



## دفترچه سؤالات

### مرحله دوم

### نوزدهمین دوره ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله های تشریحی	سؤالات چند گزینه ای
۳۲۰	۸	-

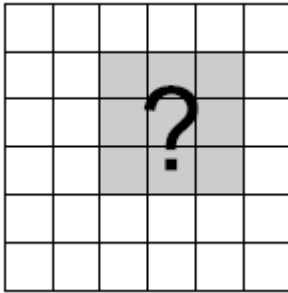
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

#### تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

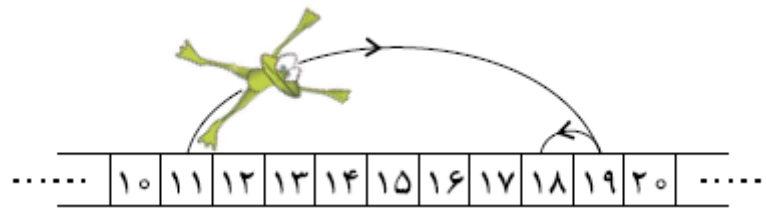
- این آزمون شامل ۸ مسأله ی تشریحی و وقت آن ۳۲۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می توانند دفترچه ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط کمیته ی اجرایی ماخ انجام شده است.



احمد یک زیرجدول  $3 \times 3$  از جدول  $6 \times 6$  مقابل را انتخاب کرده است. علی قصد دارد با تعدادی پرسش محل این مربع را کشف کند. او در هر نوبت می‌تواند به یکی از خانه‌های جدول اشاره کند و از احمد بپرسد که آیا این خانه در مربع موردنظر او قرار دارد یا خیر. کمترین تعداد پرسش‌های لازم برای آن‌که علی بتواند مکان مربع احمد را کشف کند چند تا است؟ برای اثبات ادعای خود، باید یک روش ارائه دهید و نیز نشان دهید با کمتر از این تعداد سوال نمی‌توان همیشه به جواب رسید.

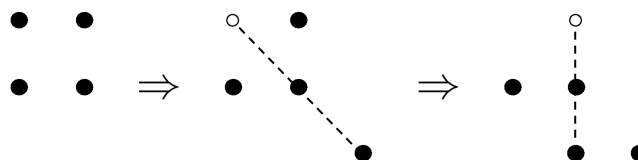
-۲ ماه قورباغی پهلوان (۲۵ نمره)

یک قورباغی پهلوان روی محور اعداد صحیح قرار گرفته است. او در هر جهش می‌تواند به اندازه‌ی توانی از ۲ به چپ یا راست بپرد. به عنوان مثال او می‌تواند با دو جهش از ۱۱ به ۱۸ برسد: ابتدا با یک جهش از ۱۱ به ۱۹ و در جهش بعدی از ۱۹ به ۱۸ می‌پرد. نشان دهید دو عدد صحیح  $a, b$  وجود دارند که او نمی‌تواند با کم‌تر از ۱۰۰ جهش از  $a$  به  $b$  برسد.

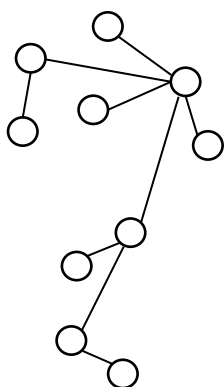


-۳ ماه چهار ملخ جهنده (۲۵ نمره)

چهار ملخ در چهار راس یک مربع بر روی صفحه قرار گرفته‌اند. هر بار یکی از ملخ‌ها با یک جهش از روی ملخ دیگری می‌پرد و در نقطه‌ی مقابل (قرینه‌ی مکان قبلی خود نسبت به مکان ملخ دیگر) فرود می‌آید. آیا ممکن است بعد از مدتی ملخ‌ها روی چهار راس یک مربع بزرگتر قرار بگیرند؟ (مربع بزرگتر ممکن است دوران یافته باشد).

