جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات
مرحله دوم (روز اول)
بیست ودومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۴	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- ماشین عجیب (**۲۰ نمره**)

سعید دارای ماشین عجیبی است که دارای ۱۰۰۰ خانه حافظه می‌باشد. به هر خانه حافظه یک بیت گفته می‌شود و بیت i ام را با $M[i]$ نشان می‌دهیم. هر بیت حافظه یکی از دو مقدار ۰ و ۱ را در خود ذخیره می‌کند. متاسفانه مقادیر ذخیره شده در حافظه ماشین قابل رویت نیست. تنها می‌دانیم اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۸۰۱ تا ۹۰۰ برابر ۰ و اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۹۰۱ تا ۱۰۰۰ برابر ۱ هستند.

این ماشین عجیب تنها توانایی اجرای دستورات زیر را دارد:

- $M[i]=M[i_1]\wedge M[i_2]...\wedge M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که اعداد ذخیره شده در بیت‌های i_iام، i_2ام و . . . و i_kام برابر ۱ باشند مقدار $M[i]$ یک و در غیر این صورت صفر خواهد شد.
- $M[i]=M[i_1]\vee M[i_2]...\vee M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که اعداد ذخیره شده در بیت‌های i_iام، i_2ام و . . . و i_kام برابر ۰ باشند مقدار $M[i]$ صفر و در غیر این صورت یک خواهد شد.
- $M[i]=M[i_1]\oplus M[i_2]...\oplus M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که تعداد یک‌های ذخیره شده در بیت‌های i_i ام، i_2ام و . . . و i_kام فرد باشد مقدار $M[i]$ یک و در غیر این صورت صفر خواهد شد.

در واقع این سه دستور به ترتیب and، or و xor منطقی می‌باشند. بدیهی است که بلافاصله بعد از این که سعید به دستگاه دستور می‌دهد، دستگاه دستور را اجرا می‌کند. توجه کنید اندیس‌های $i,i_1,...,i_k$ حداقل ۱ و حداکثر ۱۰۰۰ می‌باشند و k نیز حداقل ۱ و حداکثر ۱۰۰۰ می‌باشد.

در کنار دستورات فوق، این ماشین عجیب به سوال زیر هم پاسخ می‌دهد.

- آیا هنوز اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۸۰۱ ام تا ۹۰۰ ام برابر با ۰ و اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۹۰۱ ام تا ۱۰۰۰ ام برابر با ۱ است؟

جواب ماشین به این سوال بله یا خیر خواهد بود.

سعید می‌خواهد در مورد عدد $x=8\times M[1]+4\times M[2]+2\times M[3]+M[4]$ اطلاعاتی کسب کند. او دوست دارد این اطلاعات را با اجرای کمترین تعداد دستور و تنها یک بار سوال پرسیدن کسب کند. به او کمک کنید تا اطلاعات زیر را بدست آورد.

توجه: در هر قسمت ابتدا دستورات خود را نوشته و سپس آن را در چند سطر توضیح دهید. در هر قسمت باید از کمترین تعداد دستور ممکن استفاده کنید، اما نیازی به اثبات کمینه بودن تعداد دستورات نیست. دقت کنید در هر قسمت فقط یک بار می‌توانید سوال بپرسید.

الف) آیا x بزرگتر از ۵ است؟

ب) آیا x توانی از ۲ است؟ (دقت کنید که ۱ توانی از ۲ است).

پ) آیا x بر ۳ بخش‌پذیر است؟

-۲ ماخ بازی (**۲۵ نمره**)

به یک جدول $n \times n$ یک مربع لاتین می‌گوییم، هرگاه در هر یک از خانه‌های آن یکی از اعداد $۱,۲,...,n$ نوشته شده باشد و در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری نداشته باشیم. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰ است. !n نفر روی یک مربع لاتین $n \times n$ دلخواه شروع به بازی می‌کنند. هر کس در نوبت خود می‌تواند جای دو سطر و یا دو ستون از جدول را با هم عوض کند. اولین کسی که حرکتی انجام بدهد که یک مربع لاتین تکراری ایجاد شود بازنده‌ی بازی است و بقیه افراد برنده می‌شوند. ثابت کنید $n!-۱$ نفر اول می‌توانند با هم تبانی کنند تا نفر !n ام (آخرین نفری که حرکت اولش را انجام می‌دهد) بازنده شود.

