمن یک عدد صحیح به عنوان ورودی یک تابع بدهید؛ به همین دلیل برای ساختن عدد ۱، این تابع را می‌سازیم. پس از پیاده‌سازی این تابع، دسترسی به عدد ۱ خواهیم داشت. علی‌رضا روش زیر را برای پیاده‌سازی این تابع، پیشنهاد کرد:

$$const_1(x)=CN[inc,z]$$

این تابع، در واقع با گرفتن عدد x، ابتدا آن را به تابع z می‌دهد و حاصل یا همان صفر را به تابع inc می‌دهد و در انتها خروجی ۱ برگردانده می‌شود.

فرض کنید $const_i$ تابعی باشد که با گرفتن هر عدد x، عدد ثابت i را برگرداند. علی‌رضا به این نکته توجه کرد که به ازای هر c ثابت، با داشتن تابع $const_{c-1}$، تابع $const_c$ را می‌توان به صورت زیر، پیاده‌سازی کرد:

$$const_c(x) = Cn\left[inc, const_{c-1}\right]$$

سپس فرهاد به روش استقرایی نتیجه گرفت، به ازای هر c ثابت، تابع $const_c$ را می‌توان پیاده‌سازی کرد.

۲. فرض کنید می‌خواهیم تابع جمع (sum) را بسازیم. این تابع باید با گرفتن دو ورودی x,y، جمع آن‌ها $(x+y)$ را تحویل دهد. علی‌رضا برای پیاده‌سازی این تابع به صورت زیر استدلال کرد:

» در صورتی که $y=0$ باشد، آن‌گاه حاصل $x+y$ برابر x می‌شود. در غیر این صورت، حاصل $x+y$ برابر $(x+(y\text{-}1))+1$ می‌شود. پس می‌توان به صورت بازگشتی، این تابع را پیاده‌سازی کرد و کافی است دو تابع f,g را برای عمل‌گر بازگشت، تعریف کنیم:

- از آن‌جایی که $sum(x,0)=x$، پس باید تابع f را طوری تعریف کنیم که $f(x)=x$ شود. تابع بازتاب P_{11}، با گرفتن یک ورودی، همان را برمی‌گرداند؛ پس اگر قرار دهیم $f(x)=P_1^1(x)$ تابع مطلوب f را ساخته‌ایم. پس $f=P_1^1$
- داریم $sum(x,y')=sum(x,y)+1$ از طرفی قرار است تابع g را طوری تعریف کنیم که $sum(x,y')=g(x,y,sum(x,y))$ شود. با استفاده از تابع بازتاب P_{33} روی ورودی‌های تابع g، می‌توانیم ورودی سوم آن یا همان

$sum(x,y)$ را به دست آوریم. سپس اگر حاصل را به تابع inc بدهیم، مقدار مورد نظر یا همان $sum(x,y')$ ساخته می‌شود. پس اگر قرار دهیم: $g(x,y,sum(x,y)) = inc(P_۳^۳(x,y,sum(x,y)))$

تابع مطلوب g را ساخته‌ایم. پس $g = CN\left[inc, P_۳^۳\right]$

پس توابع f,g را برای پیاده‌سازی توسط عمل‌گر بازگشت، ساختیم.

علی‌رضا پس از استدلال بالا، پیاده‌سازی زیر را ارائه داد:

$$sum(x,y) = PR\left[P_۱^۱, CN\left[inc, P_۳^۳\right]\right]$$

حال برای پیاده‌سازی توابع زیر، به فرهاد کمک کنید. توجه کنید فقط باید از توابع و عمل‌گرهای گفته شده، استفاده کنید. برای ساده نوشتن، می‌توانید چند *تابع کمکی* تعریف کرده و پیاده‌سازی کنید و در پیاده‌سازی تابع خواسته شده، از آن‌ها استفاده کنید. در هر قسمت توضیحی کوتاه (در حد چند جمله) نیز برای پیاده‌سازی خود بدهید.

الف) تابع ضرب (mul) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید دو عدد x,y به عنوان ورودی بگیرد و $x\times y$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $mul(x,y)=x\times y$ شود.

ب) تابع $poly$ را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید یک عدد x به عنوان ورودی بگیرد و $x^۲ + x + ۲$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $poly(x) = x^۲ + x + ۲$ شود.

پ) تابع فاکتوریل $(fact)$ را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید عدد n را به عنوان ورودی بگیرد و $n!$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $fact(n)=n!$ شود.

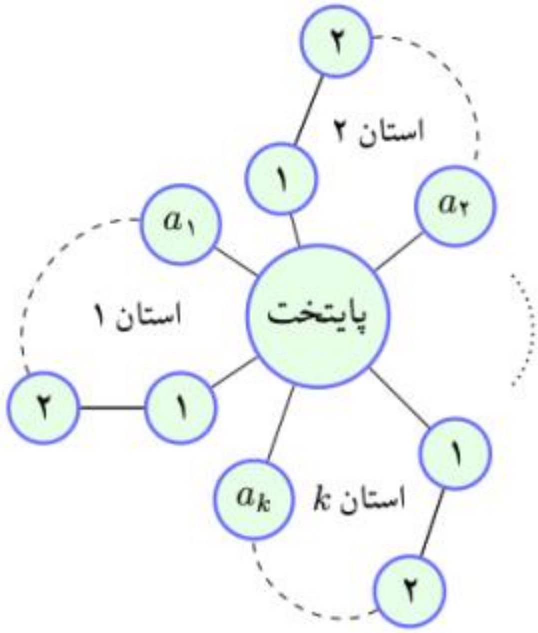
ت) تابع مینیمم (min) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید عدد x,y را به عنوان ورودی بگیرد و عدد کوچک‌تر را از میان دو عدد x,y تحویل دهد. برای مثال اگر $3,4$ به عنوان ورودی به این تابع داده شوند، باید عدد ۳ و اگر ۷،۷ داده شوند، باید عدد ۷ به عنوان خروجی داده شود.

توپ‌های بهروز

بهروز b جعبه و n *نوع* توپ دارد.$(b\geq n)$ در هر جعبه، تعدادی توپ وجود دارد. توجه کنید یک نوع توپ می‌تواند در چند جعبه وجود داشته باشد. می‌دانیم هر n جعبه‌ای را در نظر بگیریم، می‌توان از هر یک، ۱ توپ انتخاب کرد؛ طوری که هیچ دو توپی از n توپ انتخاب شده، هم‌نوع نباشند. فرض کنید مجموع تعداد توپ‌های جعبه‌ها s باشد. کمینه‌ی ممکن s را بیابید (در واقع شما باید یک s را پیدا کنید که حالتی با s توپ داشته باشیم؛ ولی هیچ حالتی با $s-۱$ توپ وجود نداشته باشد).

بمب‌گذاری واس اوناس

در یک دنیا، هر کشور تعدادی شهر دارد و بین هر دو شهر یا جاده‌ی مستقیم دوطرفه وجود دارد یا ندارد. دو شهر را **مجاور** می‌گوییم، اگر با جاده‌ی مستقیم به هم وصل باشند. می‌دانیم از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده، به هر شهر دیگر رسید. **فاصله‌ی** بین دو شهر را کم‌ترین تعداد جاده‌هایی در نظر می‌گیریم که برای رفتن از یکی از این دو شهر به دیگری، باید طی کرد.



