



دخترچه سوالات
مرحله دوم (دوم دبیرستان)
هفدهمین دوره المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۶

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مسأله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۲۴۰	۸	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

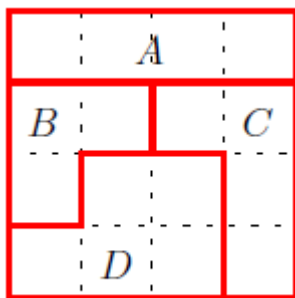
- این آزمون شامل ۸ مسأله‌ی تشریحی و وقت آن ۲۴۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط کمیته‌ی اجرایی ماخ انجام شده است.

۱- خانه‌های دورنگی (۲۰ نمره)

یک جدول $n \times n$ از اعداد ۱، ۲، تا $n \dots$ داده شده است. در هیچ سطر یا ستونی از این جدول عدد تکراری یافت نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، در هر سطر یا ستون تمام اعداد ۱، ۲، تا $n \dots$ وجود دارند.

اگر x یک عدد اعشاری باشد، $|x|$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x است. با این تعریف، ثابت کنید که می‌توان $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ تا از خانه‌های این جدول را انتخاب نمود که هیچ زوج از خانه‌های انتخاب شده در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند و به ازای هر عدد n حداکثر دو تا از این خانه‌ها شامل عدد i باشند.

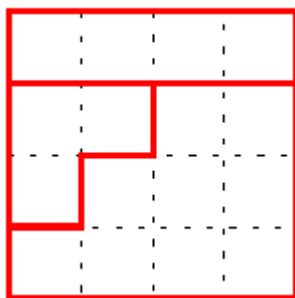
۲- برش نواحی (۲۵ نمره)



یک جدول $n \times n$ در اختیار داریم. در ابتدا جدول از n^2 ناحیه تشکیل شده است (n^2 مربع ۱). در هر مرحله می‌توانیم تمام دو ناحیه‌ی مجاور (یعنی دو ناحیه که لااقل یک پاره‌خط مشترک دارند) را از جدول انتخاب کنیم و این دو ناحیه را با هم ادغام کنیم؛ یعنی مرز مشترک بین این دو ناحیه را پاک کنیم. فرض کنید طول این مرز مشترک در مرحله i ام a_i است. اگر بعد از k مرحله، تنها یک ناحیه باقی بماند (یعنی یک مربع $n \times n$)، اعداد a_1, \dots, a_k به دست می‌آیند. برای مثال، در شکل سمت چپ بالا اگر نواحی C و D را بخواهیم با هم ادغام کنیم، محیط مشترک بین این دو ناحیه ۳ واحد بوده و نهایتاً به شکل پایین می‌رسیم.

(الف) روشی ارائه دهید که در آن هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد. (۱۰ نمره)

(ب) نشان دهید کمترین مقدار $\sum_{i=1}^k a_i^2$ وقتی رخ می‌دهد که هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد و با استفاده از این نکته جواب مسئله، یعنی کمترین مقدار $\sum_{i=1}^k a_i^2$ را بدست آورید. (۱۵ نمره)



۳- عمو نقاش (۲۵ نمره)

دیوار خانه‌ی عمو نقاش به صورت یک جدول $n \times n$ می‌باشد. عمو نقاش برای این که مصداق ضرب‌المثل «کوزه‌گر از کوزه شکسته آب می‌خورد» نشود، می‌خواهد دیوار خانه‌اش را رنگ‌آمیزی کند. برای این کار عمو هر بار قلم‌موی خودش را درون یک سطل رنگ متفاوت با رنگ‌های قبلی که تا به حال استفاده کرده، می‌کند و قلم‌موی رنگی را روی یک سطر یا یک ستون جدول به‌طور کامل می‌کشد.

عمو نقاش می‌خواهد هر کسی به خانه‌شان می‌آید، هنرش را بفهمد. به همین خاطر او می‌خواهد طوری دیوار را رنگ‌آمیزی کند که تعداد رنگ‌هایی که روی دیوار دیده می‌شود، بیش‌ترین باشد.

شما به عمو نقاش کمک کنید؛ به این معنی که اولاً، برای هر عدد n ، یک روش رنگ‌آمیزی ارائه دهید که در آن با بیش‌ترین تعداد رنگ دیوار رنگ‌آمیزی شود و ثانیاً، ثابت کنید این مقدار بیشینه است.