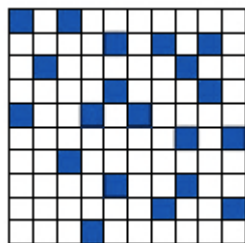


#### ۴- ماگ درخت رنگارنگ (۲۵ نمره)



منظور از «درخت» تعدادی دایره است که با پاره‌خط‌هایی به هم متصل شده‌اند طوری که پاره‌خط‌ها همدیگر را قطع نمی‌کنند و بین هر دو دایره دقیقاً یک مسیر از طریق پاره‌خط‌های واصل وجود دارد. مریم و مینا بازی «رنگ‌آمیزی» زیر را بر روی یک درخت دل‌خواه انجام می‌دهند: با شروع از مریم، هر کس در نوبت خود یکی از دایره‌هایی که هنوز رنگ نشده را با یکی از ۶ رنگ قرمز، آبی، سبز، زرد، بنفش یا نارنجی رنگ می‌کند ولی باید رنگی که انتخاب می‌کند با رنگ هیچ‌کدام از دایره‌هایی که با یک پاره‌خط به این دایره متصل هستند و تاکنون رنگ شده‌اند یکی نباشد. مینا می‌خواهد بازی را به بن‌بست بکشد یعنی وضعیتی ایجاد کند که هنوز دایره‌ی رنگ نشده‌ای وجود داشته باشد ولی حرکت دیگری ممکن نباشد. نشان دهید مریم می‌تواند با یک روش بازی خوب، مینا را ناکام بگذارد!

#### ۵- رنگ‌آمیزی پراکنده (۲۵ نمره)



یک رنگ‌آمیزی از خانه‌های یک جدول با دو رنگ سیاه و سفید را «پراکنده» می‌گوییم اگر هیچ دو خانه سیاه در یک ضلع مشترک نباشند. نشان دهید تعداد رنگ‌آمیزی‌های پراکنده‌ی جدول  $10 \times 10$  از  $10^5$  بیشتر و از  $10^{25}$  کمتر است.

#### ۶- سطل‌ها و توپ‌ها (۲۵ نمره)

۱۰۰ سطل در یک ردیف کنار هم قرار گرفته‌اند و ۵۰ توپ درون آن‌ها پخش شده است. هر بار یکی از سطل‌ها را انتخاب می‌کنیم و اگر  $k$  توپ درون آن بود آن‌ها را خارج کرده و بین  $k$  سطل دل‌خواه دیگر توزیع می‌کنیم طوری که به هر سطل یک توپ اضافه شود. نشان دهید در هر ۲۰ حرکت متوالی ناچاریم دست‌کم یک بار به سراغ سطلی با کمتر از ۱۰ توپ برویم.



#### ۷- ساختمان روشنایی (۲۵ نمره)

ساختمان روشنایی تعداد زیادی چراغ و کلید دارد. هر کلید به بعضی از چراغ‌ها متصل است و با زدن آن وضعیت همه‌ی آن چراغ‌ها تغییر می‌کند (یعنی اگر خاموش بودند روشن و اگر روشن بودند خاموش می‌شوند). در ضمن میدانیم که هر چراغ دست‌کم به یک کلید متصل است. نشان دهید اگر در ابتدا همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند می‌توان با زدن بعضی از کلیدها به حالتی رسید که بیش از نیمی از چراغ‌ها روشن باشند.

مرتضی  $n$  کارت و کیان ۱ کارت دارند که روی هر یک از آن‌ها یک رشته از صفر و یک به طول  $l$  نوشته شده است. در بین کارت‌های مرتضی، دست‌کم یک کارت وجود دارد که رشته‌ی آن با رشته‌ی نوشته شده روی کارت کیان کمتر از  $d$  رقم اختلاف دارد. منظور از اختلاف دو رشته، تعداد رقم‌های متفاوت در آن‌ها است، مثلاً اختلاف دو رشته‌ی  $۰۰۱۱۱۱$  و  $۱۰۱۱۰۱$  برابر ۲ است زیرا در اولین و پنجمین رقم (از سمت چپ) تفاوت دارند. هدف مرتضی این است که با تعداد کمی پرسش، کارتی را پیدا کند که اختلاف رشته‌ی آن با رشته‌ی کارت کیان کمتر از  $d$  رقم باشد.

هر بار مرتضی یک عدد  $i$  انتخاب می‌کند و کیان رقم  $i$  ام رشته‌ی خود را به او می‌گوید. ثابت کنید مرتضی می‌تواند با کمتر از  $nd$  پرسش کارت موردنظرش را پیدا کند.