الف) علی‌رضا و فرهاد، در کشور **واس‌ماس** زندگی می‌کنند. این کشور، از یک پایتخت و k استان با شماره‌های $1,2,\ldots,k$ تشکیل شده است. استان i، a_i شهر با شماره‌های $1,2,\ldots,a_i$ دارد. در هر استان i، شهرهای ۱ و ۲ به هم، شهرهای ۲ و ۳ به هم، ... و شهرهای a_{i-1} و a_i به هم جاده دارند. هم‌چنین در هر استان i، شهرهای ۱ و a_i به پایتخت، جاده دارند. در واقع جاده‌های این کشور، مانند شکل زیر است:

یک تروریست، در یکی از شهرهای این کشور، بمب‌گذاری کرده است. علی‌رضا و فرهاد که به تازگی پلیس شده‌اند، برای پیدا کردن شهر بمب‌گذاری شده، مأمور شده‌اند. آن‌ها یک دستگاه بمب‌یاب دارند. اگر در شهری مانند T، این دستگاه را استفاده کنند، چنان‌چه شهر T بمب‌گذاری شده باشد، دستگاه به ما می‌گوید و اگر شهر T بمب‌گذاری نشده باشد، دستگاه در میان شهرهای مجاور T، شهری را نشان می‌دهد که کم‌ترین فاصله را با شهر بمب‌گذاری شده دارد (اگر چند شهر با این خاصیت وجود داشت، دستگاه به طور تصادفی یکی از آن‌ها را نشان می‌دهد). استفاده از این دستگاه، بسیار هزینه‌بر است؛ پس علی‌رضا و فرهاد می‌خواهند با کم‌ترین تعداد استفاده از دستگاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. کم‌ترین تعداد دفعاتی که آن‌ها باید از دستگاه استفاده کنند، تا به طور مطمئن بتوانند بمب را پیدا کنند، چقدر است؟ پاسخ را بر حسب اعداد $a_1,a_2,\ldots,a_k$ بیان کنید.

ب) اتفاق ناگوار بمب‌گذاری، در کشور **ماس‌ماس** نیز رخ داد. پادشاه کشور ماس‌ماس تصمیم گرفته است از گروهی زبده برای خنثی کردن این بمب استفاده کند. پس از عمل‌کرد فوق‌العاده‌ی علی‌رضا و فرهاد در خنثی کردن بمب کشور واس‌ماس، پادشاه کشور ماس‌ماس تصمیم گرفت مأموریت را به این دو نفر و دستگاه عجیب‌شان بسپارد. پادشاه کشور ماس‌ماس، به هر شهر یک عدد نسبت داده است و آن عدد، برابر با فاصله‌ی دورترین شهر کشور تا شهر مذکور است. علی‌رضا و فرهاد، اطلاعاتی در مورد تعداد شهرها و نحوه‌ی جاده‌کشی کشور ماس‌ماس ندارند. آن‌ها فقط می‌دانند کم‌ترین عدد نسبت داده شده به شهرها، r است. قرار است هزینه‌ی دستگاه را پادشاه بدهد. علی‌رضا و فرهاد ادعا می‌کنند پس از گرفتن نقشه‌ی جاده‌کشی کشور، خواهند توانست با حداکثر $f(r)$ بار استفاده از دستگاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. پادشاه نیز پس از شنیدن این حرف، نقشه را به آن‌ها می‌دهد. با توجه به نداشتن تعداد شهرها و نقشه‌ی جاده‌کشی شهرها قبل از بیان ادعا، کمینه‌ی $f(r)$ را بیابید.

ج) عصبانیت بمب‌گذاران پس از خنثی شدن دو عملیات قبلی، دو چندان شد و آن‌ها این بار تصمیم گرفتند در کشور دوست و هم‌سایه (**باس‌ماس**) بمب‌گذاری کنند! این کشور n شهر دارد. ثابت کنید هر گونه شهرهای این کشور، جاده‌کشی شده باشند، علی‌رضا و فرهاد می‌توانند با *کم‌تر* از $\lfloor lg(n) \rfloor + 1$ بار استفاده از دستگاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند.

توجه: منظور از $lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است. برای مثال $lg(1024) = 10$ و $lg(20) = 4/32192\ldots$ است. هم‌چنین منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیش‌تر نیست. برای مثال $\lfloor 2/3 \rfloor = 2$ و $\lfloor 5 \rfloor = 5$ است.

«پاسخ تشریحی»

۱- گزینه‌ی ب درست است.

اگر در حرکت اول سهراب تمامی سکه‌ها را پشت و رو کند به هدف می‌رسیم. می‌دانیم سکه‌های دو رو شیر تنها در بین ۱۰۰ سکه‌ای هستند که ابتدا شیر بودند. اگر هیچ‌کدام از آنها اینگونه نباشند جواب سهراب ۱۲۹۴ خواهد بود. ولی به ازای هر سکه‌ی دو رو شیر، این تعداد افزایش می‌یابد. درنتیجه اگر سهراب x را اعلام کند، تعداد سکه‌های دو رو شیر برابر $x - ۱۲۹۴$ است.

۲- گزینه‌ی ج درست است.

اگر دوران‌ها و حالت‌های متقارن را یکی در نظر بگیریم، جدول به صورت یکتا پر می‌شود. هم‌چنین خط حداکثر می‌تواند از ۵ خانه بگذرد. اگر خط بخواهد از ۸ بگذرد، حداکثر مجموع ۲۷ را تولید خواهد کرد. اگر از ۸ نگذرد نیز، $۳۱ + ۹ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴$ بیشینه‌ی ممکن خواهد بود که مثال آن وجود دارد.

۳- گزینه‌ی هـ درست است.

به ازای رشته‌های یک رقمی بهترین حالت این است ۴ تا از اعداد یکسان باشند.

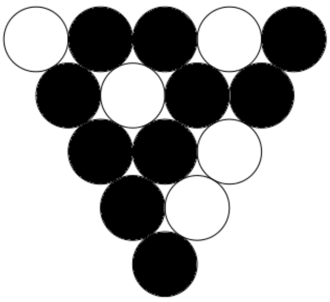
به ازای رشته‌های دو رقمی بهترین حالت این است که از سه حالت ۲ بار و از یک حالت ۱ بار وجود داشته باشد.

و در نهایت به ازای رشته‌های سه رقمی بهترین حالت این است که از هر حالت حداکثر یک بار آمده باشد و از یک رشته اصلا نیاید.

اگر دنباله دور دایره به صورت ۱۱۱۰۰۱۰ باشد به چنین حالتی می‌رسیم و در نتیجه این جواب بهینه است. با محاسبه‌ی مجموع اعداد فوق عدد ۵۳ بدست می‌آید که پاسخ مسئله است.

۴- گزینه‌ی الف درست است.