ایستگاه راه‌آهن شهر المپیادی‌ها n سالن انتظار دارد و در هر سالن یک تلویزیون برنامه پخش می‌کند. می‌دانیم صداوسیما کشور المپیادی‌ها دارای n شبکه تلویزیونی است. در اولین روز سال ۱۳۸۷ در تلویزیون هر سالن انتظار، یکی از این شبکه‌ها پخش می‌شود، به طوری که هر یک از n شبکه بر روی دقیقاً یکی از این n تلویزیون دیده می‌شود. می‌دانیم راه‌آهن ترتیب پخش شبکه‌ها روی این n تلویزیون را به ترتیب خاصی در پایان هر روز تغییر می‌دهد.

یک تعریف: یک ترتیب نوشتن اعداد $1 \dots n$ تا در یک ردیف را یک جای‌گشت از این اعداد گوئیم. مثلاً $(3, 1, 2, 5, 4)$ (از چپ به راست) یک جای‌گشت از اعداد 1 تا 5 است و 2 عدد سوم این جای‌گشت است.

راه‌آهن یک جای‌گشت سری به نام π از اعداد 1 تا n دارد که ما از آن بی‌اطلاعیم. البته می‌دانیم که به ازای هر i ، اگر تلویزیونی در یک روز شبکه i را نشان دهد، در روز بعد حتماً شبکه‌ی شماره‌ی π_i (یعنی عدد i ام از جای‌گشت π) را نشان خواهد داد.

متأسفانه ما در هر روز مجازیم تنها یکی از سالن‌های انتظار (و در نتیجه فقط تلویزیون آن سالن) را به انتخاب خود ببینیم و به این ترتیب شماره‌ی شبکه‌ای که در آن پخش می‌شود را متوجه شویم.

روشی برای انتخاب سالن انتظار در هر روز و دیدن تلویزیون آن ارائه کنید تا به کمک آن در حداکثر $2n$ روز به جای‌گشت π دست پیدا کنیم و در نتیجه روند تغییر پخش شبکه‌ها در تلویزیون‌ها را بفهمیم.

علی کوچولو در تصورات خود، کشوری به نام «آتوپیا» دارد. کشور او دارای n شهر است، متنها بین شهرهای اتوپیا، هیچ راه ارتباطی‌ای وجود ندارد. برای برقراری ارتباط بین این شهرها، علی کوچولو می‌خواهد تعدادی جاده بین برخی از شهرهای کشورش بکشد. ولی از آنجایی که او به اصول و فنون راه‌سازی آشنایی ندارد، به سراغ کتاب «اصول و فنون راه‌سازی» می‌رود. در این کتاب آمده است:

"اگر می‌خواهید بین m شهر تعدادی جاده دوطرفه بکشید، به طوری که بتوان از هر شهر، به هر شهر دیگر رفت، باید حداقل 1 جاده بین این شهرها کشیده شود. دقت کنید که هر جاده بین دقیقاً دو شهر کشیده می‌شود و از شهر A می‌توان به شهر

B رفت اگر و فقط اگر بتوان با شروع از شهر A و با حرکت روی تعدادی از جاده‌ها به شهر B رسید."

علی کوچولو برای سر و سامان دادن به اوضاع کشور، دو هدف زیر را دنبال می‌کند.

(۱) بین تعدادی از شهرهای اتوپیا، جاده‌ی دو طرفه بکشد به طوری که بتوان از هر شهر آن به هر شهر دیگر رفت.

(۲) تعدادی مرکز پلیس، در برخی از شهرهای کشورش (در هر شهر، حداکثر یک مرکز پلیس) تأسیس کند. به یک کشور « d حفاظت‌شده» گفته می‌شود، اگر برای رفتن از هر مرکز پلیس به یک مرکز پلیس «دیگر» مجبور به طی کردن حداقل d جاده باشیم. قهرمان داستان ما می‌خواهد مراکز پلیس اتوپیا را طوری تأسیس کند که کشورش d حفاظت‌شده باشد.

