جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
بیست و سومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۲۴۰	۵	۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

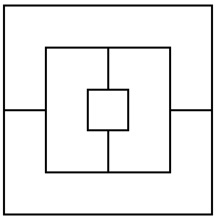
تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۲۰ سوال تستی و ۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

- سوال‌های **۱۳** تا **۲۰** در چند دسته‌ی سوالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سوال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سوال ٤ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

۱- در شکل روبرو تصویری هوایی از ۵ ساختمان شهر اتوپیا را می‌بینید که خطوط در آن نشان دهنده‌ی اختلاف ارتفاع ساختمان‌ها است. در واقع هر ناحیه‌ی بسته یـــک ساختمان را نشان می‌دهد که ارتفاعش عددی طبیعی بین ۱ تا ٤ است و با هیچ یک از ساختمان‌های مجاورش هم‌ارتفاع نیست. ارتفاع ساختمان‌های این شهر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟



الف) ۳٦ ب) ٤٨ ج) ۱٤٤ د) ۹٦ هـ) ۲٤

۲- عدد صحیح k، مرید عدد طبیعی n است اگر جایگشتی از اعداد ۱ تا د مانند $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ داشته باشیم که در آن به ازای هر $1 \le i \le n$، $|a_i - i|$ مساوی با k شود. اگر قدرت یک عدد مساوی با بزرگترین مرید آن باشد، جمع قدرت اعداد ۱ تا ۲۰ چند است؟

الف) ۸۰ ب) ٦۰ ج) ۱۰۰ د) ٦٤ هـ) ۵۵

۳- گرافی ۱۰۰ راسی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بین بعضی از رئوس آن یال قرار دهیم به طوری که بین هر دو راس حداکثر یک یال باشد و اگر راس‌ها را به هر روشی به دو بخش افراز کنیم، در حداقل یکی از بخش‌ها دور وجود داشته باشد. حداقل چند یال لازم داریم؟

الف) ۲۰ ب) ۱۰ ج) ۱٦ د) ۲۲ هـ) ٦

۴- خیکول و هرکول روی یک جدول $2 \times n$ به نوبت بازی می‌کنند. در ابتدا خانه‌های جدول خالی است. هر کس در نوبت خود دو خانه‌ی مجاور را که قبلا هیچ‌کدام خط نخورده‌اند، خط می‌زند و کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است. دو خانه مجاور هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با فرض اینکه خیکول شروع کننده‌ی بازی است، به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{3,5,8,13,21,32,34,64\}$، خیکول می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود؟

الف) ۸ ب) ٤ ج) ۵ د) ٦ هـ) ۷

۵- یک جدول 6×2 داریم که اعداد ۱ تا ۱۲ در خانه‌های آن نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم ٤ خانه را که تشکیل یک مربع 2×2 می‌دهند انتخاب کنیم و مثل شکل «الف» خانه‌های قطری را با هم جابه‌جا کنیم. هدف این است که بعد از چند مرحله اعداد جدول را مثل شکل «ب» مرتب کنیم. به ازای چند حالت قرارگیری اعداد در جدول اولیه این کار امکان‌پذیر است؟

a	b
c	d

d	c
b	a

شکل «الف»

۱	۲	۳	٤	۵	٦
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

شکل «ب»

الف) $\binom{12}{6}$ ب) $6!^2$ ج) $12!$ د) 2^5 هـ) $6!$

۶- خیکوله یک گراف ساده‌ی ٤ راسی کشیده است و راس‌های آن را با اعداد ۱ تا ٤ شماره‌گذاری کرده است. او از نازخیکول می‌خواهد با پرسیدن تعدادی پرسش گرافش را حدس بزند. پرسش‌هایی که نازخیکول می‌پرسد بـــه این شکل است که «بین راس‌های x و y و z در مجموع چند یال وجود دارد؟».
به ازای چندتا از گراف‌هایی که خیکوله می‌تواند بکشد، نازخیکول با پرسیدن تعداد دلخواهی از این پرسش‌ها می‌تواند آن را حدس بزند؟ دقت کنید که راس‌ها شماره دارند و بنابراین خیکوله ٦٤ گراف مختلف می‌تواند بکشد.

الف) ٤٤ ب) ٤٦ ج) ٤٨ د) ٤۰ هـ) ٤۲

۷- دارا و سارا اعداد ۱ تا ۵ را روی تخته نوشته‌اند. آنها به نوبت بازی می‌کنند و هر کس در نوبت خود یکی از دو عمل زیر را انجام می‌دهد:

- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و حاصل آن‌ها را روی تخته می‌نویسد.
- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و قدر مطلق تفاضل آن‌ها را روی تخته می‌نویسد.

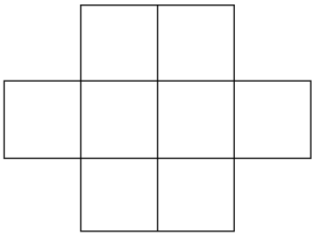
سارا می‌خواهد عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند بیشینه شود و دارا می‌خواهد این عدد کمینه شود. با فرض اینکه سازا بازی را شروع می‌کند و هر دوی آنها به بهترین شکل ممکن بازی می‌کنند، عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند چند است؟

الف) ۱۱ ب) ۹ ج) ۷ د) ۵ هـ) ۳

۸- قورباغه می‌خواهد از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از ۷ نقطه‌ی مشخص شده برود. با فرض اینکه او در هر مرحله می‌تواند k واحد $(1 \le k \le 6)$ به سمت بالا یا به سمت راست بپرد، به چند طریق می‌تواند به نقاط مشخص شده برسد؟
برای مثال یک مسیر دیگر این است که ابتدا ۳ واحد به سمت راست بپرد، سپس ۳ واحد دیگر به سمت راست بپرد.