شکل مقابل روشی را نشان می‌دهد که ۱۰ دایره‌ی سیاه داریم. از طرف دیگر در هر چهار مثلثی که در شکل نشان داده شده حداقل یک دایره‌ی سفید داریم، درنتیجه جواب حداکثر ۱۱ خواهد بود. اگر حالتی وجود داشته باشند که جواب ۱۱ باشد، سه خانه‌ی دیگر سیاه خواهند بود ولی با فرض سیاه بودن آنها می‌توان دایره‌ها را پر کرد که در این صورت به ۱۱ دایره نمی‌رسیم.



۵- گزینه‌ی الف درست است.

می‌توان مجموع دایره‌های سیاه هر سطر را بصورت مجزا محاسبه نمود و در نهایت اعداد پنج سطر را با هم جمع کرد.

در هر سطر هر وضعیت، یک حالت معکوس دارد که رنگ همه‌ی دایره‌ها برعکس شده‌اند. از طرف دیگر مستقل از انتخاب رنگ دایره‌ها، هر وضعیت در یک سطر مشخص در تعداد وضعیت یکسانی ظاهر می‌شود (چون برای سطر بالایی آن ۲ انتخاب داریم، برای سطر دو تا بالاتر ۴ انتخاب و ... تا به سطر اول برسیم). بدین ترتیب بصورت میانگین در هر سطر نیمی از دایره‌ها سفید و نیمی سیاه هستند. پس جواب برابر است با تعداد کل دایره‌ها تقسیم بر ۲ که می‌شود: $\frac{۱۵ \times ۲^{۵}}{۲} = ۲۴۰$.

۶- گزینه‌ی ج درست است.

می‌توان با حالت‌بندی و شمارش مسئله را حل کرد اما راه ساده‌تر به شرح زیر است:

a_i را برابر احتمال آن که زوجیت i و π_i برابر باشد در نظر می‌گیریم. در امید ریاضی این خاصیت وجود دارد که امید ریاضی جمع چند متغیر برابر با جمع امید ریاضی تک‌تک آن متغیرهاست؛ پس امید ریاضی خواسته شده، برابر با جمع a_i ها است. پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۴ \times ۴ + ۵ \times ۵}{۹} = \frac{۴۱}{۹}$$

۷- گزینه‌ی هـ درست است.

به ازای $k=2$ نمی‌توان این کار را انجام داد زیرا باید $\frac{1}{j}+\frac{1}{i}=1$ باشد. اگر $i=1$ یا $j=1$ باشد، حاصل از ۱ بیش‌تر می‌شود. پس $i,j\geq 2$ و از طرفی نمی‌توانند هر دو برابر ۲ باشند. پس حاصل کم‌تر از ۱ خواهد شد.
به ازای $k=3$ کار به شکل زیر قابل انجام است:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

حال فرض کنید کار به ازای $k=m$ برقرار باشد. مخرج تمام کسرها را ضرب در ۲ کنید و حاصل را با $\frac{1}{2}$ جمع کنید. به این ترتیب کار برای $k=m+1$ نیز انجام می‌شود. پس به ازای $k=3,4,5,6$ کار قابل انجام است.

۸- گزینه‌ی هـ درست است.

فرض کنید یک خط در این سیستم k نفر داشته باشد. می‌خواهیم تعداد حالاتی را از لحظه‌ی رسیدن توپ به یکی از بازی‌کنان این خط تا لحظه‌ی بیرون کردن توپ از این خط (با پاس رو به جلو یا شوت) حساب کنیم. این تعداد حالات را a_k می‌نامیم. یک حالت وجود دارد که توپ اصلن به هیچ یک از بازی‌کنان این خط نرسد. در غیر این صورت k حالت برای انتخاب بازی‌کن شروع کننده در این خط وجود دارد. انجام بقیه‌ی کار به a_{k-1} حالت توسط بقیه‌ی بازی‌کنان این خط قابل انجام است. پس

$$a_k=ka_{k-1}+1$$

حال طبق اصل ضرب پاسخ برابر "تعداد حالات توپ در خط دفاعی ضرب در تعداد حالات توپ در خط هافبک ضرب در تعداد حالات توپ در خط حمله" است. پس پاسخ برابر

$$a_4\times a_4\times a_2$$

خواهد بود. از طرفی

$$a_1=2, a_2=2\times 2+1=5, a_3=3\times 5+1=16, a_4=4\times 16+1=65$$

پس پاسخ برابر $65\times 65\times 5=21125$ است.

۹- گزینه‌ی ج درست است.

تعداد جابجایی‌ها برای هر توپ چهار خانه است. درنتیجه هر توپ حداقل باید دو حرکت انجام دهد تا به خانه‌ی هدفش برسد (۱۲ حرکت). از طرف دیگر حرکت اول و آخر همواره شامل یک واحد حرکت هستند. درنتیجه هر کدام از آن مهره‌ها باید یک حرکت اضافه‌تر انجام دهند که در مجموع ۱۴ حرکت می‌شود.
اگر ۱۴ جواب مسئله باشد باید بتوان با همین روند (بجز دو حالت همواره حرکات ۲ واحدی) به انتها رسید. کافیست از حرکت اول دنباله‌ی حرکت را پیگیری کنیم تا ببینیم پس از پنج حرکت بازی به حالتی می‌رسد که باید یک حرکت یک واحدی اضافی انجام شود و درنتیجه تعداد حرکات برای رسیدن به جواب ۱۵ می‌شود.
از طرفی با ادامه دادن همین روند مثالی با ۱۵ حرکت هم یافت می‌شود.

۱۰- گزینه‌ی هـ درست است.

برای هر جایگشت می‌توان یک نوع دیگر گراف جایگشت ساخت به طوری که از هر عدد به عدد بعدی یک یال جهت‌دار رسم کرد حالا ما می‌خواهیم گراف جایگشت یک دور به طول ۶ باشد که برای این کار $5!$ حالت وجود دارد.

۱۱- گزینه‌ی ب درست است.

از اشتراک هر ۳ مجموعه به مجموعه‌ی ۵ می‌رسیم. از تفریق این مجموعه و مجموعه‌ی ۵,۶ به ۶ می‌رسیم. از تفریق دو مجموعه‌ی اول به دو مجموعه‌ی ۲,۳ , ۱,۲ می‌رسیم که ما را به مجموعه‌های ۱ تا ۳ می‌رساند. نکته اینجاست که در هر مجموعه‌ای

که در نظر بگیریم یا ۴ و ۷ هر دو نیامده‌اند یا هر دو آمده‌اند. بنابراین با هیچ تابعی برحسب مجموعه‌های فعلی نمی‌توان به مجموعه‌هایی رسید که یکی از این دو را داشته باشد. در ضمن کافی است مجموعه‌ای داشته باشیم شامل یکی از این دو. با استفاده از عملیات تفریق و مجموعه‌های تک عضوی بدست آمده ابتدا به مجموعه‌ی تک عضوی ۴ یا ۷ می‌رسیم... سپس با استفاده از این توابع به هر زیرمجموعه‌ای خواستیم می‌رسیم. بنابراین این کار را تا زمانی می‌توان ادامه داد که به مجموعه‌ای برسیم که یکی از ۴ یا ۷ را داشته باشد. تعداد مجموعه‌هایی که یا هردوی ۴ و ۷ را دارند یا هیچکدام برابر با $۶۴ = ۲^۶$ می‌باشد. بنابراین کافی است ۶۵ عضو داشته باشیم تا مساله حل شود. از آنجا که در ابتدا ۳ عضو داریم، ۶۲ جواب خواهد بود.