بیش‌ترین تعداد مراکز پلیس که باید تأسیس شود (برحسب n و d) چه قدر باید باشد تا علی کوچولو به دو هدف گفته شده برسد؟ در واقع باید طوری جاده‌ها ساخته و مراکز پلیس را تأسیس شوند که به اهداف بالا برسید و بیش‌ترین تعداد مراکز پلیس را داشته باشید.

در هر صورت، لازم است گفته‌ی خود را اثبات کنید.

یک زبان از n کلمه تشکیل شده است و هر کلمه از تعدادی حرف. مجموعه‌ی حروف ما $\{a, b, \dots, z\}$ است و هر کدام از این حروف برای خود وزنی دارند. وزن حرف a برابر c_1 ، وزن حرف b برابر c_2 و به همین ترتیب، وزن حرف z برابر c_z است. وزن هر کلمه هم برابر جمع وزن‌های حروف آن کلمه است و وزن یک زبان برابر جمع وزن‌های کلمات آن زبان. به عنوان مثال اگر c_1, c_2, c_3 به ترتیب برابر با ۱، ۲ و ۳ باشند. وزن زبان $\{acb, abba\}$ برابر است با $12 = (1+2+3) + (1+2+2+1)$.

یک کلمه «پیشوند» یک کلمه‌ی دیگر است اگر و فقط اگر در ابتدای آن ظاهر شده باشد. مثلاً $abzd$ پیشوند $abzdsdf$ است. به همین شکل، یک کلمه «پسونده» یک کلمه‌ی دیگر است اگر و فقط اگر در انتهای آن ظاهر شده باشد. مثلاً sjf پسوند $hgszjf$ است.

یک زبان را «پیشوند-آزاد» می‌گوییم اگر و فقط اگر هیچ کلمه‌ای در آن پیشوند دیگری نباشد، و یک زبان را «پسونده-آزاد» می‌گوییم اگر و فقط اگر هیچ کلمه‌ای در آن پسوند دیگری نباشد.

فرض کنید وزن کم‌وزن‌ترین زبان n کلمه‌ای پیشوند-آزاد برابر X است. ثابت کنید که وزن کم‌وزن‌ترین زبان n کلمه‌ای که هم پیشوند-آزاد باشد و هم پسوند-آزاد حداکثر $2X$ است.

n زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی از مجموعه‌ی اعداد $\{1, 2, \dots, n\}$ داده شده است. ثابت کنید می‌توان $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ تا از اعداد مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ را رنگ کرد به‌طوری‌که هیچ‌کدام از n زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی ما پیدا نشود که هر سه عضو رنگ شده باشند.

در یک جمع n نفره، هر دو نفر یا با هم آشنا هستند یا نیستند. فرض کنید افراد با شماره‌های ۱، ۲ تا n نام‌گذاری شده‌اند و آشنایی رابطه‌ای دوطرفه است؛ یعنی اگر i با j آشنا باشد حتماً j هم با i آشناست.

(الف) با دانستن تمام روابط آشنایی در یک جمع n نفره، دایره‌های دوبه‌دو نامتقاطع C_1, C_2, \dots, C_n در صفحه کشیده‌اند به‌طوری‌که دایره‌های C_i و C_j متداخل‌اند اگر و فقط اگر بین فرد i و فرد j رابطه‌ی آشنایی وجود داشته باشد. ثابت کنید در این جمع، به ازای هر چهار فرد متمایز a, b, c, d ، که a با b ، b با c و c با d آشناست، حتماً یا a با c آشناست یا b با d . (۱۰ نمره)

(ب) جمعی را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر چهار فرد متمایز a, b, c, d ، که a با b ، b با c و c با d آشناست، حتماً یا a با c آشناست یا b با d . ثابت کنید با دانستن تمام آشنایی‌های این جمع، می‌توان دایره‌های دوبه‌دو نامتقاطع C_1, C_2, \dots, C_n را در صفحه کشید به‌طوری‌که دایره‌های C_i و C_j متداخل باشند اگر و فقط اگر بین فرد i و فرد j در آن جمع رابطه‌ی آشنایی وجود داشته باشد. (۲۵ نمره)

برای مثال در شکل زیر افرادی که با پاره‌خط به هم وصل شده‌اند با هم آشنا هستند و دایره‌های نیز بر همین اساس رسم شده‌اند.