الف) $\frac{14!}{7! \times 7!}$ ب) 2×3^5 ج) 2^{14} د) $\frac{14!}{6! \times 6!}$ هـ) $\frac{12!}{2 \times 6! \times 6!}$

۹- می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را درون خانه‌های جدولی به شکل روبرو بچینیم به طوری که اختلاف هر دو عدد مجاور بیش از یک باشد. دو خانه مجاور هستند اگر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند. برای مثال خانه‌های وسط جدول با ٦ خانه مجاور هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟



الف) ۲ ب) ۱۲ ج) ٤ د) ۸ هـ) ۱٦

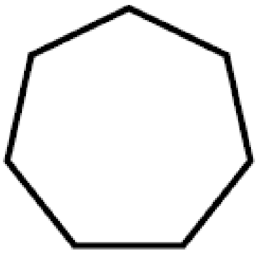
۱۰- یک جدول 5×5 زیباست اگر شرایط زیر را داشته باشد:

۱. در هر خانه‌ی آن عددی صحیح بین ۱ تا ۵ نوشته شده باشد (خود ۱ و ۵ می‌تواند باشد).
۲. عدد نوشته شده در حداقل یکی از خانه‌ها برابر ۵ باشد.
۳. عدد هر خانه از عدد خانه‌ی بالایی و راستی‌اش (در صورت وجود) کمتر نباشد.
٤. به ازای هر خانه مثل x حداقل یکی از دو عبارت زیر درست باشد:
- عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد سطری است که x در آن قرار دارد.
- عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد ستونی است که x در آن قرار دارد.

چند جدول زیبای 5×5 داریم؟

الف) ۱ ب) $5!^2$ ج) $\binom{8}{2}^2$ د) 5^8 هـ) $\binom{9}{4}^2$

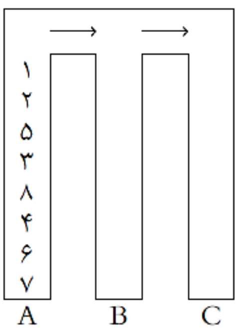
۱۱- خیز یک نوع میز است که ۷ پایه دارد و پایه‌های آن به صورت یک ۷ ضلعی منتظم در محیطاش قرار گرفته‌اند. اگر بدانیم بر اثر زلزله هر پایه‌ی خیز مستقل از بقیه پایه‌ها به احتمال ۰.۵ می‌شکنند، احتمال افتادن خیز بر اثر زلزله چقدر است؟ خیز در صورتی می‌افتد که خطی گذرنده از مرکز آن وجود داشته باشد، به طوری که همه‌ی پایه‌های سالم یک طرف آن خط باشند. به عنوان مثال اگر فقط یک پایه‌ی خیر بشکند، نمی‌افتد.



الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{71}{128}$ ج) $\frac{50}{128}$ د) $\frac{57}{128}$ هـ) $\frac{78}{128}$

۱۲- در پارکینگ خیکول‌آباد ۸ ماشین که با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند، مطابق شکل در راهروی A قرار دارند. در هر مرحله یا بالاترین ماشین راهروی A وارد یکی از راهروهای B یا C می‌شوند، یا بالاترین ماشین راهروی B وارد راهروی C می‌شود.

فرض کنید در انتها تمام ماشین‌ها در ستون C باشند. در این صورت تعداد جفت اعداد متوالی در ستون C که حاصل جمع‌شان مضرب ۳ است حداکثر چند است؟



الف) ۳ ب) ۵ ج) ۷ د) ٦ هـ) ٤

سوال‌های ۱۳ تا ۲۰ در چند دسته‌ی سوالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.

یک جایگشت nتایی را «دانا» می‌نامیم، هرگاه به ازای هر i، عددی که در جای iام نوشته شده است به اضافه‌ی شماره‌ی جایگاهی که عدد i در آن نوشته شده است، برابر با $n+1$ باشد. برای مثال جایگشت $\langle ۳,۱,۴,۲ \rangle$ یک جایگشت ٤تایی داناست، اما جایگشت $\langle ۴,۳,۲,۱ \rangle$ دانا نیست.

-------------------------- با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید --------------------------

۱۳- به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{۲۰۱۰, ۲۰۱۱, ۲۰۱۲, ۲۰۱۳, ۲۰۱۴\}$، جایگشت nتایی دانا وجود دارد؟

الف) ۲ ب) ٤ ج) ۱ د) ۵ هـ) ۳

۱۴- چند جایگشت دانای ۲۱ تایی وجود دارد؟

الف) $\frac{۱۰!}{۵! \times ۲^{۱۰}}$ ب) ۰ ج) $\frac{۱۰!}{۵! \times ۲^{۵}}$ د) $۱۰!$ هـ) $\frac{۱۰!}{۵!}$

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. عدد x را از ورودی بگیر.
۲. y را برابر صفر قرار بده. s را برابر یک قرار بده.
۳. b را برابر با <u>باقیمانده</u> تقسیم x بر ۲ قرار بده.
٤. مقدار $s \times b$ را به y اضافه کن.
۵. x را برابر $\left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor$ قرار بده.
٦. اگر x بزرگتر از صفر بود، s را برابر $-s$ قرار بده و به سطر سه برو.
۷. پایان

-------------------------- با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید --------------------------

۱۵- به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y برابر صفر خواهد بود؟

الف) $\binom{۶}{۳}$ ب) $\binom{۱۰}{۵}$ ج) $۳^{۵}$ د) ۳۰۰ هـ) $۲^{۸}$

۱۶- به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y مضرب سه خواهد بود؟

الف) $3^{5} \times 2$ ب) $\binom{8}{4}$ ج) ۳۴۲ د) ۲۴۳ هـ) $2^{7} \times 3$

خالپشت‌ها، موجوداتی قابل برنامه‌ریزی هستند که در جدول‌های $n \times n$ زندگی می‌کنند. در بعضی خانه‌های این جدول‌ها دیوار وجود دارد و عبور از آن‌ها ممکن نیست.