۱۲- گزینه‌ی ج درست است.

اگر یک بار کپی و یک بار پیست کنیم در نهایت با ۱۴ حرکت می‌توان به عدد صد رسید. اما اگر در ابتدا یک بار کپی و دو بار پیست کنیم، سپس یک بار کپی و دو بار پیست کنیم، و سپس یک بار کپی و سه بار پیست کنیم به عدد ۳۶ می‌رسیم. حال اگر ۳۲ کلمه را کپی کنیم و دو بار پیست کنیم ۱۰۰ کلمه خواهیم داشت و تعداد حرکات ۱۳ تا شده است. برای اثبات کمینه بودن پاسخ سوال بعدی را ببینید.

۱۳- گزینه‌ی هـ درست است.

کافی است $f(k)$ را بیش‌ترین تعداد کلمه با k واحد هزینه تعریف کنیم. به سادگی می‌توان دید که:

$$f(۲) = ۲, f(۳) = ۳, \ldots, f(n) = \max_k \; kf(n-k)$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$f(۱۲) = ۸۱, f(۱۳) = ۱۰۸, f(۱۴) = ۱۶۲$$

۱۴- گزینه‌ی ج درست است.

در صورتی که یک سکه مثل a اضافه شود به ازای هر عدد مثل i که قبلا تولید می‌شد می‌توان یک عدد تولید کرد به صورت $a+i$ مگر اینکه این عدد خود قابل تولید توسط اعداد قبلی باشد. هرچه تعداد این اعداد مشترک کمتر باشد اعداد عجیب بیشتری خواهیم داشت.

حال به ازای هر a باید ببینیم در چند حالت i و a+i هر دو عجیب هستند.

اگر اعداد را در مبنای ۳ بنویسیم اعدادی عجیب هستند که تنها از ارقام ۰ و ۱ تشکیل شده باشند. حال با این ویژگی اگر $a = ۲$ باشد تنها زمانی i و $i+۲$ عجیب هستند که دو رقم سمت راست i برابر ۰۱ باشد. به همین ترتیب برای $a = ۴$ باید دو رقم آخر ۰۰ ، برای $a = ۵$ باید سه رقم آخر ۰۱۱ ، برای $a = ۶$ باید سه رقم آخر ۰۱۱ یا ۰۱۰ و برای $a = ۷$ باید سه رقم آخر ۰۱۰ باشد.

با این توضیحات به ازای $a = ۵$ و $a = ۷$ تعداد اعداد بصورت i و $a+i$ که هر دو عجیب باشند کمتر است و درنتیجه در مجموع اعداد عجیب بیشتری تولید می‌کنند. ولی از این میان یکی از اعداد به شکل $۷ + i$ خارج از محدوده‌ی مسئله (یعنی کمتر مساوی ۲۴۹) می‌شود که $۲۵۰ = ۷ + ۲۴۳$ است. درنتیجه در مجموع تعداد اعداد عجیب ساخته شده به ازای $a = ۵$ بیشتر از بقیه‌ی گزینه‌ها است.

۱۵- گزینه‌ی د درست است.

در صورتی که در یک کشور هر سکه از مجموع سکه‌های کوچکتر از آن بزرگتر باشد الگوریتم یاد شده درست است (چرا؟). درنتیجه گزینه‌های اول و دوم هر دو افسانه‌ای هستند. برای گزینه‌ی چهارم به ازای $n = ۱۸$ الگوریتم بهینه نیست و درنتیجه کشور افسانه‌ای نخواهد بود.

ولی گزینه‌ی سوم هم کشوری افسانه‌ای است. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت به ازای nای روش ما تعداد سکه‌ی بیشتری انتخاب می‌کند. فرض کنید در انتخاب بهینه بزرگترین عدد انتخاب نشود. در این صورت باید از یکی از اعداد دیگر چند بار انتخاب شود. ولی می‌دانیم بجای انتخاب دو عدد یکسان، می‌توان سکه‌ی بزرگترش را به همراه عدد ۱ انتخاب کرد. درنتیجه با انتخاب بزرگترین عدد نیز می‌توان با همان تعداد سکه به جواب بهینه رسید. پس این گزینه هم کشوری افسانه‌ای است.

۱۶- گزینه‌ی ج درست است.

ماتریس مسیریاب یک درخت، ماتریسی با درایه‌های ۱ است. اضافه کردن یک یال باعث می‌شود دوری بوجود آید که حداقل شامل سه راس است و تعداد مسیرهای بین آنها ۲ خواهد شد. درنتیجه ماتریس ۱ نمی‌تواند ماتریس مسیریاب یک گراف باشد. به همین استدلال ماتریس ۳ نیز باید یک دور سه‌تایی با یک راس متصل به آنها باشد که در این حالت هم ماتریس گراف برابر ماتریس ۳ نمی‌شود.

در صورتی که در یک مولفه‌ی گراف دو دور داشته باشیم دو راس خواهیم داشت که تعداد مسیرهای بین آنها حداقل ۴ تا باشد درنتیجه ماتریس ۲ و ۵ هم قابل دست‌یابی نیست. با بررسی گراف‌های چهار راسی می‌توان مثالی برای ماتریس ۴ یافت (گرافی با ۵ یال).

۱۷- گزینه‌ی هـ درست است.

واضح است که با $\binom{n}{۲}$ تعداد یال می‌توان به هدف رسید (هر دو راسی که در یک مولفه باشند درایه‌ی متناظر با آنها بزرگتر از صفر است). ادعا می‌کنیم با کمتر از این تعداد نمی‌توان به هدف رسید.

فرض کنید $\binom{n}{۲}-۱$ پرسش انجام داده‌ایم و پاسخ تمام آنها صفر باشد. در این صورت گرافی داریم که هیچ یالی ندارد مگر اینکه بین دو راسی که سوال نپرسیده‌ایم یال باشد (که هنوز درباره‌ی آن اطلاعی نداریم). پس در این حالت خاص بدون پرسش آخر نمی‌توان تعداد مولفه‌ها را تشخیص داد.

۱۸- گزینه‌ی د درست است.