-۳ ماخ تکرار رشته‌ها (**۲۵ نمره**)

فرض کنید $w_۱,...,w_n$ رشته‌هایی متمایز با حروف انگلیسی کوچک باشند که مجموع طول آن‌ها از Q تجاوز نمی‌کند. W را نیز یک رشته انگلیسی دلخواه با طول Q در نظر بگیرید.

عدد ؟؟؟ (که $i=۱,...,n$ است) را برابر تعداد ظاهرشدن رشته w_i در W تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال، اگر $w_۱ = ab$, $w_۲ = aca$, $w_۳ = bb$ و $W = abcabbb$ باشند، آنگاه $a_۱ = ۲$, $a_۲ = ۰$ و $a_۳ = ۲$ خواهد بود.

ثابت کنید:

$$\min(a_۱, a_۲, ..., a_n) \leq \frac{۲ \times Q \times \sqrt{Q}}{n}$$

-۴ ماخ رنگ‌آمیزی بازه‌ها (**۳۰ نمره**)

فرض کنید $[x_۱, y_۱], [x_۲, y_۲], ..., [x_n, y_n]$ ، n بازه روی محور اعداد حقیقی باشند. می‌خواهیم این بازه‌ها را با تعدادی رنگ که هر رنگ با یک عدد طبیعی شناخته می‌شود، رنگ‌آمیزی کنیم.

در یک رنگ‌آمیزی، $f\ \ x$ را برابر بزرگترین رنگ بازه‌ها بین بازه‌هایی که شامل نقطه‌ی x می‌شوند، تعریف می‌کنیم. بدیهی است که $f\ \ x$ فقط برای نقاطی که حداقل درون یک بازه قرار دارند تعریف می‌شود. به یک رنگ‌آمیزی زیبا می‌گوییم، اگر برای هر نقطه مثل x روی محور اعداد حقیقی که حداقل درون یک بازه قرار دارد، دقیقا یک بازه با رنگ $f\ \ x$ شامل نقطه‌ی x شود.

ما در ابتدا همه‌ی بازه‌ها را در اختیار نداریم و بازه‌ها یکی یکی در اختیار ما قرار می‌گیرند. به محض آنکه یک بازه را دریافت کردیم باید یک رنگ به آن اختصاص دهیم و مجاز به تغییر آن در آینده نیستیم. از روش زیر برای رنگ‌آمیزی بازه‌ها استفاده می‌کنیم:

فرض کنید بازه v را دریافت کرده باشیم. رنگ‌های $۱,۲,۳,...$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ امتحان می‌کنیم تا به اولین رنگی برسیم که اگر آن رنگ را به بازه‌ی v اختصاص بدهیم، رنگ‌آمیزی زیبا بماند. (با توجه به محدود بودن تعداد بازه‌ها، چنین

رنگی حتما وجود دارد.) بازه‌ی v را با آن رنگ، رنگ می‌کنیم و به سراغ بازه‌ی بعد می‌رویم و تا آخرین بازه همین روند را انجام می‌دهیم.

الف) فرض کنید i امین بازه‌ای که دریافت می‌کنیم $[x_i, y_i]$ باشد و در ضمن بدانیم $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$ و $y_۱ < y_۲ < \cdots < y_n$. نشان دهید بعد از دریافت n بازه، تعداد رنگ‌های استفاده شده، از $\log_۲ n + ۱$ تجاوز نمی‌کند.

ب) با فرض آنکه بازه‌ها دلخواه باشند و با یک ترتیب دلخواه بازه‌ها را دریافت کنیم، نشان دهید بعد از دریافت n بازه، تعداد رنگ‌های استفاده شده، از $\sqrt[۳]{n}$ تجاوز نمی‌کند.