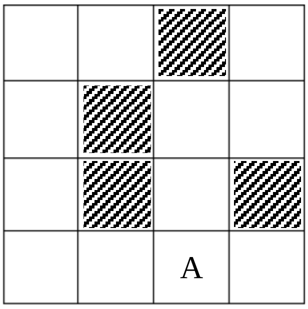
خالپشت‌ها دنباله‌ای از دستورها را دریافت می‌کنند و آنها را به ترتیب اجرا می‌کنند. دستورها می‌توانند از چهار نوع زیر باشند:

- بالا: خالپشت به خانه‌ی بالایی خود می‌رود.
- پایین: خالپشت به خانه‌ی پایینی خود می‌رود.
- چپ: خالپشت به خانه‌ی چپی خود می‌رود.
- راست: خالپشت به خانه‌ی راستی خود می‌رود.

در صورتی که اجرای یک دستور، خالپشت را به خارج از جدول یا به خانه‌ای که در آن دیوار است ببرد، خالپشت دستور را اجرای نمی‌کند و به سراغ دستور بعدی می‌رود.

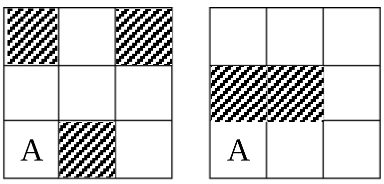
------------------------ با توجه به توضیحات بالا به ٤ سوال زیر پاسخ دهید ------------------------

۱۷- خیکوله خالپشتی پیدا کرده است که در یک جدول 4×4 به شکل روبرو زندگی می‌کند. خالپشت در خانه‌ی A قرار دارد و خانه‌ای هاشور خورده، خانه‌هایی هستند که در آنها دیوار است. خیکوله می‌خواهد دنباله‌ای با کمترین تعداد دستور به خالپشت بدهد که بعد از اجرای آن خالپشت از همه‌ی خانه‌های جدول حداقل یکبار عبور کرده باشد. تعداد دستورات این دنباله چند است؟



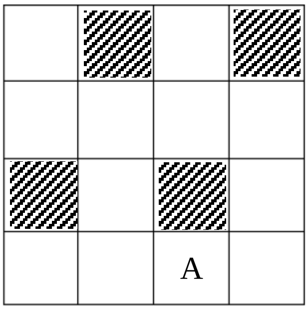
الف) ۱۲ ب) ۱۸ ج) ۱۶ د) ۱۰ هـ) ۱٤

۱۸- نازخیکول به خیکوله دو جدول ۳×۳ به شکل روبرو می‌دهد که در هر کدام یک خالپشت در خانه‌ی A وجـــود دارد. نازخیکول از خیکوله می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، از همه‌ی خانه‌های جدول خود حداقل یکبار عبور کنند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟



الف) ۱۱ ب) ۷ ج) ۱۲ د) ۹ هـ) ۱۳

۱۹- حالا خیکوله یک جدول ٤×٤ به شکل روبرو می‌دهد و او می‌گوید که در این جدول دو خالپشت وجود دارد اما جای خالپشت‌ها را به نازخیکول نمی‌گوید. خیکوله از نازخیکول نمی‌گوید. خیکوله از نازیکول می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، مستقل از اینکه در ابتدا در کجای نقشه بوده‌اند، در انتها هر دو در یک خانه قرار داشته باشند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟



الف) ۵ ب) ۸ ج) ۹ د) ٦ هـ) ۷

۲۰- نازخیکول یک خالپشت را در یک جدول ۴ × ۴ مخفی کرده است و از خیکوله می‌خواهد جای آن را پیدا کند. برای این کار خیکوله می‌تواند در هر مرحله یک مربع ۲×۲ را مشخص کند و از نازخیکول بپرسد که «آیا خالپشت در این مربع ۲×۲ قرار دارد؟». با فرض اینکه خالپشت جای خود را در جدول عوض نمی‌کند، در بدترین حالت خیکوله چند سوال باید بپرسد تا بتواند جای خالپشت را تشخیص دهد؟

الف) ۸ ب) ۵ ج) ۷ د) ٤ هـ) ٦

۱- رشته نزدیک **(۱۵ نمره)**

۱۳۹۲ رشته به طول ۱۳۹۲ از حروف کوچک انگلیسی با نام‌های $p_1, p_2, \ldots, p_{1392}$ در اختیار داریم.

فاصله دو رشته $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $B = b_1, b_2, \ldots b_n$ را با $d(A,B)$ نمایش می‌دهیم و این مقدار برابر است با تعداد اندیس‌های i که $a_i \neq b_i$. به عنوان مثال فاصله دو رشته salam و palas برابر با ۲ است زیرا تنها در مکان‌های اول و آخر با هم تفاوت دارند.