سوال اول: می‌توان فهمید. اگر راس برشی در گرافی باشد، آن راس و همسایگانش تنها یک مسیر به یکدیگر دارند. پس در این حالت حداقل سه راس هستند که درایه‌ی متناظرشان ۱ است. از طرفی اگر چنین سه راسی وجود داشته باشند بدین معنی است که یکی از آنها بین دو راس دیگر است (در غیر این صورت تعداد مسیرهای بین این دو راس حداقل ۲ بود). حال پس از حذف راس میانی دو راس دیگر در دو مولفه جدا قرار می‌گیرند.
سوال دوم و سوم: نمی‌توان فهمید. یک درخت را در نظر بگیرید. در این حالت ماتریس مسیریاب آن تماما ۱ است. در یک درخت برگ‌ها برشی نیستند ولی بقیه‌ی رئوس برشی هستند. از طرفی در این درخت نمی‌توان فهمید که بین دو راس مشخص یال هست یا نه.
سوال چهارم: می‌توان فهمید. ابتدا مولفه‌ها را از روی ماتریس می‌یابیم. حال اگر در یک ماتریس مسیریاب هر مولفه تنها ۱ وجود داشت دور ندارد، اگر تنها شامل ۱ و ۲ بود یک دور وجود دارد ولی اگر شامل اعداد ۳ یا بیشتر بود حداقل دو دور وجود دارد.

۱۹- گزینه‌ی ب درست است.

تمامی تیم‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ قرار دهید و مسابقات را با این چینش انجام دهید. در این صورت هر تیم با شماره‌ی زوج با تیم حریفش تنها در رقم یکان متفاوت است. پس تیم‌های زوج می‌توانند برنده باشند. بدین ترتیب به حالتی می‌رسیم که تمام اعداد زوج صعود کرده‌اند. همین روند را برای ۳۲ بعدی انجام دهید (رقم یکان همه صفر است و می‌توان همه‌ی اعداد را بر ۲ تقسیم کرد تا به اعداد ۱ تا ۳۱ برسیم. به ازای این اعداد هم همین روال را انجام دهید. با تکرار این کار در مراحل بعدی می‌توان به حالتی رسید که تیم با قدرت صفر برنده‌ی مسابقات شود.)

۲۰- گزینه‌ی ج درست است.

می‌دانیم تیم قهرمان باید ۵ بازی را ببرد و در شرایط سوال، ۴ تیم گفته شده است که ممکن است در شرایطی از تیمی ضعیف‌تر شکست بخورند. پس تیم ۰ نمی‌تواند قهرمان شود.
حال می‌خواهیم ساختاری ارائه دهیم که طی آن تیم ۱ قهرمان شود. تیم ۱ به ترتیب با تیم‌های ۰ و ۵ و ۱۴ و ۲۳ و ۳۱ بازی کند و در ۴ مسابقه‌ی آخر تیم حریف به طور اتفاقی شکست می‌خورند.
تیم ۵ با تیم‌های ۲ و ۱ و تیم ۱۴ با تیم‌های ۶ و ۴ و ۱ و تیم ۲۳ با تیم‌های ۱۳ و ۱۲ و ۱۰ و ۱ و تیم ۳۱ با تیم‌های ۳۰ و ۲۹ و ۲۷ و ۲۲ و ۱ بازی خواهند کرد و طی این ساختار تیم ۱ قهرمان می‌شود.

۲۱- گزینه‌ی د درست است.

ابتدا اثبات می‌کنیم تیم ۳ نمی‌تواند قهرمان شود. چون هر تیم برای قهرمانی باید ۴ بازی را ببرد و اگر فرض کنیم تیم ۳ قهرمان شده است باید حتما با هر سه تیم ضعیف‌تر از خودش بازی کند زیرا یک بازی را فقط می‌تواند از تیم قوی‌تری پیروز شود، پس در یکی از بازی‌های فینال یا نیمه نهایی باید تیم ۳ از تیمی ضعیف‌تر از خود پیروز شود.

یعنی آن تیم حداقل باید ۲ بازی را پیروز شده باشد تا به آن مرحله رسیده باشد که با توجه به اینکه هر ۳ تیم ضعیف‌تر از ۳ از خود ۳ شکست خواهند خورد پس هیچ‌کدام از این تیم‌ها نمی‌تواند ۲ پیروزی داشته باشد (یک بازی را می‌توانند از تیم قوی‌تر ببرند و تیم ضعیف‌تری نیز وجود ندارد که از آن ببرند) تا به نیمه نهایی برسند پس تیم ۳ نمیتواند قهرمان شود.

حال ساختاری حریصانه برای قهرمانی تیم ۴ ارائه می‌دهیم:

تیم ۴ با تیم‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۱۵ بازی می‌کند و تیم ۱۵ با تیم‌های ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۴ بازی می‌کند. تیم ۳ با تیم‌های ۰ و ۷ و ۴ بازی می‌کند و تیم ۲ با تیم‌های ۶ و ۴ بازی می‌کند و همچنین تیم ۱ با تیم ۴ بازی می‌کند.

۲۲- گزینه‌ی صحیح وجود ندارد.

بهترین این است که با کمترین هزینه تعداد کل حالات را نصف کنیم. ۳۱ عدد ۱ وجود دارد که پس از ۵ بار پرسش اگر عدد موردنظر یافت نشود یک بازه از اعداد ۲ تا ۱۰ می‌ماند. اگر بازه‌ای شامل اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ باشد حداقل ۹ واحد هزینه لازم است تا عدد را تشخیص دهیم. درنتیجه برای یافتن این بازه بصورت حداقلی عدد ۷ انتخاب می‌شود (در غیر اینصورت بازه به ۷ تا ۱۰ می‌رسد که باز هم حداقل ۱۶ واحد هزینه لازم دارد). درنتیجه در مجموع ۱۶ واحد هزینه لازم است. با انتخاب اولیه‌ی عدد ۷ این اتفاق می‌افتد و با هزینه‌ی حداکثر ۱۶ واحد به جواب می‌رسیم (بازه ۱ تا ۶ با ۸ واحد هزینه حل می‌شود). درنتیجه جواب نهایی مسئله برابر ۲۱ است.

۲۳- گزینه‌ی صحیح وجود ندارد.

فرض کنید بازه تنها شامل ۵۱۱ عدد ۲ باشد. طبق مسئله‌ی کلاسیک این مبحث می‌دانیم حداقل باید ۸ پرسش انجام شود و اگر تعداد این اعداد یکی هم بیشتر شود (۵۱۲ یا بیشتر)، ۹ پرسش لازم است. حال عدد اولیه اگر شامل عددی بجز عدد ۲ وسطی باشد همچنان ۸ پرسش دیگر لازم است و اگر همان ۲ وسطی باشد ۵۱۱ عدد یک در سمت چپ وجود دارند که می‌توانند جواب مسئله باشند. درنتیجه حداقل ۱۷ واحد هزینه لازم است. از طرفی اگر سمت راست‌ترین ۱ را انتخاب کنیم با ۱۷ واحد هزینه می‌توانیم به خواسته‌ی خود برسیم.

۲۴- گزینه‌ی الف درست است.

پاسخ این سوال شبیه به سوال اول این بخش است. فرض کنید تنها چهار عدد بزرگتر مانده باشند. در این صورت تعداد حالات مختلف پرسش محدود هستند و می‌توان به سادگی بدست آورد که $n^{n-۳}+n^{n-۱}$ واحد هزینه لازم است. از طرفی مجموع بقیه‌ی اعداد بازه کمتر از $n^{n-۱}$ است. درنتیجه این هزینه برای کل بازه هم درست است.

۲۵- گزینه‌ی د درست است.

هیچ‌کدام از گزاره‌ها درست نیستند.

گزاره‌ی ۱: اگر وزن‌ها به ترتیب ۱ و ۳ و ۲ باشد، بهترین انتخاب این است که ابتدا عدد وسطی را انتخاب کنیم که بیشینه وزن را دارد.

گزاره‌ی ۲: مثال سوال قبل، مثال نقضی برای این گزاره است.

گزاره‌ی ۳: اگر در مثال سوال قبل، تنها چهار عدد بزرگتر را در نظر بگیریم در سوال اول بهتر است که عدد اول انتخاب شود.

گزاره‌ی ۴: مثال سوال قبل، مثال نقضی برای این گزاره است.

«پاسخ تشریحی آزمون روز دوم»

فرهاد و علی‌رضا در منهتن! .... ۳۰ امتیاز

ابتدا ثابت می‌کنیم کمینه‌ی k برابر ۲ است. ابتدا نشان می‌دهیم کمینه‌ی k نمی‌تواند ۱ باشد. اگر فرهاد تنها یک خانه را انتخاب کند و علی‌رضا پاسخ ۱ به او بدهد، از آن‌جایی که هر خانه دست‌کم ۲ خانه‌ی مجاور (ضلعی) دارد، پس فرهاد نمی‌تواند به طور یکتا خانه‌ی موردنظر علی‌رضا را مشخص کند. حال نشان می‌دهیم فرهاد می‌تواند با انتخاب ۲ خانه، به هدفش برسد. فرض کنید فرهاد دو خانه‌ی $(۱,۱)$ و $(۱,\mathrm{m})$ را انتخاب کند و علی‌رضا برای این دو خانه، به ترتیب پاسخ‌های p و q بدهد. اگر خانه‌ی موردنظر علی‌رضا (r,c) باشد، باید $r+c=p+۲$ و $c-r=q-(\mathrm{m}-۱)$ باشد. با حل دو معادله و دو مجهول بالا، r,c به طور یکتا دست می‌آید.

حال ثابت می‌کنیم تعداد روش‌های انتخاب ۲ خانه، طوری که فرهاد به هدفش برسد، ۴ است. اگر فرهاد دو خانه‌ی گوشه‌ای در طول یک ضلع را انتخاب کند، مانند روش بالا فرهاد می‌تواند به هدفش برسد. حال فرض کنید دو خانه به صورتی دیگر انتخاب شوند و این دو خانه، $(\mathrm{r}_۱,\mathrm{c}_۱),(\mathrm{r}_۲,\mathrm{c}_۲)$ باشند. ثابت می‌کنیم فرهاد نمی‌تواند به هدفش برسد. دو حالت داریم:

- فرض کنید این دو خانه، دو خانه در دو گوشه‌ی روبه‌روی جدول باشند. دو خانه‌ی مجاور $(\mathrm{r}_۱,\mathrm{c}_۱),(\mathrm{r}_۲,\mathrm{c}_۲)$ را در نظر بگیرید. اگر علی‌رضا یکی از این دو خانه را انتخاب کند، در هر صورت دنباله‌ی اعدادی که به فرهاد تحویل می‌دهد، یک‌سان است و فرهاد به هدفش نمی‌رسد.
- فرض کنید دست‌کم یکی از این دو خانه، در گوشه نباشند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $(\mathrm{r}_۱,\mathrm{c}_۱)$ در گوشه نباشد. پس حداقل ۳ خانه‌ی مجاور دارد. اگر فاصله‌ی دو خانه‌ی انتخابی فرهاد را d در نظر بگیریم، فاصله‌ی خانه‌ی $(\mathrm{r}_۲,\mathrm{c}_۲)$ تا ۳ خانه‌ی مذکور تنها می‌تواند $\mathrm{d}-۱$ یا $\mathrm{d}+۱$ باشد. فاصله‌ی این ۳ خانه‌ی مذکور تا $(\mathrm{r}_۱,\mathrm{c}_۱)$ نیز ۱ است. پس طبق اصل لانه کبوتر، حداقل دو تا از این خانه‌ها هستند که اگر علی‌رضا آن‌ها را انتخاب کند، دنباله‌ی اعداد یک‌سانی به فرهاد تحویل داده می‌شود و فرهاد به هدفش نمی‌رسد. پس در هر حالت جز ۴ حالت گفته شده، فرهاد نمی‌تواند به هدفش برسد و پاسخ برابر ۴ است.

زبان اعصاب! .... ۵۰ امتیاز

الف) کاملا مانند مثال جمع در متن سوال عمل می‌کنیم. اگر $y=۰$ باشد، $x\times y=۰$ و در غیر این صورت $x\times y=x\times(\mathrm{y}-۱)+\mathrm{x}$ است. پس اگر در عمل‌گر بازگشت، تابع f را برابر تابع z و تابع g را برابر $sum(\mathrm{x},\mathrm{mul}(\mathrm{x},\mathrm{y}-۱))$ قرار دهیم، پیاده‌سازی انجام می‌شود. به دست آوردن $x,mul(\mathrm{x},\mathrm{y}-۱)$ جهت دادن ورودی به تابع sum به راحتی توسط تابع P انجام می‌شود؛ زیرا هر دو مورد در ورودی‌های تابع g موجود هستند. پس داریم:

$$mul(x,y)=PR\left[z,CN\left[sum,\mathrm{P}_۱^۳,P_۲^۳\right]\right]$$

ب) داریم $x^۲+x+۲=x(\mathrm{x}+۱)+۲$. ابتدا $x\times(x+۱)$ را محاسبه می‌کنیم. برای ساختن $x\times(\mathrm{x}+۱)$ باید از تابع inc و برای ساختن $x(\mathrm{x}+۱)$ باید از تابع mul نوشته شده در قسمت قبل استفاده کنیم و آن‌ها را ترکیب کنیم. پس برای ساختن $x(\mathrm{x}+۱)$ کافی است تابع

$$tri(x)=CN\left[mul,P_۱^۱,inc\right]$$

را در نظر بگیریم. حال باید حاصل را با دو جمع کنیم. پس پاسخ برابر

$$\mathrm{f}(x)=CN\left[\mathrm{sum},\mathrm{tri},\mathrm{const}_۲\right]$$

ج) ابتدا تابعی مانند $sudoFact(x,y)=y!$ می‌نویسیم که $y=۰$ شود. از عمل‌گر بازگشت استفاده می‌کنیم. اگر $y=۰$ باشد، باید ۱ برگردانده شود؛ پس کافی است در عمل‌گر بازگشت، f را برابر $const_۱$ قرار دهیم که در متن سوال پیاده‌سازی شده است. اگر $y=۰$ نباشد، $sudiFact(\mathrm{x},\mathrm{y}')=\mathrm{y}'\times\mathrm{sudoFact}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ است. پس تابع g باید y' را در $sudoFact(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ضرب کند. پیاده‌سازی زیر برای g این کار را انجام می‌دهد:

$$g(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{sudoFact}(\mathrm{x},\mathrm{y}))=\mathrm{CN}\left[mul,P_۲^۳,CN\left[inc,P_۲^۳\right]\right]$$