برای رشته X به طول ۱۳۹۲ مجموع فاصله‌هایش از این ۱۳۹۲ رشته را D_X می‌نامیم. به رشته‌ای مانند M به طول ۱۳۹۲، **نزدیک** می‌گوییم اگر به ازای هر رشته X به طول ۱۳۹۲:

$$D_M \leq D_X$$

الف) به ازای هر سه رشته هم طول دلخواه A, B, C نشان دهید $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. (۵ نمره)

ب) نشان دهید رشته‌ای مانند p_i از این ۱۳۹۲ رشته وجود دارد به طوری که $D_M \leq D_{pi} \leq 2D_M$. (۱۰ نمره)

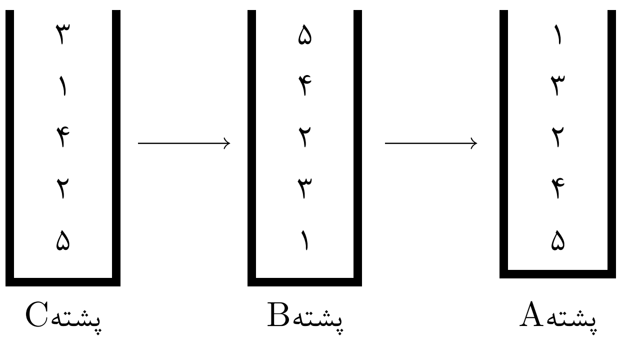
۲- مرتب‌ساز پشته‌ای **(۱۵ نمره)**

مرتب‌ساز پشته‌ای یک مرتب‌ساز با دو پشته است. در ابتدا در پشته اول که آن را پشته A می‌نامیم اعداد ۱ تا n با ترتیبی دلخواه قرار دارند و پشته دوم با نام B خالی است. این مرتب‌ساز قادر است عملیات زیر را انجام دهد:

– در هر مرحله دو عدد بالای پشته A را در نظر می‌گیرد و عدد کوچکتر را به پشته B انتقال می‌دهد و این کار را آنقدر تکرار می‌کند که در پشته A تنها یک عنصر باقی بماند و آن را نیز به پشته B منتقل می‌کند. سپس اعداد پشته B را به پشته A انتقال می‌دهد (توجه کنید که چون A و B پشته هستند ترتیب عناصر برعکس می‌شود).

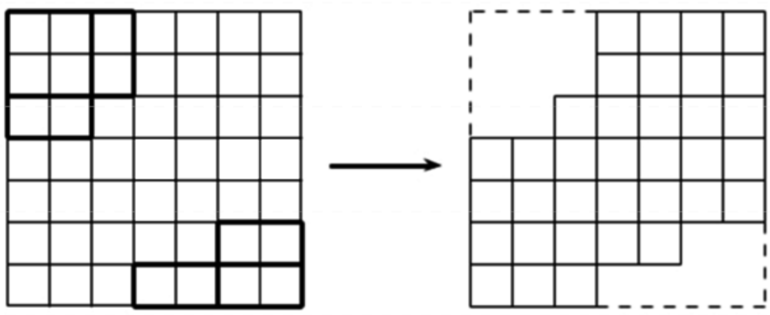
اگر مرتب‌ساز پشته‌ای عملیات فوق را $1 \leq k \leq n$ بار انجام دهد به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا n درون A، در نهایت اعداد بصورت مرتب شده در پشته A قرار خواهند گرفت (عدد ۱ در بالای پشته و عدد n در پایین پشته). جواب را برحسب n و k محاسبه و اثبات کنید.

بعنوان مثال در شکل زیر وضعیت پشته A بعد از یک بار انجام عملیات نمایش داده شده است. در این شکل سه گام مشخص شده است که به ترتیب عبارتند از: وضعیت اولیه پشت A، نحوه قرار گرفتن اعداد در پشته B، وضعیت اعداد در پشته A بعد از عملیات.



۳- شکلات تخت (**۱۵ نمره**)

حامد و امیرمهدی یک شکلات تخت به صورت جدولی $n \times n$ در اختیار دارند. آنها می‌خواهند در حین خوردن شکلات یک بازی نیز با هم انجام دهند. بازی به این صورت است:
حامد از گوشه بالا چپ و امیرمهدی از گوشه پایین راست بازی را شروع می‌کند و به نوبت بازی می‌کنند. اولین حرکت را حامد انجام می‌دهد. هر کس در نوبت خودش باید تکه‌ای مستطیلی (که شامل گوشه خودش باشد) را گاز بزند و حتما باید یک خانه از شکلات را بخورد (در واقع نمی‌تواند مستطیلی را انتخاب کند که همه خانه‌هایش در نوبت‌های قبلی خورده شده باشند). کسی که آخرین تکه از شکلات را بخورد بازنده است. نشان دهید امیرمهدی همیشه می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.
در شکل زیر حالتی نشان داده شده است که حامد و امیرمهدی هر کدام دو نوبت بازی می‌کنند و در نوبت‌هایشان مستطیل‌های پررنگ را می‌خورند. شکل سمت راست شکلات باقی‌مانده پس از این حرکات را نشان می‌دهد.



۴- کارت‌های همانی (**۲۵ نمره**)

سعید ۱۳۹۲ کارت با رنگ‌های متمایز ۱ تا ۱۳۹۲ دارد و می‌خواهد با نوید یک بازی انجام دهد. در این بازی سعید کارت‌ها را دوبار دسته‌بندی می‌کند. او در هر بار دسته‌بندی کارت‌ها را به ۹۹ دسته تقسیم می‌کند به طوری که در هر دسته حداقل یک کارت قرار گیرد. سعید بعد از اینکه دسته‌بندی اول را انجام می‌دهد، دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری می‌کند و پشت هر کارت شماره دسته‌اش را می‌نویسد و سپس برای بار دوم کارت‌ها را دسته‌بندی می‌کند. سعید به نوید قول می‌دهد که در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارتی که در دسته‌بندی اول در یک دسته بوده‌اند دوباره در یک دسته قرار نگیرند. بعد از اینکه سعید دسته‌بندی دوم را انجام داد دسته‌ها را به نوید می‌دهد و نوید باید دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری کند و شماره دسته را در طرف دیگر کارت بنویسد. نوید به دنبال بیشینه کردن تعداد کارت‌هایی است که اعداد دو طرفشان با هم برابر باشد و این کارت‌ها را کارت‌های همانی می‌نامد.

الف) نشان دهید سعید هر طور کارت‌ها را دسته‌بندی کند نوید می‌تواند حداقل ۱۵ کارت همانی درست کند. (**۱۵ نمره**)

ب) نشان دهید سعید می‌تواند طوری کارت‌ها را دسته‌بندی کند که نوید نتواند بیشتر از ۱۵ کارت همانی درست کند.(**۱۰ نمره**)

۵- ماخ کار گروهی (**۳۰ نمره**)

آقای امینی معلم کلاسی شامل nk دانش‌آموز می‌باشد. در این کلاس تعدادی رابطه دوستی بین دانش‌آموزان برقرار است (رابطه دوستی دوطرفه است، یعنی اگر دانش‌آموز a با دانش‌آموز b دوست باشد، دانش‌آموز b هم با a دوست هست). آقای امینی به کارهای گروهی خیلی علاقه‌مند هست. او می‌خواهد دانش‌آموزان را به n گروه k نفری تقسیم کند. اما برای او مهم است که افراد یک گروه همه با هم دوست باشند. ما می‌دانیم حداقل یک راه برای دسته‌بندی دانش‌آموزان با شرایط گفته شده وجود دارد. دانش‌آموزان که از این امر مطلع شده‌اند به دنبال این هستند که دسته‌بندی معلم را از قبل پیش‌بینی کنند.

الف) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی برابر با $\binom{k}{۲}n^۲$ باشد، حالتی از روابط دوستی وجود دارد که دسته‌بندی معلم به صورت یکتا مشخص شود. (**۱۵ نمره**)

ب) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی بیشتر از $\binom{k}{۲}n^۲$ باشد، هیچ حالتی نیست که دسته‌بندی بصورت یکتا انجام پذیرد. (**۱۵ نمره**)

کلید سوالات

۱	ب	۲۱		۴۱	
۲	هـ	۲۲		۴۲	
۳	ب	۲۳		۴۳	
۴	ب	۲۴		۴۴	
۵	هـ	۲۵		۴۵	
۶	ب	۲۶		۴۶	
۷	ج	۲۷		۴۷	
۸	ب	۲۸		۴۸	
۹	ج	۲۹		۴۹	
۱۰	ج	۳۰		۵۰	
۱۱	د	۳۱		۵۱	
۱۲	د	۳۲		۵۲	
۱۳	الف	۳۳		۵۳	
۱۴	هـ	۳۴		۵۴	
۱۵	ب	۳۵		۵۵	
۱۶	ج	۳۶		۵۶	
۱۷	ج	۳۷		۵۷	
۱۸	د	۳۸		۵۸	
۱۹	د	۳۹		۵۹	
۲۰	ب	۴۰		۶۰	

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

۱- سوال اول– رشته نزدیک

الف) کافی است توجه کنیم که اگر دو رشته A و C در جایگاه i ام با هم اختلاف داشته باشند حداقل یکی از دو جفت (A,B) یا (B,C) در جایگاه i ام با هم اختلاف دارند. در نتیجه هر اختلافی که در $d(A,C)$ شمرده می‌شود حداقل در یکی از $d(A,B)$ یا $d(B,C)$ نیز شمرده می‌شود که حکم مسئله را نتیجه می‌دهد.

ب) p_j را نزدیکترین رشته به رشته M در بین ۱۳۹۲ رشته در نظر می‌گیریم و D_{pj} را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{pj}=\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(p_i,p_j)\leq \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(p_i,M)+d(M,p_j)=D_M+\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M,p_j) \quad (۱)$$

اما با توجه به نحوه انتخاب p_j به ازای هر i می‌دانیم $d(M,p_j)\leq d(M,p_i)$ و از این موضوع نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M,p_j)\leq \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M,p_i)=D_M \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) خواهیم داشت $D_{pj}\leq ۲D_M$.

۲- مرتب‌ساز پشته‌ای

مشاهده ۱. تبدیل مساله‌ی پشته به مساله‌ی آرایه

عملیات گفته شده مانند این است که یک آرایه از اعداد $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ داشته باشیم. سپس از دو عنصر اول آرایه یعنی $a_۱$ و $a_۲$ شروع کنیم و آن دو را با هم مقایسه کنیم. اگر $a_۱$ بزرگتر بود جای آن دو را با هم عوض کنیم. سپس به سراغ دو عنصر بعدی برویم و همین‌طور تا آخرین دو عنصر آرایه، این کار را انجام دهیم. هدف این است که در انتها آرایه مرتب شود. یعنی:

$$a_۱ <= a_۲ <= \ldots <= a_n$$

نکته خارج از راه‌حل: در واقع این عملیات، بخشی از مرتب‌سازی حبابی است. در مرتب‌سازی حبابی با n بار انجام این عملیات مطمئن می‌شویم که آرایه مرتب شده است.