پس تابع sudoFact را می‌توان به شکل زیر، پیاده‌سازی کرد:

$$sudoFact(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{PR}\left[cont_{۱}, CN\left[mul, P_{۳}^{۳}, CN\left[inc, P_{۲}^{۳}\right]\right]\right]$$

اکنون فقط کافی است تابع sudoFact را به تابعی با یک ورودی تبدیل کنیم که عمل‌گر $CN\left[sudoFact, P_{۱}^{۱}, P_{۱}^{۱}\right]$ این کار را برای ما انجام می‌دهد. پس تابع فاکتوریل را می‌توان به شکل زیر پیاده‌سازی کرد:

$$fact(\mathrm{n}) = \mathrm{CN}\left[sudoFact, P_{۱}^{۱}, P_{۱}^{۱}\right]$$

د) ابتدا تابع $dec(\mathrm{x})$ را تعریف می‌کنیم که با گرفتن x، عدد $x-۱$ را تحویل می‌دهد. البته در صورتی که $x=۰$ باشد، تابع باید عدد ۰ را تحویل دهد. این تابع به شکل زیر می‌تواند پیاده‌سازی شود:

$$dec(x) = CN\left[PR\left[z, P_{۲}^{۳}\right], P_{۱}^{۱}, P_{۱}^{۱}\right]$$

حال تابع $sub(\mathrm{x},\mathrm{y})$ را تعریف می‌کنیم که در آن اگر $x \leq y$ باشد، مقدار ۰ و در غیر این صورت مقدار $x-y$ باید برگردانده شود. با استفاده از تابع dec، تابع sub (تفریق) می‌تواند به شکل زیر پیاده‌سازی شود:

$$sub(x,y) = PR\left[P_{۱}^{۱}, CN\left[dec, P_{۳}^{۳}\right]\right]$$

حال تابع $sign(x)$ را تعریف می‌کنیم. اگر $x=۰$ باشد، این تابع عدد ۰ و در غیر این صورت $(\mathrm{x}>۰)$ ، این تابع باید عدد ۱ را برگرداند. این تابع به شکل زیر می‌تواند پیاده‌سازی شود:

$$sign(\mathrm{x}) = CN\left[sub.const_{۱}, CN\left[sub, const_{۱}, P_{۱}^{۱}\right]\right]$$

حال $\overline{sign}(x)$ را تعریف می‌کنیم که برعکس تابع sign عمل می‌کند؛ یعنی اگر $x=۰$ باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ را برمی‌گرداند. این تابع می‌تواند با استفاده از تابع sign به صورت زیر نوشته شود:

$$\overline{sign}(x) = CN\left[sub, const_{۱}, CN\left[sign, P_{۱}^{۱}\right]\right]$$

حال تابع خواسته شده (min) را پیاده‌سازی می‌کنیم. با تعریف‌های بالا، به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$\min(x,\mathrm{y}) = \mathrm{sign}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\times \mathrm{x} + \overline{sign}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\times \mathrm{y}$$

$sign(x-y)\times x$ را به صورت

$$case۱ = CN\left[mul, CN\left[sign, CN\left[sub, P_{۱}^{۲}, P_{۲}^{۲}\right]\right], P_{۱}^{۲}\right]$$

و $\overline{sign}(\mathrm{x}-\mathrm{y})\times \mathrm{y}$ را به صورت مشابه

$$case۲ = CN\left[mul, CN\left[\overline{sign}, CN\left[sub, P_{۱}^{۲}, P_{۲}^{۲}\right]\right], P_{۲}^{۲}\right]$$

پیاده‌سازی می‌کنیم. پس:

$$\min(x,y) = CN\left[sum, case۱, case۲\right]$$

توپ‌های بهروز .... ۳۵ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $n\times(\mathrm{b}-\mathrm{n}+۱)$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم در هر آرایش، حداقل این تعداد توپ داریم. هر نوع توپی که در نظر بگیرید، باید در حداقل $b-n+۱$ جعبه آمده باشد. برهان خلف می‌زنیم. فرض کنید این‌طور نباشد. یعنی یک نوع توپ وجود دارد که در حداقل n جعبه نیامده است. آن n جعبه را در نظر بگیرید. نمی‌توان از آن‌ها توپ‌هایی انتخاب کرد که تمام انواع توپ‌ها انتخاب شوند و با فرض مسئله به تناقض می‌رسیم. پس $s \geq n\times(\mathrm{b}-\mathrm{n}+۱)$ است.

حال ثابت می‌کنیم آرایشی با $n\times(\mathrm{b}-\mathrm{n}+۱)$ توپ وجود دارد. حکم را با استقرا روی b ثابت می‌کنیم. برای پایه، حالت $\mathrm{b}=\mathrm{n}$ را در نظر می‌گیریم. برای هر نوع توپ، یک جعبه‌ی جدا در نظر می‌گیریم و یک توپ از آن نوع در جعبه‌ی مذکور می‌گذاریم. به این ترتیب

آرایشی با $n \times (\mathrm{b}-\mathrm{n}+1)$ توپ ارائه می‌شود. حال فرض کنید حکم برای $\mathrm{b}=\mathrm{k}$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $b=k$ نیز برقرار است. یک جعبه را کنار می‌گذاریم و در k جعبه‌ی باقی‌مانده، آرایشی با $n \times (\mathrm{k}-\mathrm{n}+1)$ توپ، مطابق فرض استقرا ارائه می‌کنیم. حال در جعبه‌ی کنار گذاشته شده از هر نوع توپ، یکی می‌گذاریم. به این ترتیب یک آرایش مطلوب به دست می‌آید که $n \times (\mathrm{k}-\mathrm{n}+2)$ توپ دارد و حکم ثابت می‌شود.

بمب‌گذاری واس اوناس! .... ۶۵ امتیاز

الف) ثابت می‌کنیم پاسخ مسئله برابر با

$$\left\lfloor \max_{1} \leq i \leq_{k} \lg(\mathrm{a}_k+1) \right\rfloor$$

است.