با توجه به مشاهده ۱ کافی است ببینیم که به ازای چه آرایه‌هایی از اعداد ۱ تا n، با k بار انجام دادن عملیات بالا، در انتها به یک آرایه‌ی مرتب شده می‌رسیم.

لم ۱. اگر در آرایه‌ی A با عناصر $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ که جایگشتی از اعداد ۱ تا n هستند، شرط زیر برقرار باشد، با k بار انجام دادن عملیات مذکور در مشاهده ۱، دنباله مرتب می‌شود و در غیر این صورت دنباله در انتها نامرتب خواهد بود:

- به ازای هر $۱\leq i\leq n$، تعداد اعدادی که بیشتر از a_i هستند و در آرایه قبل از آن قرار دارند، حداکثر k باشد.

اثبات. در ابتدا نشان می‌دهیم در صورتی که شرط گفته شده برقرار نباشد، در انتها جایگشت مرتب شده نخواهد بود. فرض کنید قبل از a_i بیشتر از k عدد باشند که از آن بیشتر هستند. در هر بار اجرای عملیات بالا، حداکثر یکی از این اعداد از a_i رد می‌شود و بعد از آن قرار می‌گیرد. بنابراین در انتها حداقل یکی از آنها قبل از a_i باقی می‌ماند و بنابراین جایگشت مرتب نمی‌شود.

حال نشان می‌دهیم در صورتی که شرط گفته شده برقرار باشد، در انتها دنباله مرتب می‌شود. این فرض را با استقرا روی n نشان می‌دهیم.

حالت پایه: وقتی است که $n=۱$ که مرتب است.

گام استقرا:

عدد ۱ را در دنباله در نظر بگیرید. با توجه به شرط لم، حداکثر k عدد دیگر قبل از عدد یک قرار دارند. از طرفی چون عدد یک، کوچکترین عدد دنباله است، در هر مرحله جایگاه‌اش یک واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند تا وقتی که به سمت چپ‌ترین نقطه برسد. بنابراین بعد از k مرحله، عدد یک در جایگاه درست قرار می‌گیرد.

حال اگر عدد یک را در نظر نگیریم، بقیه‌ی اعداد مستقلا باید شرط لم را داشته باشند (چون عدد یک کوچکترین عدد است). از طرفی جایگاه عدد یک در ترتیب مقایسه‌ی این اعداد تاثیری ندارد. بنابراین طبق فرض استقرا اگر روی آنها k مرحله عملیات گفته شده را انجام دهیم مرتب می‌شوند. بنابراین بعد از k مرحله کل دنباله مرتب خواهد شد.

قضیه. تعداد جایگشت‌هایی که با k بار انجام عملیات گفته شده $(k \le n)$ قابل مرتب شدن هستند، برابر است با $k!*(k+۱)^{n-k}$.

اثبات.

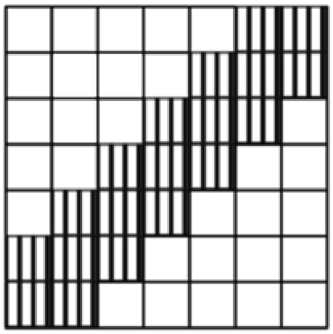
اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم:

پایه: $n=k$. در این صورت با توجه به لم ۱ همه‌ی جایگشت‌ها قابل مرتب شدن هستند.

گام استقرا: برای اینکه دنباله مرتب شود باید شرط لم ۱ را داشته باشد. از طرفی با حذف عدد یک از دنباله، دنباله‌ای که باقی می‌ماند، مستقل از عدد یک باید همچنان شرط لم ۱ را داشته باشد. بنابراین بدون در نظر گرفتن عدد یک، $n-۱$ عدد داریم که طبق فرض استقرا $k!*(k+۱)^{n-۱-k}$ جایگشت از آنها قابل مرتب شدن هستند. حال به ازای هر جایگشت، برای اینکه شرط لم ۱ برقرار بماند، دقیقا $k+۱$ حالت برای اضافه کردن عدد یک وجود دارد. پس در کل $k!*(k+۱)^{n-k}$ جایگشت قابل مرتب شدن هستند.

۳- ماخ مشکلات تخت

شکل زیر را در نظر بگیرید:



در واقع قطر فرعی به همراه دو قطر پایینی و بالایی آن هاشور خورده‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم نفر دوم همیشه می‌تواند طوری عمل کند که شکل نسبت به قطر فرعی قرینه باشد و هیچ یک از مربع‌های قسمت هاشور خورده، خورده نشده باشند. توجه

کنید که در صورتی که بازی به جدولی به اندازه ۱ یا ۲ با خاصیت فوق برسد براحتی می‌توان نشان داد که نفر دوم می‌تواند برنده شود (چرا؟).

فرض کنید یک جدول قرینه نسبت به قطر فرعی که خانه‌های هاشور خورده آن سالم است به نفر اول می‌رسد (در اول کار این شرط برقرار است). در این صورت برای حرکت نفر اول دو حالت وجود دارد:

۱- هیچ یک از خانه‌های هاشور خورده، خورده نمی‌شوند.

۲- مستطیل خورده شده توسط نفر اول شامل حداقل یک خانه‌ی هاشور خورده می‌باشد.

در حالت اول نفر دوم می‌تواند قرینه حرکت نفر اول را نسبت به قطر فرعی انجام دهد (چرا؟)

در حالت دوم یا کل جدول خورده شده است یا نفر دوم می‌تواند یک جدول کوچکتر با شرایط گفته شده ایجاد کند (چرا؟).

همانطور که می‌دانیم در هر حرکت حداقل یک خانه خورده می‌شود در نتیجه تعداد خانه‌های باقی‌مانده در حال کم شدن است و حتما در جایی یا نفر اول کل شکلات را می‌خورد یا به یک شکلات ۲×۲ یا ۱×۱ می‌رسد.

۴- ماخ کارت‌های همانی

قسمت الف)

راه‌حل اول-

نوید می‌تواند به !۹۹ حالت دسته‌بندی سعید را شماره‌گذاری کند. نشان می‌دهیم حتما در یکی از این !۹۹ حالت شماره‌گذاری، ۱۵ کارت همانی وجود دارد. دسته‌ها را در دسته‌بندی دوم به ترتیب $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۹۹}$ نام‌گذاری می‌کنیم.

جدولی با !۹۹ سطر و ۹۹ ستون در نظر بگیرید. ستون i ام این جدول را نماینده دسته A_i و سطر j ام این جدول را نماینده حالت j ام شماره‌گذاری دسته‌ها توسط نوید در نظر بگیرید. در خانه تقاطع سطر j ام و ستون i ام این جدول، تعداد کارت‌های همانی که در دسته A_i در ترتیب j ام وجود دارد را یادداشت می‌کنیم.

حال مجموع اعداد جدول را به صورت ستون به ستون محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم ستون j ام معرف دسته A_j است. ادعا می‌کنیم مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $|A_j|$ *!۹۸. یک کارت خاص موجود در دسته A_j را در نظر بگیرید و آن را x بنامید. x در صورتی همانی است که شماره دسته‌اش در شماره‌گذاری نوید نیز برابر با j باشد. پس آن دسته‌ای که حاوی تیله x است (در ترتیب نوید) باید شماره‌اش j شود و بقیه ۹۸ دسته می‌توانند هر شماره دلخواهی پیدا کنند. پس x در !۹۸ شماره‌گذاری مختلف همانی است. با توجه به این استدلال واضح است که مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $|A_j|$ *!۹۸. پس مجموع اعداد جدول برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{۹۹} |Ai| \times ۹۸! = ۹۸! \times \sum_{i=۱}^{۹۹} |A_i| = ۹۸! \times ۱۳۹۲$$

از طرفی چون این جدول !۹۹ سطر دارد، طبق اصل لانه کبوتر، سطری با مجموع $۱۵ = \left\lceil \frac{۹۸! \times ۱۳۹۲}{۹۹!} \right\rceil$ وجود خواهد داشت.

اما همانطور که در ابتدا گفتیم، هر سطر نشان‌دهنده‌ی یک روش شماره‌گذاری توسط نوید بود. این یعنی نوید می‌تواند طوری دسته‌هایش را شماره‌گذاری کند که حداقل ۱۵ کارت همانی وجود داشته باشد و حکم ثابت شد.

توجه: در این راه از اینکه در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارت هم‌دسته در دسته‌بندی اول هم‌دسته نیستند استفاده نشده است.

راه‌حل دوم–

این مسئله را می‌توان با گراف و مسئله تطابق مدل کرد. از روی دسته‌بندی‌های سعید می‌توان یک گراف دوبخشی ساخت. در این گراف دوبخشی هر بخش متناظر با یکی از دسته‌بندی‌ها خواهد بود و در هر بخش ۹۹ راس متناظر با ۹۹ دسته‌ی دسته‌بندی وجود دارد. حال بین هر دو راسی که دسته‌های متناظر آنها شامل یک کارت مشترک است یک یال می‌گذاریم.

مشاهده ۱. این گراف یال چندگانه ندارد (چرا؟).

مشاهده ۲. در هر شیوه شماره‌گذاری کارت‌های همانی معادل یک تطابق در گراف دوبخشی هستند (چرا؟).

قضیه. در گراف فوق تطابق بیشینه حداقل ۱۵ یال دارد.

اثبات. یک راه برای اثبات این قضیه اثبات از طریق برهان خلف می‌باشد.

راه‌حل سوم–

در این روش از شیوه احتمالاتی[۱] استفاده شده است، که انتظار نمی‌رود دانش‌آموزان از این روش مسئله را حل کنند، لیکن برای آشنایی علاقه‌مندان این روش نیز بیان می‌گردد.

اگر یک شماره‌گذاری تصادفی را در نظر بگیریم احتمال اینکه یک کارت، کارت همانی باشد برابر با $\frac{۱}{۹۹}$ خواهد بود. حال اگر X را متغیر تصادفی تعداد کارت‌های همانی در یک شماره‌گذاری بنامیم. می‌دانیم:

$$X = X_{۱} + X_{۲} + \cdots + X_{۱۳۹۲}$$

که X_i متغیر تصادفی شاخص همانی بودن کارت i ام خواهد بود و می‌دانیم امید ریاضی X_i برابر است با:

$$E[X_i] = \Pr[X_i = ۱] = \frac{۱}{۹۹}$$

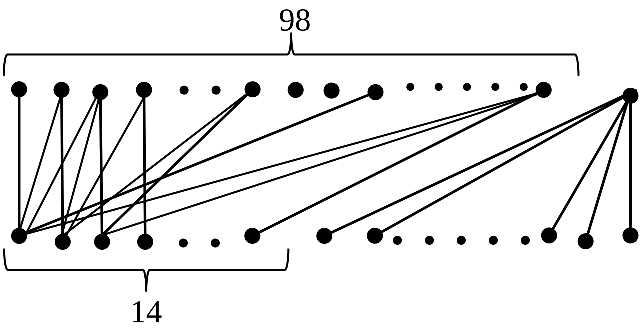
و اما برای امید ریاضی X خواهیم داشت:

$$E[X_i] = \Pr[X_i = ۱] = \frac{۱}{۹۹}$$

اما با توجه به اینکه همیشه حالتی وجود دارد که $X \geq E\left[X\right]$ و اینکه مقدار X عدد صحیح می‌باشد پس شماره‌گذاری وجود دارد که در آن X یعنی تعداد کارت‌های همانی بیشتر از ۱۴ باشد.

قسمت ب)

از راه‌حل دوم قسمت الف استفاده می‌کنیم و یک گراف دوبخشی به شکل زیر می‌سازیم.



---

[۱] Probabilistic Method

در گراف نشان داده شده ۹۵ راس از بخش پایین به یک راس از بخش بالا وصل شده‌اند و بقیه یال‌ها بین دسته ۱۴ تایی و ۹۸ تایی قرار می‌گیرد. می‌دانیم که می‌توانیم $۱۳۸۶ = ۱۴ * ۹۹$ یال از نوع دوم داشته باشیم که بیشتر از نیاز ما نیز می‌باشد. اما در این گراف تطابق بیشینه حداکثر برابر با ۱۵ خواهد بود و با توجه به قسمت الف می‌دانیم این مقدار دقیقا برابر ۱۵ می‌باشد.

۵- کار گروهی

قسمت اول

گراف روابط دوستی دانش‌آموزان را در نظر می‌گیریم. در واقع مسئله از ما خواسته است تا اثبات کنیم گرافی با nk راسی با $\binom{k}{۲}n^۲$ یال وجود دارد که افراز آن به خوشه‌های k راسی یکتا مشخص شود. برای اثبات این حکم از استقرا روی n استفاده می‌کنیم.

پایه: حکم برای $n = ۱$ برقرار است چرا که $\binom{k}{۲}$ یال دقیقا یک خوشه را تشکیل می‌دهند.

فرض می‌کنیم برای کلاسی با nk دانش‌آموز چنین حالتی وجود داشته باشد.

کلاسی با $(n+۱)k$ نفر را در نظر بگیرید. ابتدا k نفر از کلاس حذف و برای nk نفر باقی‌مانده تعداد $\binom{k}{۲}n^۲$ رابطه‌ی دوستی در نظر می‌گیریم. حال k نفر را به nk نفر بر می‌گردانیم. برای این که شرایط مساله برقرار باشد لازم است $\binom{k}{۲}((n+۱)^۲ - n^۲) = \binom{k}{۲}(۲n+۱) = \binom{k}{۲} + (k-۱) * (nk)$ رابطه‌ی دوستی به روابط دوستی اضافه کنیم. به $\binom{k}{۲}$ رابطه دوستی که برای گروه کردن k دانش‌آموز نیاز داریم. پس $(k-۱) * (nk)$ رابطه‌ی دوستی باقی می‌ماند که آنها را باید به شکلی نسبت دهیم. با کمی دقت در میابیم که کافی است از شکل همین عبارت این ایده به ذهن می‌رسد که از آن k نفر، یک نفر را کنار گذاشته‌ایم و بقیه را با تمام nk نفر دوست کرده‌ایم. حال ادعا می‌کنیم که با این ساختار گروه‌بندی یکتا است (چرا؟).

قسمت دوم

طبق آنچه در صورت سوال آمده، تعداد روابط دوستی حداقل $\binom{k}{۲}n^۲ + ۱$ می‌باشد و حداقل یک گروه‌بندی وجود دارد. روابط دوستی غیر از رابطه‌ی هم گروه‌ها در این گروه‌بندی را در نظر بگیرید. تعداد این رابطه‌ها حداقل برابر است با $\binom{k}{۲}n^۲ + ۱ - n\binom{k}{۲} = \binom{k}{۲}n(n-۱) + ۱$.

اما تعداد زوج گروه‌ها برابر با $\binom{n}{۲}$ است و $\binom{k}{۲}n(n-۱) + ۱$ رابطه دوستی بین این $\binom{n}{۲}$ زوج گروه قرار دارد. پس طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک زوج گروه وجود دارد که تعداد روابط دوستی بین اعضای آن بیشتر از یا مساوی با:

$$\left\lceil \frac{\binom{k}{2} n(n-1)+1}{\binom{n}{2}} \right\rceil = k*(k-1)+1$$

باشد. از سوی دیگر کل روابط دوستی بین اعضای این دو گروه با یکدیگر حداکثر $k*k$ تا بوده و حالا تنها $k-1$ رابطه‌ی دوستی از کل این رابطه‌ها را نداریم. پس در هر گروه عضوی هست که با تمامی اعضای گروه دیگر دوست باشد و در نتیجه با عوض کردن جای این دو نفر می‌توان یک گروه‌بندی جدید ایجاد کرد. با توجه به آنچه گفته شد در صورتیکه تعداد یال‌ها بیشتر از $\binom{k}{2}n^2$ باشد و حداقل یک گروه‌بندی وجود داشته باشد، نمی‌توان گروه‌بندی را بصورت یکتا مشخص کرد.