ابتدا ثابت می‌کنیم، اگر شکل گراف شهرهای یک کشور، یک مسیر به ترتیب با شهرهای $v_1, v_2, \ldots, v_p$ باشد، حداقل $\lfloor \lg(p) \rfloor$ مرحله، لازم است. برای این کار، کافی است ثابت کنیم اگر $p \geq 2^q$ باشد، حداقل q مرحله، لازم است. از استقرای قوی روی p استفاده می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا، $p=1$ را در نظر می‌گیریم. داریم $p \geq 2^0$ و تعداد مراحل لازم برای انجام کار، ۰ است. فرض کنید حکم برای $< p$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای p نیز برقرار است. فرض کنید در مرحله‌ی ابتدایی، شهر v_i را انتخاب کنیم. اگر $i \leq 2^{q-1}$ باشد؛ ممکن است دستگاه شهر v_{i+1} را نشان دهد، متوجه می‌شویم بمب در یکی از شهرهای $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_p$ است و طبق فرض استقرا دست‌کم $q-1$ مرحله لازم است (زیرا $p-i \geq 2^{q-1}$). پس با یک مرحله‌ی ابتدایی، دست‌کم q مرحله لازم است و حکم ثابت می‌شود.
در حالتی که $i > 2^{q-1}$ نیز به طریق مشابه اثبات انجام می‌شود.
به روشی مشابه روند بالا، می‌توان به راحتی ثابت کرد برای یک مسیر p رأسی، $\lfloor \lg(\mathrm{p}) \rfloor$ مرحله کافی نیز هست (روش جست‌وجوی دودویی).
حال فرض کنید شکل گراف شهرهای یک کشور، به صورت یک دور به طور p باشد. هر رأسی در ابتدا انتخاب شود، نیمی از رأس‌ها حذف می‌شوند و تنها یک مسیر به طور $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ باقی می‌ماند. انتخاب هر شهر دیگر به جز این مسیر، اطلاعاتی در مورد شهر بمب‌گذاری شده به ما اضافه نمی‌کند و یک مسیر باقی می‌ماند. پس طبق قسمت قبل، برای یک دور به طول p، کمینه‌ی تعداد مراحل برابر $1+\left\lfloor \lg(\frac{p}{2}) \right\rfloor = \lfloor \lg(p) \rfloor$ است.
حال ثابت می‌کنیم علی‌رضا و فرهاد، دست‌کم به

$$\left\lfloor \max_{1\leq i\leq} \lg(\mathrm{a}_k+1) \right\rfloor$$

مرحله در کشور واس‌ماس نیاز دارند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $a_1 \geq a_2, a_3, \ldots, a_k$ باشد. فرض کنید بمب در یکی از شهرهای استان ۱ باشد و علی‌رضا و فرهاد این اطلاعات اضافه را از ابتدا بدانند. انتخاب هر شهر جز پایتخت و شهرهای استان ۱، پاسخ مشخصی دارد و اطلاعات جدیدی اضافه نمی‌کند. پس یک دور باقی می‌ماند و فرهاد و علی‌رضا طبق قسمت قبل حداقل به

$$\left\lfloor \lg(a_1+1) \right\rfloor = \left\lfloor \max_{1\leq i\leq k} \lg(\mathrm{a}_k+1) \right\rfloor$$

مرحله نیاز دارند.
پس فقط کافی است ثابت کنیم

$$\left\lfloor \max_{1\leq i\leq k} \lg(\mathrm{a}_k+1) \right\rfloor$$

مرحله برای پیدا کردن بمب کافی است. اگر فرهاد و علی‌رضا در ابتدا پایتخت را انتخاب کنند و پایتخت یکی از شهرهای استان i را به آن‌ها نشان بدهد (بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید شهر شماره ۱ از این استان)، آن‌گاه بمب در یکی از شهرهای $1, 2, \ldots, \mathrm{a}_{\left\lfloor \frac{a_i+1}{2} \right\rfloor}$

است و طبق قسمت‌های گفته شده می‌توان با حداکثر $\left\lceil \max_{1\leq i\leq k} \lg(\frac{a_k+1}{2}) \right\rceil$ مرحله بمب را پیدا کرد. با احتساب یک مرحله‌ی اولیه، می‌توان نتیجه گرفت با حداکثر

$$\left\lceil \max_{1\leq i\leq k} \lg(a_k+1) \right\rceil$$

می‌توان بمب را پیدا کرد.

ب) ثابت می‌کنیم پاسخ برابر r است.

ابتدا ثابت می‌کنیم r مرحله برای پیدا کردن بمب، کافی است. آن شهری که کم‌ترین عدد نسبت داده شده را دارد، در ابتدا انتخاب می‌کنیم. سپس در هر مرحله همان شهری را انتخاب می‌کنیم که دستگاه به ما نشان می‌دهد. به این ترتیب پس از حداکثر r مرحله، شهر بمب‌گذاری شده پیدا می‌شود (توجه کنید اگر r- امین مرحله انجام شد و هنوز بمب پیدا نشده بود، بمب حتما در شهر بعدی است و نیازی به چک کردن آن نیست).

حال ثابت می‌کنیم نقشه‌ای با کمینه‌ی عدد r وجود دارد که حداقل r مرحله نیاز دارد. یک درخت دودویی کامل با ارتفاع r در نظر بگیرید.
با استقرا روی r ثابت می‌کنیم برای پیدا کردن بمب، حداقل r مرحله لازم است. برای پایه‌ی استقرا $r=0$ (درخت تک‌رأسی) را در نظر می‌گیریم و حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $r-1$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای r نیز برقرار است.
- اگر در ابتدا ریشه‌ی درخت انتخاب شود، زیردرختی که بمب در آن است، مشخص می‌شود. انتخاب هر شهر از زیردرخت دیگر در ادامه، اطلاعاتی اضافه نمی‌کند؛ زیرا پاسخ آن مشخص است. پس طبق فرض استقرا در ادامه حداقل به $r-1$ مرحله نیاز داریم و حکم ثابت می‌شود.
- اما اگر در ابتدا ریشه را انتخاب نکنیم، ممکن است بمب در زیردرخت دیگر باشد. فرض کنید علاوه بر این که بمب، یک شهر را نشان می‌دهد، پس از این انتخاب، این اطلاعات اضافی نیز به علی‌رضا و فرهاد داده شود که بمب در زیردرخت دیگر است. پس انتخاب هر شهر جز زیردرخت دیگر، اطلاعاتی به آن دو اضافه نمی‌کند و پاسخ آن مشخص است. پس طبق فرض استقرا باز هم در ادامه نیاز به حداقل $r-1$ مرحله داریم و حکم ثابت می‌شود.

پس ثابت کردیم گرافی داریم که در آن حداقل r مرحله لازم است.

پس پاسخ برابر r است.

ج) در هر مرحله، مجموعه‌ی تمام رأس‌هایی که ممکن است بمب در آن‌ها باشد را S در نظر می‌گیریم. واضح است که در ابتدا S مجموعه‌ی تمام شهرهاست. در هر مرحله، آن شهری از S را در نظر می‌گیریم که مجموع فواصلش از دیگر شهرهای درون S، کمینه باشد. این رأس را $v(S)$ می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم با پاسخی که دستگاه به ما می‌دهد، می‌توانیم نتیجه بگیریم حداقل نیمی از شهرهای S، نمی‌توانند بمب داشته باشند. به این ترتیب در هر مرحله S حداقل نصف می‌شود و حکم ثابت خواهد شد.

برهان خلف می‌زنیم. فرض کنید یکی از شهرهای مجاور $v(S)$ مانند u انتخاب شود و تعداد شهرهای نامزد برای بمب داشتن، بیش از نصف S بماند. پس u به ازای بیش از $\frac{|S|}{2}$ شهر، فاصله‌ی کم‌تری از آن شهرها نسبت به $v(S)$ دارد و فاصله‌ی دیگر شهرهای S نیز از u، حداکثر یکی بیش‌تر از فاصله‌ی‌شان از $v(S)$ است. پس مجموع فواصل u از بقیه‌ی شهرهای S در این مرحله کم‌تر بوده است و به تناقض می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.